4. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций (справочник). Киев, Наукова Думка, 1981. 320 с.

5. Берже М. Геометрия (в 2 т.), М.: Мир, 1984. 368 с.

6. Булыгин А.М., Кошлаков С.Н., Ситник С.М. Неравенства о средних в комплексной области//Научно-практическая конференция Воронежской ВШ МВД России, тезисы докладов. Воронеж, 1998. С. 6-7.

7. Ситник. С.М., Тимашов А.С. Определения многофокусных кривых.// Труды Всер. научн. конф. Моделирование и краевые задачи, Ч.2, Самара 2004, С. 246-249.

8. Ситник. С.М., Тимашов А.С. Определения многофокусных кривых. Вестник ВИ МВД России/ 1(16) 2004, С. 148-150.

9. Максимумы и минимумы в геометрии. Протасов В.Ю. М.: МЦНМО, 2005. — 56 с.

10. А. О. Иванов, А. А. Тужилин Теория экстремальных сетей. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

11. А.И. Недошивина, С.М. Ситник. Приложения геометрических алгоритмов локализации точки на плоскости к моделированию и сжатию информации в задачах видеонаблюдений. Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013, Т. 9 (4), С. 108-111.

УДК 517.518.85

МЕТОД КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

METHOD OF FINITE DIMENSIONAL SIGNAL APPROXIMATIONS IN PROBLEMS OF QUADRATIC EXPONENTIAL INTERPOLATION

Ситник С.М.

Тимашов А.С.

Воронежский институт МВД России

г. Воронеж, Россия.

DOI: 10.12737/16946

Аннотация: рассматриваются аппроксимации сигналов при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса – квадратичных экспонент. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усечённых систем линейных уравнений.

Summary: approximations of signals are considered by integer shifts of the Gauss functions-quadratic exponentials. A new method is proposed for finding nod function for this problem which is based on solutions of cut systems of linear equations.
Ключевые слова: интерполяция, функции Гаусса, узловые функции, тета-функции Якоби, сигналы.
Keywords: interpolation, Gauss functions, nod functions, Jacobi theta-functions, signals.

Изучим задачу о приближении сигналов произвольной природы (электрических, информационных и т.д.) в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений и посвящена данная работа. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1-3].

Более точно, будет исследована следующая основная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$ и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, так же определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f(m) = \tilde{f}(m), \ m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби. Как показано в [1], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [2-3], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма, при этом вычисления возможны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений, см. также [4-5].

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ.

В работе получено теоретическое обоснование корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведён достаточно существенный объём компьютерных вычислений.

Приведём список основных полученных результатов (см. также [4-14]).

1. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров q, σ исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.

2. Проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров q, σ.

3. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры.

Список литературы

1. Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных.- 2010. - С. 107-116.

2. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета.- 2009.- № 13 (68), 17/2. -С. 89-99.

3. Zhuravlev M.V., Kiselev E. A., Minin L. A., S. M. Sitnik. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer.- 2011, Vol. 173, № 2. - pp. 231-241.

4. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика.-2013.- №19 (162). Вып. 32.- С. 184-186.

5. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий.- 2013.- № 2 (56).- С. 90-94.

6. Ситник С.М., Тимашов А.С., Ушаков С.Н. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2015, № 17 (214), вып. 40, С. 130-142.

7. Минин Л.А., Ситник С.М., Ушаков С.Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца//Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. 2014, №7 (183), Выпуск 35, С. 214-217.

8. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов// Математические заметки. 2014, Том 96, выпуск 2, С. 239-250.

9. С.М. Ситник, А.С. Тимашов. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции сигналов. Вестник Воронежского института МВД России.2014, № 2, С. 163-171.

10. E.A. Kiselev, L.A. Minin, I.Ya. Novikov, S.M. Sitnik. On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates. Mathematical Notes. Springer. 2014, Vol. 96 (1-2), P. 228-238.

11. С.М. Ситник. Обобщённые дискретные преобразования Фурье и их спектральные свойства. "Новые информационные технологии в автоматизированных системах". Материалы семнадцатого научно-практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2014. С. 281-291.

12. С.М. Ситник. А.С. Тимашов. Вычислительные аспекты метода квадратичной экспоненциальной интерполяции в задачах теории сигналов. "Новые информационные технологии в автоматизированных системах". Материалы

семнадцатого научно-практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2014. С. 292-300.

13. А.И. Недошивина, С.М. Ситник. Приложения геометрических алгоритмов локализации точки на плоскости к моделированию и сжатию информации в задачах видеонаблюдений. Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013, Т. 9 (4), С. 108-111.

14. С.М. Ситник. Компьютерный анализ спектральных свойств модифицированных дискретных преобразований Фурье. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007, Т. 9 (1), С. 98-103.

УДК 519.651

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

ON A VARIANT OF DISCREET FOURIER TRANSFORM

Ситник С.М.

Воронежский институт МВД России

г. Воронеж, Россия.

DOI: 10.12737/16947

Аннотация: в работе рассматривается набор преобразований, которые обобщают известное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Эти обобщения определяются при помощи группы перестановок комплексных корней из единицы.

Summary: we consider a class of generalizations of the discreet Fourier transform. They are defined by a group of permutations of roots of unity.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, корни из единицы, матричная форма.

Keywords: discreet Fourier transform, roots of unity, matrix form.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является одним из самых известных и полезных на практике математических инструментов. Это преобразование широко применяется, например, при проектировании и оптимизации различных автоматизированных систем, в электродинамике и оптике, теории кодирования и криптографии, при анализе систем связи и фильтрации сигналов, в алгоритмах сжатия информации и вычислительной томографии.

Важность ДПФ для приложений определяется в том числе и тем, что задачи о вычислении ДПФ, циклической свертки последовательностей, произведения больших чисел или многочленов по существу эквивалентны. Фундамен-