6. Певный А.Б., Ситник С.М. Строго положительно определённые функции, неравенства М.Г. Крейна и Е.А. Горина // Новые информационные технологии в автоматизированных системах.Материалы восемнадцатого научно-практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2015. С. 247-254.

7. Ситник С. М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости// Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР.—1990.—44 С.

8. Ситник С. М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина–Пуассона// Научные ведомости Белгородского государственного университета.—2010.—Вып. 18,№5 (76).—С. 135–153.

9. Катрахов В.В., Ситник С.М. Композиционный метод построения B--эллиптических, B--гиперболических и B--параболических операторов преобразования// ДАН СССР, 1994. № 337;3. С.307-311.

10. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи// ДАН СССР. 1991. т.320, №6. С. 1326--1330.

11. Катрахов В.В., Ситник С.М. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом// ДАН СССР. 1984. Т. 278, №4. С.797-799.

12. С.М. Ситник. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений// Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ) — Естественнонаучная серия. 2008. № 8/1 (67). С. 237- 248.

13. D. Karp, A. Savenkova A., S.M. Sitnik. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007, V. 207 (2), P. 331-337.

УДК 519.651

КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ, ОБОБЩАЮЩИХ КЛАССИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

PLANE CURVES WHICH GENERALIZE CLASSIC QUADRICS

Рыжкова Е.В.

Ситник С.М.

Воронежский институт МВД России

г. Воронеж, Россия.

DOI: 10.12737/16945

Аннотация: кривые второго и более высоких порядков относятся к числу основных математических понятий [1-5]. В последнее время появились новые приложения теории кривых к задачам описания траекторий динамических систем, оптимизации и математического моделирования. Огромную роль играют плоские кривые и в компьютерной графике.

Summary: quadrics and plane curves of higher orders belong to the main mathematical objects [1-5]. Now there are many applications of curves to problems of finding trajectories of dynamical systems, optimization problems, mathematical modelling, computer graphics.
Ключевые слова: кривые, коники, эллипс, гипербола, парабола, фокус, директриса.
Keywords: curves, quadrics, ellipsis, hyperbolas, parabolas, focus, .directrix.

Кривые второго и более высоких порядков относятся к числу основных математических понятий [1-5]. История их изучения насчитывает почти три тысячи лет. Известно, какую важную роль играют кривые линии при решении огромного числа задач. В последнее время появились новые приложения теории кривых к задачам описания траекторий динамических систем, оптимизации и математического моделирования. Огромную роль играют плоские кривые и в компьютерной графике (например, кривые Безье).

Наиболее подробно и полно изучены кривые второго порядка, создана их законченная теория [2, 5]. Для кривых третьего и более высоких порядков, несмотря на ряд выдающихся результатов по их классификации (Ньютон, Плюккер, Клейн, Лориа), законченной теории не создано [1]. Поэтому большую роль играет изучение отдельных кривых высокого порядка [1, 3-4]. В данной работе вводятся определения новых кривых на плоскости, обобщающих обычные кривые второго порядка. Эти классы кривых возникают как линии уровня для функций обобщённых расстояний. Стоит отметить, что нахождение допустимых параметров для построения и компьютерного моделирования функций обобщённых расстояний приводит к необходимости в различных ситуациях решать известные оптимизационные задачи на минимакс Ферма, Штернера, Вебера. Кроме простейших случаев явное аналитическое решение этих задач неизвестно, и для их решения требуются численные расчёты и методы компьютерного моделирования.

Рассмотрим обобщения коник – кривых второго порядка на плоскости, на случай нескольких фокусов или директрис.

Определение 1. Пусть на плоскости заданы n точек $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Обобщённым эллипсом с фокусами в данных точках $F_1, F_2, \ldots, F_n$ называется множество точек, сумма расстояний от которых до фокусов есть величина постоянная.

Аналогично можно обобщить понятия гиперболы и параболы. Обозначим расстояние между двумя точками A и B через $d(A,B)$, а расстояние от точки A до прямой l через $d(A,l)$.

Определение 2. Пусть множество из $n+m$ точек на плоскости разбито на две группы.

Обобщённой гиперболой с двумя наборами фокусов называется множество точек плоскости M, для которых следующая разность постоянна:

$$\sum_{k=1}^{n} d(M, F_k) - \sum_{j=1}^{m} d(M, G_j) = c = const \qquad (2)$$

Определение 3. Пусть даны множества из n точек $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ и из m прямых $\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$.

Обобщенной параболой с данными наборами фокусов и директрис называется множество точек плоскости M, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} d(M, F_k) - \sum_{j=1}^{m} d(M, l_j) = c = const \qquad (3)$$

Рассмотренные случаи являются специальными вариантами достаточно общей конструкции. Перейдём к формулировке, дав соответствующее определение.

Пусть на плоскости задано произвольное количество n множеств любой природы: $\boldsymbol{F_1, \ldots, F_n}$. Обобщённым расстоянием на плоскости называется следующая величина

$$\boldsymbol{d(M, F_1) \pm \cdots d(M, F_n) = const)},$$

а линиями уровня для этого обобщённого расстояния называется множество таких точек на плоскости, что

$$\boldsymbol{d(M, F_1) \pm \cdots d(M, F_n) = const)} = \mathrm{D}.$$

Частными случаями этого определения, когда фиксированные множества – это точки (фокусы) или прямые (директрисы) являются приведённые выше определения обобщённых эллипсов, гипербол и парабол.

При изучении введённого понятия линий уровня для обобщённых расстояний возникают несколько достаточно трудных задач, лишь малая часть которых может быть решена аналитически, а большинство требуют для своего решения использования численных методов и компьютерного моделирования.

Задача 1. Аналитическое описание полученных кривых и явное аналитическое определение их числовых характеристик.

Задача 2. Определение допустимых параметров D в определении линий уровня для обобщённых расстояний.

Задача 3. Визуализация введённых кривых методами математического моделирования и компьютерной графики.

Для решения задачи 1 прежде всего следует получить рациональные уравнения кривых. Эта сложная и не всегда разрешимая задача.

Для решения задачи 2 нужно определить диапазон изменения параметра D, для которого кривая существует, то есть соответствующее уравнение имеет решения. Замечательно, что такие задачи, которые возникают как частные случаи общей исследуемой нами проблемы, приводят к классическим постановкам из геометрии, вычислительной математики, оптимального управления и теории графов. Например, задача об определении минимально допустимого числа D для обобщённого эллипса с тремя фокусами сводится к нахождению точки Торричелли в задаче Ферма для треугольника на плоскости, для нескольких фокусов – к проблеме Штернера для многоугольника, задачи с весами – к известной задаче Вебера. Все эти задачи имеют давнюю историю и получили многочисленные приложения как теоретического, так и прикладного характера.

Введенные кривые после их рационализации имеют достаточно высокий порядок. Поэтому они очень сложны для исследования. Нами изучен ряд частных случаев.

Пример. Рассмотрен обобщённый эллипс с тремя фокусами, лежащими на одной прямой. В общем случае это кривая 8 порядка. С помощью программы MATHEMATICA получено рациональное уравнение этой кривой и изучена динамика зависимости её формы от величины параметра D в (1) и расположения фокусов. При совпадении фокусов эта кривая сводится к овалам Декарта [1].

Список литературы

1. Савелов А.А. Плоские кривые. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 294 с.

2. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. М.: Высшая школа, 1967. 656 с.

3. Гусак А.А., Гусак Г.М. Линии и поверхности. Минск: Вышэйшая школа, 1985. 221 с.

4. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций (справочник). Киев, Наукова Думка, 1981. 320 с.

5. Берже М. Геометрия (в 2 т.), М.: Мир, 1984. 368 с.

6. Булыгин А.М., Кошлаков С.Н., Ситник С.М. Неравенства о средних в комплексной области//Научно-практическая конференция Воронежской ВШ МВД России, тезисы докладов. Воронеж, 1998. С. 6-7.

7. Ситник. С.М., Тимашов А.С. Определения многофокусных кривых.// Труды Всер. научн. конф. Моделирование и краевые задачи, Ч.2, Самара 2004, С. 246-249.

8. Ситник. С.М., Тимашов А.С. Определения многофокусных кривых. Вестник ВИ МВД России/ 1(16) 2004, С. 148-150.

9. Максимумы и минимумы в геометрии. Протасов В.Ю. М.: МЦНМО, 2005. — 56 с.

10. А. О. Иванов, А. А. Тужилин Теория экстремальных сетей. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

11. А.И. Недошивина, С.М. Ситник. Приложения геометрических алгоритмов локализации точки на плоскости к моделированию и сжатию информации в задачах видеонаблюдений. Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013, Т. 9 (4), С. 108-111.

УДК 517.518.85

МЕТОД КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

METHOD OF FINITE DIMENSIONAL SIGNAL APPROXIMATIONS IN PROBLEMS OF QUADRATIC EXPONENTIAL INTERPOLATION

Ситник С.М.

Тимашов А.С.

Воронежский институт МВД России

г. Воронеж, Россия.

DOI: 10.12737/16946

Аннотация: рассматриваются аппроксимации сигналов при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса – квадратичных экспонент. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усечённых систем линейных уравнений.