УДК 519.651

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДЛЯ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

METHOD OF GREEN FUNCTIONS IN MATHEMATICAL MODELLING FOR TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

Рыжкова Е.В.
Ситник С.М.
Воронежский институт МВД России
г. Воронеж, Россия.
DOI: 10.12737/16944

Аннотация: в различных прикладных задачах, в которых рассматриваются вопросы управления и оптимизации, теории систем, теоретической и строительной механике при изучении структур из струн и стержней, теории колебаний, теории упругости и пластичности, в задачах механики, связанных с разрушениями и моделированием ударных волн, используются математические модели, основанные на применении обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка..

Summary: in many applied problems of control, optimization, system theory, theoretical and construction mechanics, for problems with strings and nods structures, oscillation theory, theory of elasticity and plasticity, mechanical problems connected with fracture dynamics and shock waves, the main instrument for study these problems is a theory of high order ordinary differential equations.
Ключевые слова: двухточечные краевые задачи, функции Грина, теория графов.
Keywords: two-point boundary-value problems, Green function, graph theory.

Рассмотрим конкретную прикладную задачу, возникающую при исследовании механических деформаций стержней или струн, аналогичные задачи возникают для дифференциальных уравнений на графах [1].

На промежутке $[0,l]$ рассматриваются дифференциальные уравнения

$$(p1u1'')' = f1(x), \qquad x \neq \xi \tag{1}$$

$$-(p2u2')'' = f2(x), \qquad x \neq \xi \tag{2}$$

Первое из них возникает при описании поперечных деформаций классического стержня, а второе — обычной струны (или продольных деформаций стержня). В точке ξ (где, естественно, $0 < \xi < l$) оба уравнения выключаются, так что фактически (1)-(2)— это система четырёх уравнений. Однако нас интересуют лишь решения, непрерывно склеенные в точке $x = \xi$, что значит $u_1(\xi - 0) = u_1(\xi + 0), u_2(\xi - 0) = u_2(\xi + 0)$. Более того, в этой точке непрерывно склеены и решения разностных уравнений, т. е.

$$u_1(\xi \pm 0) = u_2(\xi \pm 0). \tag{3}$$

В этой же точке мы предполагаем выполненным условие взаимодействия (трансмиссии)

$$\delta(p_1 u_1'')'(\xi) + \delta(p_2 u_2')'(\xi) = 0, \tag{4}$$

где через $\delta\varphi(\xi)$ обозначается скачок φ в точке ξ, т. е. $\delta\varphi(\xi) = \varphi(\xi + 0) - \varphi(\xi - 0)$. Допуская у $u_1(x)$ потерю гладкости в точке ξ, мы предполагаем при этом

$$(p1u1'')(\xi - 0) = (p1u1'')(\xi + 0). \tag{5}$$

Последнее условие соответствует тому, что в точке $x = \xi$ его излома оба его куска шарнирно скреплены (склёпаны). Если на концах $x = 0, x = 1$ отрезка поставить стандартные условия закрепления, т.е.

$$u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad u_1(l) = u_1'(l) = 0, \quad u_2(0) = u_2'(l) = 0, \tag{6}$$

то мы сможем смотреть на систему (1) – (6) как на краевую задачу, моделирующую, например, деформации большого канатного моста. При $f_2 \equiv 0$ второе уравнение (2) вместе с условиями (3), (4) заменяются, как несложно проверить, условием $\delta(p1u1'')'(\xi) + \gamma u_1(\xi) = 0, \quad \gamma > 0,$

что вместе с (5) приводит (1) к модели двухзвенной цепочки стержней с упругой опорой в месте стыка ($x = \xi$). В нашей ситуации можно говорить о задаче на графе типа креста, на двух рёбрах которого задано уравнение типа (1), а на двух остальных – типа (2).

Можно считать, что f_1 и f_2 есть обобщённые производные ($f_1 = F_1', f_2 = F_2'$) от функций ограниченной вариации. Физичность условий требует предположения $f1(\xi) = f2(\xi)$, что в случае скачков F_1 и F_2 в точке ξ означает совпадение атомов меры или – физически – общую для обеих функций u_1, u_2 сосредоточенную силу.

Задача (1) – (6) рассматривается в классе достаточно гладких (при $x \neq \xi$) функций $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ на $[0, l]$. Далее во всех формулировках и условиях мы предполагаем, что $x \neq \xi$ без дополнительных оговорок.

Всюду далее считаем, что $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ сильно положительны.

Теорема 1. *Для любых $F1, F2$ из $BV[0, l]$ задача (1) – (6) однозначно раз-*

решима (при $f_1 = F_1'$ и $f_2 = F_2'$*).*

Теорема 2. *Пуст* F_1 *и* F_2 *– первообразные функций* f_1 *и* f_2. *Тогда для любых неубывающих* F_1, F_2 *при наличии хотя бы одной точки роста* F_1 *или* F_2 *решение* $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ *строго положительно в* $(0, l)$, *т.е.* $u_1(x) > 0$ *и* $u_2(x) > 0$ *на* $(0, l)$. *Более того, для любых двух "неотрицательных" пар* $\{f_1, f_2\}$ *соответствующие им решения* $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ *и* $v(x) = \{v_1(x), v_2(x)\}$ *соизмеримы по конусу неотрицательных функций в* $C[0, l] \times C[0, l]$, *т.е.*

$$sup_{x,s} \frac{u_i(x) v(s)}{v_i(x)\, u_i(s)} < \infty \quad \text{при} \quad i = 1,2.$$

Последнее свойство означает усиленную положительную обратимость задачи (1) – (6). Более сильно это свойство можно описать так. Пусть K – конус неотрицательных функций в пространстве $C[0, l] \times C[0, l]$. Пусть A – обратный к задаче (1) – (6) оператор. Стандартным способом проверяется, что он имеет интегральный вид

$$(AF)'(x) = \int_0^l G(x, s)\ dF(s), \tag{7}$$

где $G(x, s)$ – двумерная матрица-функция Грина. Определяемый этой функцией интегральный оператор действует в $E = C[0, l] \times C[0, l]$ и сильно положителен на конусе K.

Теперь рассмотрим вместо (1), (2) уравнения

$$(p_1 u_1'')'' = \lambda M1' u_1, \quad -(p_2 u_2')' = \lambda M2' u_2, \tag{8}$$

Где M_1, M_2 – неубывающие функции, определяющие распределение масс соответственно на стержне и струне. Следующая теорема устанавливается на основе описанного свойства оператора в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть одна из функций* $M_1(x), M_2(x)$ *имеет хотя бы одну точку роста (т.е. отлична от константы). Тогда минимальное по модулю собственное значение* λ_0 *задачи (8) при условиях (3) – (6) является строго положительным и простым (корневое пространство одномерно), любая другая точка* λ *спектра удовлетворяет неравенству* $|\lambda| > \lambda_0$. *Соответствующая* λ_0 *собственная функция* $u(x)$ *имеет обе строго положительные (на* $(0, l)$*) компоненты.*

Задача (1) – (6) оказывается самосопряжённой в естественном смысле, её функция-матрица Грина – симметричным положительным ядром. Поэтому весь спектр задачи (3) – (6), (8) состоит из вещественных положительных чисел. По всей видимости, все они простые, а соответствующие им собственные функции имеют (как в классической теории Штурма-Лиувилля) количество перемен знака, совпадающее с номером соответствующего собственного значения (в естественной иерархии). Однако даже набор слов "число перемен знака", очевидный для скалярных функций, допускает разные толкования для вектор-функций, и потому описание осцилляционных свойств собственных функций в рассматриваемом случае пока не получено.

Функция-матрица Грина $G(x,s)$ задачи (1) – (6) допускает стандартное задание через фундаментальную систему решений однородного "уравнения"

$$(p_1 u_1'')'' = 0, \quad (p_2 u_2')' = 0, \quad x \neq \xi, \tag{9}$$

где, аналогично взглядам теории уравнений на графах [1], условия (3) – (5) удобно отнести к определению решения и, более того, к толкованию обобщённого уравнения (9) в точке $x = \xi$. Функция $G(x,s)$ оказывается непрерывной на $[0,l] \times [0,l]$ и строго положительна (по каждой координате) внутри этого квадрата. Следует отметить, что даже непрерывность здесь – весьма непросто проверяемое свойство. Трудности сосредоточены в окрестности прямой $s = \xi$. Подобные трудности нетривиальны даже для скалярных задач с внутренними особенностями.

Список литературы

1. Дикарева Е.В. Метод функций Грина в математических моделях для двухточечных краевых задач // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Материалы восемнадцатого научно-практического семинара.М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2015. С. 226-235.

2. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Математические заметки. 2014. Т. 96. вып. 2. С. 239-250.

3. Zhuravlev M.V., Kiselev E. A., Minin L. A., S. M. Sitnik. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer. 2011. Vol. 173. № 2. P. 231-241.

4. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // In the Book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012. (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin). 2013. Cambridge Scientific Publishers. P. 171-201.

5. Недошивина А.И., Ситник С.М. Приложения геометрических алгоритмов локализации точки на плоскости к моделированию и сжатию информации в задачах видеонаблюдений // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Том 9. № 4. С. 108-111.

6. Певный А.Б., Ситник С.М. Строго положительно определённые функции, неравенства М.Г. Крейна и Е.А. Горина // Новые информационные технологии в автоматизированных системах.Материалы восемнадцатого научно-практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2015. С. 247-254.

7. Ситник С. М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости// Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР.—1990.—44 С.

8. Ситник С. М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина–Пуассона// Научные ведомости Белгородского государственного университета.—2010.—Вып. 18,№5 (76).—С. 135–153.

9. Катрахов В.В., Ситник С.М. Композиционный метод построения В--эллиптических, В--гиперболических и В--параболических операторов преобразования// ДАН СССР, 1994. № 337;3. С.307-311.

10. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи// ДАН СССР. 1991. т.320, №6. С. 1326--1330.

11. Катрахов В.В., Ситник С.М. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом// ДАН СССР. 1984. Т. 278, №4. С.797-799.

12. С.М. Ситник. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений// Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ) — Естественнонаучная серия. 2008. № 8/1 (67). С. 237- 248.

13. D. Karp, A. Savenkova A., S.M. Sitnik. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007, V. 207 (2), P. 331-337.

УДК 519.651

КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ, ОБОБЩАЮЩИХ КЛАССИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

PLANE CURVES WHICH GENERALIZE CLASSIC QUADRICS

Рыжкова Е.В.

Ситник С.М.

Воронежский институт МВД России

г. Воронеж, Россия.

DOI: 10.12737/16945