Gasparyan's Inequality

A.B. Pevnyi, S.M. Sitnik

Abstract

We consider a new and simpler proof of an inequality of A.S. Gasparyan, which was originally derived in terms of complex algebraical objects — multidimensional hyperdeterminants. Our proof is much simpler and use only standard technics such as mean inequalities. The main theorem on Gini means is essentially used. Some corollaries and problems are considered.

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ А. С. ГАСПАРЯНА

Аннотация

Предлагается новое доказательство одного неравенства А. С. Гаспаряна, полученного в оригинале как следствие достаточно сложного результата, сформулированного в терминах некоторых нестандартных алгебраических объектов—многомерных гипердетерминантов. Мы даем упрощенное доказательство на основе стандартных методов анализа с использованием средних величин и неравенств для них. Существенно используется теорема сравнения для специального класса средних Джини. В качестве следствия уточнены неравенства для комбинаций степенных средних.

Гаспарян [1]–[3] получил несколько достаточно простых по форме неравенств как следствие сложно формулируемых результатов в теории гиперопределителей. Приведем одно из этих неравенств.

Пусть даны числа $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ и набор вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$. Введем величину

$$G_{2m}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^r \right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{2m-r} \right). \tag{1}$$

Теорема 1 (Гаспарян). *Величина $G_{2m}(x_1, \ldots, x_n)$ неотрицательна, т.е. $G_{2m} \geqslant 0$.*

В настоящей работе получено более простое доказательство теоремы 1 с использованием оценок для средних значений, в том числе средних Джини, а также уточнения этого неравенства.

Рассмотрим введенную Гаспаряном степенную форму (1), которая является однородным многочленом степени $2m$ от n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Покажем, что условие неотрицательности можно усилить, показав, что эта форма на самом деле отделена от нуля простейшими положительными формами той же степени $2m$.

Теорема 2. *Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства*

$$G_{2m}(x) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m \right)^2, \quad \textit{если } m \textit{ — четное число,} \tag{2}$$

$$G_{2m}(x) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \right), \quad \textit{если } m \textit{ — нечетное число.} \tag{3}$$

Если все x_i равны между собой, то оба неравенства (2) и (3) обращаются в равенство. Обратно, если хоть одно из неравенств (2) и (3) обращается в равенство для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Следствие 1. *Форма из (1) положительна, т.е. $G_{2m}(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.*

Замечание 1. *Для правых частей в (2) и (3) справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}\right)$$

для нечетного m. *Для доказательства достаточно представить* x_i^m *в виде* $x_i^{(m-1)/2} x_i^{(m+1)/2}$ *и применить неравенство Коши — Буняковского. Поэтому оценка (2) выполняется для всех значений* m, *но для нечетных значений она является менее точной, чем (3).*

Для доказательства теоремы 2 потребуются некоторые результаты о степенных средних.

Пусть даны числа $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, и набор неотрицательных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_k \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Рассмотрим среднее степенное для этого набора чисел

$$M_r(x_1, \ldots, x_n) = M_r = \left(\frac{x_1^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}},$$

причем тогда

$$M_r^r = \frac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n},$$

а также сумму степеней

$$S_r(x_1, \ldots, x_n) = S_r = x_1^r + \ldots + x_n^r,$$

связанную со степенным средним соответствующего порядка очевидными формулами

$$M_r = \left(\frac{S_r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}, \quad M_r^r = \frac{S_r}{n}, \quad S_r = nM_r^r.$$

Свойства средних величин и степенных сумм подробно изложены в [4]–[7] и [8]–[10]. Из работ последнего времени отметим [11] и обзоры второго автора [12, 13].

Установим два вспомогательных утверждения. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа. Введем величину

$$F(r) = n^2 M_r^r M_{2m-r}^{2m-r} = S_r S_{2m-r} = \sum_{i=1}^{n} a_i^r \sum_{j=1}^{n} a_j^{2m-r}.$$

Лемма 1. *Функция* $F(r)$ *выпукла на* $(-\infty, \infty)$, *не возрастает на промежутке* $0 \leqslant r \leqslant m$ *и не убывает на промежутке* $m \leqslant r \leqslant 2m$. *Если* $F(r) = F(s)$ *при некоторых* $0 \leqslant r < s \leqslant m$, *то необходимо* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доказательство. Вычислим вторую производную

$$F''(r) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^r a_j^{2m-r} (\ln a_i - \ln a_j)^2 \geqslant 0.$$

Выпуклость установлена. Докажем неравенство $F(r) \geqslant F(s)$ при $0 \leqslant r < s \leqslant m$. Оно эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r \sum_{i=1}^{n} a_i^{2m-r} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^s \sum_{i=1}^{n} a_i^{2m-s}.$$

Перепишем последнее неравенство в виде отношений

$$\frac{\sum\limits_k a_k^{2m-r}}{\sum\limits_k a_k^{2m-s}} \geqslant \frac{\sum\limits_k a_k^{s}}{\sum\limits_k a_k^{r}}$$

и возведем в положительную степень $1/(s-r) = 1/[(2m-r)-(2m-s)]$:

$$\left(\frac{\sum\limits_k a_k^{2m-r}}{\sum\limits_k a_k^{2m-s}}\right)^{1/[(2m-r)-(2m-s)]} \geqslant \left(\frac{\sum\limits_k a_k^{s}}{\sum\limits_k a_k^{r}}\right)^{1/(s-r)}.$$

В результате мы получили неравенство между средними Джини (см. [7]–[10]). В обозначениях из [12, 13] оно записывается так:

$$Gi^{2m-r,2m-s} \geqslant Gi^{s,r}. \tag{4}$$

Джини ввел и изучил средние, названные впоследствии его именем, в [8], которые затем многократно переоткрывались. Условия справедливости неравенства (4) приведены в [10, с. 249]. В нашем случае они сводятся к одному неравенству $s + r \leqslant 2m$, которое выполнено по предположению.

Если $F(r) = F(s)$, то, как установлено в [10], выполняются равенства $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

График функции $F(r)$ симметричен относительно точки $r = m$ ввиду очевидного свойства $F(2m-r) = F(r)$. Лемма доказана. □

Покажем, что частично результаты леммы 1 можно перенести на наборы чисел любого знака.

Лемма 2. *Пусть* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. *Тогда при любом четном* r *из промежутка* $[0, m-1]$ *справедливо неравенство*

$$F(r) \geqslant F(r+1). \tag{5}$$

Доказательство. Если $x_i > 0$ для всех i, то неравенство (5) следует из леммы 1. Пусть x_i любого знака и хоть одно x_i отлично от нуля. Тогда

$$F(r+1) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{r+1} \sum_{j=1}^{n} x_j^{2m-r-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{r+1} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{2m-r-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{r} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{2m-r} = F(r).$$

Здесь мы применили лемму 1 к числам $|x_1|, \ldots, |x_n|$, при этом, если среди этих чисел есть нули, то их надо отбросить и применить лемму 1 к оставшимся числам. Кроме того, было использовано, что r—четное число, так как тогда $|x_i|^r = x_i^r$ и $|x_i|^{2m-r} = x_i^{2m-r}$. Лемма доказана. □

Теперь можно закончить доказательство теоремы 2. При m четном получаем

$$G_{2m}(x) = 2\sum_{r=0}^{m-2} (F(r) - F(r+1)) + F(m).$$

По лемме 2 $F(r) - F(r+1) \geqslant 0$, поэтому $G_{2m}(x) \geqslant F(m)$, что совпадает с (2).

При m нечетном получаем

$$G_{2m}(x) = 2\sum_{r=0}^{m-3}(F(r) - F(r+1)) + 2F(m-1) - F(m).$$

По лемме 2 $F(r) - F(r+1) \geqslant 0$ при $r = 0, 2, \cdots, m-1$, поэтому $G_{2m}(x) \geqslant F(m-1)$, что совпадает с (3).

Если неравенства (2) или (3) обращаются в равенства, то будут выполняться соотношения вида $F(r) - F(r+1) = 0$. А тогда в случае положительных x_i по лемме 1 все числа x_i равны между собой. Это завершает доказательство теоремы 2.

Следует отметить крайние случаи значений параметра r в лемме 1. Так, при $r = 0$ неравенство $F(0) \geqslant F(1)$ сводится к такому:

$$M_{2m}^{2m} \geqslant M_1 M_{2m-1}^{2m-1}.$$

Это неравенство очевидно, так как сводится к перемножению двух стандартных неравенств, выражающих монотонность среднего степенного по параметру (см., например, [4, 5])

$$M_1 \leqslant M_{2m}, \quad M_{2m-1} \leqslant M_{2m}.$$

Другой крайний случай леммы 1 получается из сформулированного в ней условия минимума функции $F(r)$ при $r = m$ и сводится к неравенству

$$(M_m^m)^2 \leqslant M_r^r M_{2m-r}^{2m-r}, \quad 0 \leqslant r \leqslant m,$$

которое является частным случаем известного неравенства Ляпунова (см., например, [4, 5]), выражающего логарифмическую выпуклость среднего степенного по параметру.

Список литературы

[1] А.С. Гаспарян, “Аналог формулы Бине–Коши для многомерных матриц” , *ДАН СССР* **273**, No. 2, (1983).

[2] А. С. Гаспарян, “О некоторых приложениях многомерных матриц” *Сообщ. прикл. мат., ВЦ АН СССР* (1983).

[3] А. С. Гаспарян, “Гиперопределители и обобщенные неравенства Чебышева”, В: *Тез. докл. межд. конф. “Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания”* с. 32–34, Обнинск (2002).

[4] Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М. (1948).

[5] Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства*, Мир, М. (1965).

[6] D. S. Mitrinović (in cooperation with P. M. Vasić), *Analytic Inequalities*, Springer, Berlin etc. (1970).

[7] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer (1993).

[8] К. Джини, *Средние величины*, Статистика, М. (1970).

[9] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publ., Dordrecht (1988).

[10] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer (2003).

[11] M. Hajja, P. S. Bullen, J. Matkowski, E. Neuman, S. Simic (Eds.), *Means and Their Inequalities*. Special issue of Int. J. Math. Math. Sci. (2013).

[12] С. М. Ситник, "Уточнения и обобщения классических неравенств", В: *Итоги науки*, с. 221–266, Владикавказ (2009).

[13] S. M. Sitnik, "Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: A Survey", *arXiv:1012.3864*.

АВТОРЫ:

Ситник С.М.
Воронежский институт МВД, Воронеж, Россия.
Sitnik S.M., Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia.
mathsms@yandex.ru, pochtasms@gmail.com

Певный А.Б.
Сыктывкарский госуниверситет, Сыктывкар, Россия.
Pevnyi A.B., Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia.
pevnyi@syktsu.ru