ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2010, том 46, № 3, с. 396–409

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

© 2010 г. Л. А. Ковалева, А. П. Солдатов

Рассматриваются нелокальные краевые задачи для трех гармонических функций, каждая из которых определена в своей области. На общем участке границ этих областей задается контактное условие, остальные части границы заняты данными Дирихле либо Неймана (или смешанными краевыми условиями). Доказана однозначная разрешимость этих задач.

1. Постановка задач. Пусть D^p, $1 \le p \le 3$, – конечная область на плоскости, ограниченная простым кусочно-гладким контуром. Множество концевых точек гладких дуг, составляющих этот контур, обозначим через F^p. Предполагается, что внутренние углы области D^p в точках $\tau \in F^p$ отличны от 0 и 2π, т.е. точки τ не являются точками возврата контура ∂D^p. Пусть все контуры ∂D^p имеют общую гладкую дугу $\Gamma_0^p = \Gamma_0$ с концами в τ_1, τ_2. Эта дуга ориентирована от τ_1 к τ_2 и все области D^p лежат слева от данной дуги. Дополнение $\partial D^p \setminus \Gamma_0$ обозначим через Γ_+^p, $1 \le p \le 3$. Рассмотрим три задачи, возникающие в теории стратифицированных множеств [1].

Задача D. Определить семейство из трех функций $u^p \in C(\overline{D^p} \setminus F^p)$, $1 \le p \le 3$, которые гармоничны в D^p и удовлетворяют краевым условиям

$$u^1 = u^2 = u^3, \quad \frac{\partial u^1}{\partial n} + \frac{\partial u^2}{\partial n} + \frac{\partial u^3}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{1}$$

$$u^p|_{\Gamma_+^p} = g^p, \quad 1 \le p \le 3, \tag{2_D}$$

где n – единичная внешняя нормаль. В точках $\tau \in F^p$ функции $u^p(z) = u^p(x,y)$, где $z = x + iy$, могут допускать особенности логарифмического характера, т.е. $u^p(z)|z-\tau|^\varepsilon \to 0$ при $z \to \tau$ для любого $\varepsilon > 0$.

Задача N формулируется аналогичным образом с заменой условий (2_D) на

$$\left.\frac{\partial u^p}{\partial n}\right|_{\Gamma_+^p} = (h^p)', \quad 1 \le p \le 3, \tag{2_N}$$

где штрих означает производную по длине дуги.

Пусть кривая Γ_+^p разбита на две части Γ_k^p, $k = 0, 1$.

Задача DN формулируется, как и выше, с заменой условий (2_D) и (2_N) на смешанные краевые условия

$$u^p|_{\Gamma_1^p} = g^p, \quad \left.\frac{\partial u^p}{\partial n}\right|_{\Gamma_2^p} = (h^p)', \quad 1 \le p \le 3. \tag{2_DN}$$

В задачах D и N ниже предполагается, что Γ_+^p является гладкой дугой с концами τ_1, τ_2. В задаче DN гладкими дугами предполагаются кривые Γ_k^p с концами τ_k, τ^p, $k = 1, 2$, составляющие Γ_+^p.

Очевидно, задачи D, N и DN можно переформулировать по отношению к аналитическим функциям ϕ^p, реальные части которых совпадают с гармоническими функциями u^p. Поскольку мнимые части функций ϕ^p определены с точностью до константы, с учетом соотношений Коши–Римана предыдущие краевые условия переходят соответственно в условия

$$\mathrm{Re}(\phi^1 - \phi^2)|_{\Gamma_0} = \mathrm{Re}(\phi^2 - \phi^3)|_{\Gamma_0} = 0, \quad \mathrm{Im}(\phi^1 + \phi^2 + \phi^3)|_{\Gamma_0} = C, \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}\,\phi^p|_{\Gamma_+^p} = g^p, \tag{4_D}$$

$$\operatorname{Im}\phi^p|_{\Gamma_+^p} = h^p, \tag{$4_{\rm N}$}$$

$$\operatorname{Re}\phi^p|_{\Gamma_1^p} = g^p, \quad \operatorname{Im}\phi^p|_{\Gamma_2^p} = h^p, \tag{$4_{\rm DN}$}$$

с некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}$. Как и выше, соответствующие задачи обозначаем D, N и DN.

2. Основные результаты для общей краевой задачи. Задачи D, N и DN относятся к типу нелокальных краевых задач Римана, подробно изученных в [2, 3]. Сформулируем основные результаты, относящиеся к этим задачам. Начнем со случая одной области D, ограниченной кусочно-гладким контуром ∂D без точек возврата. Этот контур составлен из m гладких дуг $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, множество концевых точек этих дуг обозначим через F (очевидно, что оно состоит из m элементов). Каждая дуга Γ_j предполагается ориентированной так, что область D лежит либо слева, либо справа от Γ_j. Соответственно этим случаям полагаем $\sigma_j = 1$ и $\sigma_j = -1$, в результате получаем сигнатуру ориентации $\sigma = (\sigma_i)_1^m$.

Выберем гладкие параметризации $\gamma_j : [0,1] \to \Gamma_j$, согласованные с ориентацией дуг Γ_j. С аналитической в области D функцией ϕ, непрерывной в $\overline{D} \setminus F$, свяжем семейство $\phi_\gamma^+ = (\phi_{\gamma,j}^+)_1^m$ ее граничных значений, снесенных с помощью этих параметризаций на интервал $(0,1)$ действительной оси:

$$\phi_\gamma^+ = (\phi_{\gamma,j}^+)_1^m, \quad \phi_{\gamma,j}^+ = \phi^+ \circ \gamma_j. \tag{5}$$

Рассмотрим нелокальную задачу Римана

$$\operatorname{Re} a\phi_\gamma^+ = f, \tag{6}$$

где $a(s) = \{a_{ij}(s)\} \in C[0,1]$, – $m \times m$-матрица-функция, а вещественная m-вектор-функция f задана и непрерывна на интервале $(0,1)$. В координатной форме это краевое условие запишем в виде m линейных соотношений

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^m a_{ij}\ \phi_{\gamma,j}^+ = f_i, \quad 1 \le i \le m.$$

Опишем гёльдеровы классы, в которых будет рассматриваться задача. Пусть $C^\mu(\overline{D})$ – пространство функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $0 < \mu < 1$ в замкнутой области $\overline{D}$. Обозначим через $C^\mu_{-0}(\overline{D}, F)$ класс функций $\phi(z)$, аналитических в области D и удовлетворяющих условию

$$\phi_\varepsilon(z) = [\Pi_{\tau \in F}(z-\tau)^{\mu+\varepsilon}]\phi(z) \in C^\mu(\overline{D^p}), \quad \phi_\varepsilon|_F = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. Очевидно, функция $\phi(z)$ этого класса удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ вне любой окрестности точек $\tau \in F$ и допускает особенности логарифмического характера в этих точках. В противоположность этому введем класс $C^\mu_{+0}(\overline{D}, F)$ аналитических в D функций $\phi(z)$ таких, что выполнено условие

$$\phi_{-\varepsilon}(z) = [\Pi_{\tau \in F^p}(z-\tau)^{\mu-\varepsilon}]\phi(z) \in C^\mu(\overline{D^p}), \quad \phi_{-\varepsilon}|_F = 0$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Функции этого класса удовлетворяют условию Гёльдера (с некоторым малым показателем) во всей замкнутой области $\overline{D}$ и обращаются в нуль в точках $\tau \in F$. Пусть, наконец, класс $C^\mu_{(+0)}$ получен расширением класса C^μ_{+0} многочленами (можно ограничиться многочленами степени не выше $m-1$, где m – число точек множества F). Аналогичным образом вводятся классы $C^\mu_{\pm 0}([0,1]; 0,1)$ для вектор-функций $f(t)$ на интервале $(0,1)$ по отношению к весовой функции $[t(t-1)]^{\mu \pm \varepsilon}$.

Задачу (6) будем рассматривать в классах $C^\mu_{\pm 0}(\overline{D}, F)$, а также в классе $C^\mu_{(+0)}(\overline{D}, F)$ функций, непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$, предполагая правую часть принадлежащей соответствующему классу. В случае класса $C^\mu_{(+0)}(D, F)$ на значения $f(0)$, $f(1)$ правой части

$f \in C^{\mu}_{(+0)}([0,1];0,1)$ нужно наложить необходимые условия согласования. Они представляют собой некоторые линейные соотношения, которые обеспечивают для заданной функции, аналитической в D, существование такой функции $\psi \in C(\overline{D})$, что соответствующие правые части в краевом условии (6) для разности $\phi^p - \psi^p$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0,1]$.

Относительно гладкости данных задачи предполагаем, что дуги Γ_j принадлежат классу $C^{\mu+0}$ (т.е. допускают параметризации γ, производные которых γ_j' принадлежат классу $C^{\mu+\varepsilon}[0,1]$ с некоторым $\varepsilon > 0$). Аналогичным образом матрица-функция $a(s)$ краевого условия (6) предполагается из класса $C^{\mu+0}[0,1]$.

В рамках описанной постановки можно охватить и случай нескольких областей D. Пусть области D^p, $p = 1,\ldots,s$, между собой никак не связаны и удовлетворяют всем предыдущим условиям. Пусть дуги Γ_i^p, $1 \le i \le m^p$, множество их концов F^p, а также концевые дуги $\Gamma_i^p(\tau)$ и криволинейные секторы $S^p(\tau)$, $\tau \in F^p$, определяются по D^p аналогично предыдущему. Совокупность m^p дуг Γ_i^p обозначим через $\{\partial D^p\}$. Положим $m = m^1 + \ldots + m^s$ и дизъюнктное объединение $\bigcup_p \{\partial D^p\}$ занумеруем единым образом в виде Γ_j, $1 \le j \le m$. Запись $\Gamma_j \in \{\partial D^p\}$ означает, что $\Gamma_j = \Gamma_i^p$ для некоторых p и i.

Сигнатура ориентации σ также определяется единым образом: $\sigma_j = 1$, если дуга $\Gamma_j \in \{\partial D^p\}$ ориентирована положительно по отношению к области D^p (т.е. оставляет эту область слева), и $\sigma_j = -1$ в противном случае. Пусть параметризации γ_j дуг Γ_j означают то же, что и выше. Исходя из семейства $\phi = (\phi^p)$ функций ϕ^p, аналитических в D^p, составим m-вектор-функцию ϕ_γ ее граничных значений на интервале $(0,1)$, полагая $\phi_{\gamma,j} = (\phi^p)^+ \circ \gamma_j$ для $\Gamma_j \in \{\partial D^p\}$. Тогда задача (6) для рассматриваемого семейства ϕ ставится совершенно аналогично. Обозначения введенных выше классов для этих семейств сохраняются без изменений.

Пусть матрица a^σ получается из a по правилу

$$(a^\sigma)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \sigma_j = 1, \\ \overline{a_{ij}}, & \sigma_j = -1. \end{cases}$$

Другими словами, j-е столбцы матриц a^σ и a совпадают, если $\sigma_j = 1$, и комплексно сопряжены, если $\sigma_j = -1$. В частности, $\overline{a^\sigma} = a^{-\sigma}$.

Задачу (6) отнесем к нормальному типу, если $\det a^\sigma(t) \ne 0$, $0 \le t \le 1$. Предполагая это условие выполненным, положим

$$b = (a^\sigma)^{-1}\overline{a^\sigma}. \tag{7}$$

Существует столь малое $r > 0$, что круги с центрами $\tau \in F^p$ радиуса r попарно не пересекаются и пересекают область D^p по криволинейным секторам $S(\tau) = S^p(\tau)$ с вершиной τ. Если τ является концом дуги $\Gamma_i \in \{\partial D^p\}$, то пересечение указанного круга с Γ_i дает дугу $\Gamma_i(\tau)$ с концом τ. Удобно положить

$$\Gamma_i(\tau) = \begin{cases} \Gamma_i^{(0)}, & \text{если } \tau \text{ – левый конец } \Gamma_i, \\ \Gamma_i^{(1)} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Боковые стороны сектора $S = S(\tau)$ обозначим через $\partial^\pm S(\tau)$, предполагая, что поворот от $\partial^+ S$ к $\partial^- S$ вокруг вершины τ внутри этого сектора осуществляется против часовой стрелки. Таким образом, совокупность $2m$ боковых сторон всех m секторов $S^p(\tau)$, $\tau \in F^p$, $1 \le p \le s$, совпадает со множеством $\{\Gamma_i^{(k)},\ 1 \le i \le m,\ k = 0,1\}$. Множество этих концевых дуг занумеруем единым образом в виде $\Gamma_{(k)}$, $1 \le k \le 2m$. Рассмотрим $2m \times 2m$-матрицу-функцию $V(\zeta)$ комплексной переменной ζ с элементами

$$V_{kr}(\zeta) = \begin{cases} e^{i\theta\zeta}, & \text{если} \quad \{\Gamma_{(k)}, \Gamma_{(r)}\} = \{\partial^+ S, \partial^- S\}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{8}$$

где S – один из m секторов $S^p(\tau)$, $\tau \in F^p$, $1 \le p \le s$, и θ – раствор этого сектора.

Эта матрица целиком определяется геометрией областей D^p, составляющих семейство D. Введем далее постоянную $2m\times 2m$-матрицу B с элементами

$$B_{kr}=\begin{cases}\overline{b_{ij}(0)}, & \text{если}\quad \Gamma_{(k)}=\Gamma_i^{(0)},\quad \Gamma_{(r)}=\Gamma_j^{(0)},\\ b_{ij}(1), & \text{если}\quad \Gamma_{(k)}=\Gamma_i^{(1)},\quad \Gamma_{(r)}=\Gamma_j^{(1)},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}\tag{9}$$

Аналитическую на всей плоскости матрицу-функцию $(V+B)(\zeta)$ назовем концевым символом задачи. Мероморфная функция

$$\frac{\det(V+B)(\zeta)}{\det(V+1)(\zeta)}$$

при $\operatorname{Im}\zeta\to\pm\infty$, $\operatorname{Re}\zeta=\mathrm{const}$ стремится к ненулевым пределам, так что проекция нулей функции $\det(V{+}B)(\zeta)$ на действительную ось является дискретным множеством. Пусть $\alpha>0$ выбрано столь малым, что эти нули отсутствуют в полосе $-\alpha\le\operatorname{Re}\zeta<0$. Положим

$$\varkappa_0=\frac{1}{2\pi i}[\ln\det b(t)]|_0^1-\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(V+B)(\zeta)}{\det(V+1)(\zeta)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty},\tag{10}$$

где выражения в квадратных скобках определяются непрерывными ветвями логарифма, а вертикальная черта означает приращение в соответствующих пределах. Легко показать, что число $\varkappa_0$ целое.

Теорема 1. *Пусть все дуги Γ_j принадлежат классу $C^{1,\mu+0}$ (т.е. $C^{1,\mu+\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon>0$), матрица-функция $a(t)$ принадлежит $C^{\mu+0}[0,1]$ и задача (6) является задачей нормального типа. Тогда эта задача фредгольмова в классе C^μ_{-0} и ее индекс $\varkappa$ равен $\varkappa_0+s$, где s – число областей D^p. Более точно, справедливы следующие утверждения:*

1) однородная задача (6) в классе C^μ_{-0} имеет конечное число k линейно независимых решений;

2) неоднородная задача с правой частью $f\in C^\mu_{-0}$ разрешима в этом классе тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\int\limits_0^1 f(t)g_i(t)\,\frac{dt}{t(t-1)}=0,\quad 1\le i\le k',\tag{11}$$

с некоторыми линейно независимыми вектор-функциями $g_i\in C^\mu_{+0}$, $1\le i\le k'$;

3) разность $k-k'$ равна $\varkappa$.

Под произведением fg_i под знаком интеграла в (11) понимается скалярное произведение m-компонентных вещественных векторов f и g_i. Произведение функций $f\in C^\mu_{-0}$ и $g_i\in C^\mu_{+0}$ принадлежит C^μ_{+0}, так что эти интегралы имеют смысл.

При определенных условиях теорема 1 позволяет решить вопрос о разрешимости задачи (6) и в классе $C^\mu_{+0}(D)\subseteq C(\overline{D})$.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 матрица-функция $\zeta(V+B)^{-1}(\zeta)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Тогда любое решение $\phi\in C^\mu_{-0}$ задачи (6) с правой частью $f\in C^\mu_{+0}$ принадлежит классу $C^\mu_{(+0)}$. В частности, $\varkappa$ является индексом задачи и в классе $C^\mu_{(+0)}$.*

Приведем еще утверждение относительно дополнительной гладкости решения.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 1 функция $a(t)$ принадлежит $C^{1,\mu+0}[0,1]$. Тогда любое решение $\phi\in C^\mu_{-0}$ задачи (6) с правой частью $f\in C^\mu_{-0}$, для которой*

$$\tilde f(t)=t(t-1)f'(t)\in C^\mu_{-0},$$

обладает аналогичным свойством, т.е.

$$\tilde{\phi}^p(z) = \Pi_{\tau\in F^p}(z-\tau)(\phi^p)'(z) \in C^{\mu}_{-0}(D^p), \quad p = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Если дополнительно выполнено условие теоремы 2 и функция $\tilde{f}$ *принадлежит* C^{μ}_{+0}, *то и* $\tilde{\phi}^p$ *принадлежит* $C^{\mu}_{+0}(D^p)$.

Проверка условия $\det(V+B) \neq 0$, а также условия относительно обратной матрицы $(V+B)^{-1}$ в теореме 2 упрощается, если матрица $V+B$ имеет определенную блочно-диагональную структуру.

Условимся говорить, что некоторая $2m\times 2m$-матрица $x = (x_{kr})_1^{2m}$ блочно-диагональна относительно некоторого разбиения $E = (E_i)_1^n$ множества концевых дуг, если ее элементы x_{kr} равны нулю при $\Gamma_{(k)} \in E_i$, $\Gamma_{(r)} \in E_j$, $i \neq j$. Умножение таких матриц сводится к блочному умножению их диагональных блоков $x(E_i) = \{x_{kr}, \Gamma_{(k)}, \Gamma_{(r)} \in E_i\}$.

Соответственно $\det x = \Pi_i \det x(E_i)$ и при $\det x \neq 0$ обратная матрица x^{-1} имеет ту же блочно-диагональную структуру с диагональными блоками $x^{-1}(E_i) = [x(E_i)]^{-1}$.

Применительно к определениям (8) и (9) можем заключить, что матрица V блочно-диагональна относительно разбиения G множества концевых дуг на пары $G^p(\tau) = \{\partial^{\pm}S^p(\tau)\}$ с диагональными блоками

$$V[\zeta, G^p(\tau)] = e^{i\theta\zeta}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где θ – раствор сектора $S^p(\tau)$.

Аналогично матрица B блочно-диагональна относительно разбиения на два множества $I^0 = \{\Gamma_i^{(0)},\ 1 \le i \le 6\}$, $I^1 = \{\Gamma_i^{(1)},\ 1 \le i \le m\}$:

$$B(I^0) = \overline{b(0)}, \quad B(I^1) = b(1).$$

Предположим, что $m\times m$-матрица a задачи (6) блочно-диагональна относительно некоторого разбиения $O_1, \ldots, O_k$ множества дуг $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$. Другими словами, $a_{ij} = 0$, если $\Gamma_i \in O_p$, $\Gamma_j \in O_q$ и $p \neq q$.

Рассмотрим разбиение $\widehat{O}$ множества концевых дуг на $2k$ элементов $O_p^r = \{\Gamma_j^{(r)}, \Gamma_j \in O_p\}$, $r = 0, 1$, $1 \le p \le s$. Очевидно матрица B блочно-диагональна относительно этого разбиения. Следовательно, если каждый элемент разбиения E составлен из целых элементов как разбиения G, так и разбиения $\hat{O}$, то матрица $V+B$ будет блочно-диагональна относительно разбиения E. При этом для приращения аргумента в формуле индекса (10) имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(V+B)(\zeta)}{\det(V+1)(\zeta)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(V+B)(\zeta,E_k)}{\det(v+1)(\zeta,E_k)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}. \tag{13}$$

3. Задача D. Пусть дуги $\Gamma_0 = \Gamma_0^p$ и Γ_1^p, $1 \le p \le 3$, составляющие граничный контур ∂D^p области D^p, принадлежат классу $C^{1,\mu+0}$ и ориентированы положительно по отношению к D^p. Занумеруем эти дуги следующим единым образом:

$$(\Gamma_0^1, \Gamma_0^2, \Gamma_0^3, \Gamma_1^1, \Gamma_1^2, \Gamma_1^3) = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_6).$$

Тогда для боковых сторон трех секторов $S^p(\tau_1)$ и $S^p(\tau_2)$ будем иметь соответственно выражения

$$\partial^+S^p(\tau_1) = \Gamma_p^{(0)}, \quad 1 \le p \le 3,$$

$$\partial^-S^1(\tau_1) = \Gamma_4^{(1)}, \quad \partial^-S^2(\tau_1) = \Gamma_5^{(1)}, \quad \partial^-S^3(\tau_1) = \Gamma_6^{(1)},$$

и

$$\partial^-S^p(\tau_2) = \Gamma_p^{(1)}, \quad 1 \le p \le 3,$$

$$\partial^+S^1(\tau_2) = \Gamma_4^{(0)}, \quad \partial^+S^2(\tau_2) = \Gamma_5^{(0)}, \quad \partial^+S^3(\tau_2) = \Gamma_6^{(0)}.$$

В принятой нумерации задачу D с краевыми условиями (3), (4_D) запишем в форме (6) с 6×6-матрицей
$$a = \mathrm{diag}(a_1, a_2), \tag{14}$$
где
$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -i & -i \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шестикомпонентный вектор f правой части (6) в рассматриваемом случае связан с правой частью краевых условий (3), (4_D) соотношениями
$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = C, \quad f_4 = g^1 \circ \gamma_4, \quad f_5 = g^2 \circ \gamma_5, \quad f_6 = g^3 \circ \gamma_6.$$

Соответственно матрица b из (7) имеет вид
$$b = a^{-1}\overline{a} = \mathrm{diag}(c_1, c_2), \tag{15}$$
где
$$c_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае матрица b блочно-диагональна относительно разбиения $\widehat{O}$ множества $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_6\}$ с элементами $O_1 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$, $O_2 = \{\Gamma_4\}$, $O_3 = \{\Gamma_5\}$, $O_4 = \{\Gamma_6\}$. Следовательно, каждое из разбиений G и $\widehat{O}$ будет измельчением разбиения E на два элемента
$$E_j = G^1(\tau_j) \cup G^2(\tau_j) \cup G^3(\tau_j), \quad j = 1, 2,$$
отвечающие концам τ_j дуги Γ_0. Напомним, что боковые стороны сектора $S^p(\tau_j)$ образуют элемент $G^p(\tau_j)$ разбиения G.

Выберем единую нумерацию концевых дуг, составляющих множество E_j, при которой сначала нумеруются в порядке возрастания p концевые дуги на Γ_0^p, а затем – на Γ_1^p. В явном виде имеем упорядоченные множества
$$\begin{aligned} E_1 &= \{\Gamma_1^{(0)}, \Gamma_2^{(0)}, \Gamma_3^{(0)}, \Gamma_4^{(1)}, \Gamma_5^{(1)}, \Gamma_6^{(1)}\} = \{\Gamma_{(1)}, \ldots, \Gamma_{(6)}\}, \\ E_2 &= \{\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \Gamma_3^{(1)}, \Gamma_4^{(0)}, \Gamma_5^{(0)}, \Gamma_6^{(0)}\} = \{\Gamma_{(7)}, \ldots, \Gamma_{(12)}\}. \end{aligned} \tag{16}$$

В этих обозначениях для диагональных блоков $(V+B)(\zeta, E_j)$, $j = 1, 2$, концевого символа $V + B$ задачи D имеем следующее выражение:
$$(V+B)(\zeta, E_j) = \begin{pmatrix} c_1 & v_j(\zeta) \\ v_j(\zeta) & 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \tag{17}$$

Здесь матрица c_1 определяется равенством из (15), а $v_j(\zeta)$, $j = 1, 2$, представляют собой диагональные матрицы
$$v_j(\zeta) = \mathrm{diag}[e^{i\theta_1(\tau_j)\zeta}, e^{i\theta_2(\tau_j)\zeta}, e^{i\theta_3(\tau_j)\zeta}], \tag{18}$$
где $\theta_p(\tau_j)$ – раствор сектора $S^p(\tau_j)$.

Из (17) следует, что
$$\det(V+B)(\zeta, E_j) = \det[c_1 - v_j^2(\zeta)], \tag{19}$$
$$(V+B)^{-1}(\zeta, E_j) = \begin{pmatrix} (c_1 - v_j^2)^{-1} & -(c_1 - v_j^2)^{-1} v_j \\ -v_j (c_1 - v_j^2)^{-1} & v_j (c_1 - v_j^2)^{-1} v_j + 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичными вычислениями получаем равенства

$$\det(V+1)(\zeta,E_j)=\det[1-v_j^2(\zeta)]=(1-e^{2i\theta_1(\tau_j)\zeta})(1-e^{2i\theta_2(\tau_j)\zeta})(1-e^{2i\theta_3(\tau_j)\zeta}), \tag{20}$$

$$(V+1)^{-1}(\zeta,E_j)=\begin{pmatrix}(1-v_j^2)^{-1} & -(1-v_j^2)^{-1}v_j\\ -v_j(1-v_j^2)^{-1} & v_j(1-v_j^2)^{-1}v_j+1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим поведение на мнимой оси матрицы-функции $(V+B)(\zeta,E_j)$.

Лемма 1. *a) Функция* $\det(V+B)(\zeta,E_j)$ *на мнимой оси имеет единственный нуль в точке* $\zeta=0$ *и его порядок равен двум;*

b) матрица-функция $(V+B)^{-1}(\zeta,E_j)$ *имеет в точке* $\zeta=0$ *полюс первого порядка;*

c) справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(V+B)(\zeta,E_j)}{\det(V+1)(\zeta,E_j)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}=\frac{1}{2}. \tag{21}$$

Доказательство достаточно провести для $j=1$, рассуждения для $j=2$ совершенно аналогичны.

a) Из (19) следует, что порядок полюса функции $\det(V+B)(\zeta,E_1)$ совпадает с порядком полюса матрицы $(c_1-v_1^2)(\zeta)$. Обозначая $t_k=e^{2i\theta_k\zeta}$, $k=1,2,3$, и используя (15), матрицу $c_1-v_1^2$ запишем в виде

$$c_1-v_1^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-3t_1 & -2 & -2\\ -2 & 1-3t_2 & -2\\ -2 & -2 & 1-3t_3\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Заметим, что для $\operatorname{Re}\zeta=0$ все величины t_k положительны, причем $\operatorname{sgn}(t_k-1)$ не зависит от k. Для определителя $f(t)=\det(c_1-v_1^2)$ этой матрицы имеем равенство

$$3f(t)=-3(t_1t_2t_3+1)+(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)+(t_1+t_2+t_3). \tag{23}$$

Очевидно, $f(t)=0$ при $t_1=t_2=t_3=1$ и

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{f(t)}{t_1t_2t_3},\quad \frac{1}{t}=\left(\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_2},\frac{1}{t_3}\right). \tag{24}$$

Для доказательства первого утверждения в а) достаточно убедиться в том, что в кубе $K=\{0<t_k<1,\ k=1,2,3\}$ функция $f(t)$ нигде не обращается в нуль. На границе этого куба функция $f(t)$ неположительна и обращается в нуль только в точке $t=(1,1,1)$. Легко проверить, что $\operatorname{grad}f(t)\neq0$, $t\in K$, поэтому $f(t)<0$ во всем кубе K.

Определим порядок нуля функции $\det(V+B)(\zeta,E_1)$ в точке $\zeta=0$. Согласно (23), имеем

$$3[\det(V+B)]'(0,E_1)=i[-3(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3)+4(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+2(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]=0,$$

$$3[\det(V+B)]''(0,E_1)=4[(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)+4(\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_1\theta_3)-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]\neq0.$$

Поэтому функция $\det(V+B)(\zeta,E_j)$, $j=1,2$, в точке $\zeta=0$ имеет нуль второго порядка.

b) Из (19) видно, что порядки полюсов матриц $(V+B)^{-1}(\zeta,E_1)$ и $(c_1-v_1^2)^{-1}(\zeta)$ совпадают. Запишем равенство (22) в виде

$$3(c_1-v_1^2)=\begin{pmatrix}d_1 & -2 & -2\\ -2 & d_2 & -2\\ -2 & -2 & d_3\end{pmatrix},\quad d_k=1-3t_k.$$

Тогда

$$(c_1 - v_1^2)^{-1} = \frac{3}{\det(c - v_1^2)} \begin{pmatrix} d_2 d_3 - 4 & 2(d_3+2) & 2(d_2+2) \\ 2(d_3+2) & d_1 d_3 - 4 & 2(d_1+2) \\ 2(d_2+2) & 2(d_1+2) & d_1 d_2 - 4 \end{pmatrix}.$$

При $\zeta = 0$, т.е. при $d_1 = d_2 = d_3 = -2$, все элементы матрицы в правой части последнего равенства обращаются в нуль. Поскольку функция $\det(V+B)(\zeta, E_1)$ имеет нуль второго порядка в точке $\zeta = 0$, матрица $(V+B)^{-1}(\zeta, E_1)$ и соответственно матрица $(V+B)^{-1}(\zeta, E_2)$ имеют в этой точке полюс первого порядка.

c) Согласно (20), в принятых обозначениях

$$\det(V+1)(\zeta, E_1) = (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3).$$

Таким образом, функцию

$$x(\zeta) = \frac{\det(V+B)(\zeta, E_1)}{\det(V+1)(\zeta, E_1)}$$

можем записать в виде отношения функций $f(t)$ и $g(t) = (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)$, где $t = (t_1, t_2, t_3)$ и $t_k = e^{2i\theta_k \zeta}$.

Заметим, что функция $x(\zeta)$ нечетна, так что

$$\frac{1}{2\pi i} \ln x(\zeta)\Big|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = -\frac{1}{2\pi i} \ln x(\zeta)\Big|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}.$$

С другой стороны, по принципу аргумента для аналитических функций имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \ln x(\zeta)\Big|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} - \frac{1}{2\pi i} \ln x(\zeta)\Big|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = m,$$

где m означает разность между числом нулей и числом полюсов функции $x(\zeta)$ в полосе $-\alpha < \operatorname{Re}\zeta < \alpha$, считая кратности. Из этих двух равенств следует, что левая часть равенства (21) равна $-m/2$.

Очевидно, функция $\det(V+1)(\zeta, E_1)$ имеет в этой полосе единственный нуль в точке $\zeta = 0$ кратности три. На основании утверждения a) отсюда заключаем, что $m = -1$, что завершает доказательство равенства (21) и леммы.

Теорема 4. *Пусть все дуги Γ_j принадлежат классу $C^{1,\mu+0}$. Тогда решения однородной задачи (6), (14) состоят из постоянных функций, а неоднородная задача безусловно разрешима в классе C^{μ}_{-0}. При этом имеют место утверждения теорем 2 и 3.*

Доказательство. Из теоремы 1 и леммы 1c) следует, что индекс рассматриваемой задачи равен

$$\varkappa = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 3 = 2. \tag{25}$$

Из леммы 1b) следует, что матрица-функция $\zeta(V+B)^{-1}(\zeta, E_j)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Таким образом, условия теорем 2 и 3 применительно к рассматриваемой задаче выполнены. В частности, любое решение $\phi \in C^{\mu}_{-0}$ однородной задачи принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}$.

Убедимся в том, что пространство решений однородной задачи состоит из констант и, следовательно, имеет размерность два. Отсюда с учетом равенства (25) будет следовать и безусловная разрешимость неоднородной задачи.

Пусть $\phi = (\phi^p)_1^3$ – решение однородной задачи (6), (14) в классе C^{μ}_{-0}. Тогда, как отмечено выше, функция ϕ^p непрерывна в замкнутой области $\overline{D^p}$. Следовательно, гармонические функции $u^p \in C(\overline{D^p})$ являются решением однородной задачи (1), (2_{D}), т.е. удовлетворяют однородным краевым условиям

$$u^1 = u^2 = u^3, \quad \frac{\partial u^1}{\partial n} + \frac{\partial u^2}{\partial n} + \frac{\partial u^3}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{26}$$

$$u^p|_{\Gamma_1^p} = 0, \quad 1 \le p \le 3. \tag{27$_\text{D}$}$$

Предположим, что одна из этих гармонических функций отлична от нуля. В силу (26), (27$_\text{D}$) максимальное значение каждой из функций $|u^p|$ может достигаться только в некоторой общей внутренней точке c дуги Γ_0. Но тогда по теореме Заремба–Жиро нормальные производные $\partial u^p/\partial n$ в этой точке имеют один и тот же знак и по крайней мере одна из них отлична от нуля. Но это противоречит второму равенству в (26).

Итак, все функции $u^p = \operatorname{Re}\phi^p$ равны нулю, так что функции ϕ^p состоят из мнимых констант.

4. Задача N рассматривается аналогично предыдущей. В этом случае в (14) и (15) следует положить

$$a_2 = \operatorname{diag}(-i, -i, i), \tag{28}$$

и

$$c_2 = \operatorname{diag}(-1, -1, -1).$$

Тогда (17) и (19) примут вид

$$(V+B)(\zeta, E_j) = \begin{pmatrix} c_1 & v_j(\zeta) \\ v_j(\zeta) & -1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

$$\det(V+B)(\zeta, E_j) = -\det[c_1 + v_j^2(\zeta)], \tag{29}$$

$$(V+B)^{-1}(\zeta, E_j) = \begin{pmatrix} (c_1+v_j^2)^{-1} & (c_1+v_j^2)^{-1}v_j \\ v_j(c_1+v_j^2)^{-1} & v_j(c_1+v_j^2)^{-1}v_j - 1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно аналог леммы 1 составляют следующие утверждения.

Лемма 2. *a) Функция* $\det(V+B)(\zeta, E_j)$ *на мнимой оси имеет единственный нуль в точке* $\zeta = 0$ *первого порядка;*

b) матрица-функция $(V+B)^{-1}(\zeta, E_j)$ *имеет в точке* $\zeta = 0$ *полюс первого порядка;*

c) имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(V+B)(\zeta, E_j)}{\det(V+1)(\zeta, E_j)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = 1. \tag{30}$$

Доказательство с небольшими изменениями осуществляется аналогично лемме 1.

a) Обозначая $t_k = e^{2i\theta_k\zeta}$ и используя (14), (15), (28), получаем

$$c_1 + \operatorname{diag}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+3t_1 & -2 & -2 \\ -2 & 1+3t_2 & -2 \\ -2 & -2 & 1+3t_3 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Для определителя последней матрицы, который обозначим через $f(t)$, $t = (t_1, t_2, t_3)$, имеем

$$27f(t) = (1+3t_1)(1+3t_2)(1+3t_3) - 16 - 4[3 + 3(t_1+t_2+t_3)]$$

или

$$3f(t) = 3(t_1t_2t_3 - 1) + t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 - (t_1+t_2+t_3). \tag{32}$$

Таким образом,

$$\det(V+B)(\zeta, E_1) = -f(t), \quad t_k = e^{2i\theta_k\zeta}. \tag{33}$$

На прямой $\operatorname{Re}\zeta = 0$ все величины $t_k = e^{2i\theta_k\zeta}$ вещественны и положительны, причем одновременно либо меньше единицы, либо больше единицы, либо равны единице. Из (32) видно, что при $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ функция $f(t)$ обращается в нуль и справедливо соотношение

$$f(1/t) = -(t_1t_2t_3)^{-1}f(t), \quad 1/t = (1/t_1, 1/t_2, 1/t_3). \tag{34}$$

Проведя рассуждения, аналогичные лемме 1, заключаем, что функция $f(t)$ отрицательна во всем кубе $K=\{0<t_k<1,\ k=1,2,3\}$ и обращается в нуль только в точке $t=(1,1,1)$, т.е. при $\zeta=0$.

Остается определить порядок нуля функции $\det(V+B)(\zeta,E_1)$ в точке $\zeta=0$. Согласно равенству (32), имеем

$$3[\det(V+B)]'(0,E_1)=2i[3(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+2(\theta_1+\theta_2+\theta_3)-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]\neq 0.$$

Следовательно, функция $\det(V+B)(\zeta,E_1)$ и соответственно функция $\det(V+B)(\zeta,E_2)$ в точке $\zeta=0$ имеют нуль первого порядка.

b) Из (29) видно, что порядок полюса матрицы $(V+B)^{-1}(\zeta,E_1)$ равен порядку полюса матрицы $(c_1+v_1^2)(\zeta)$. Как и в п. в) леммы 1, вводя обозначения $d_k=1+3t_k$, получаем равенство

$$(c_1+v_1^2)^{-1}=\frac{3}{\det(c_1+v_1^2)}\begin{pmatrix} d_2d_3-4 & 2(d_3+2) & 2(d_2+2)\\ 2(d_3+2) & d_1d_3-4 & 2(d_1+2)\\ 2(d_2+2) & 2(d_1+2) & d_1d_2-4\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что элементы матрицы в правой части равенства не равны нулю при любом значении ζ. Учитывая, что функция $\det(V+B)(\zeta,E_j)$, $j=1,2$, имеет нуль первого порядка в точке $\zeta=0$, то матрица $(V+B)^{-1}(\zeta,E_j)$ имеет в этой точке полюс первого порядка.

c) Доказательство этого утверждения с учетом a) осуществляется совершенно аналогично лемме 1c).

Теорема 5. *Пусть все дуги Γ_j принадлежат классу $C^{1,\mu+0}$. Тогда решения однородной задачи (6), (28) состоят из постоянных функций, а неоднородная задача безусловно разрешима в классе C^{μ}_{-0}. При этом имеют место утверждения теорем 2 и 3.*

Доказательство. Из теоремы 1 и леммы 2c) следует, что индекс рассматриваемой задачи равен

$$\varkappa=-1-1+3=1. \tag{35}$$

Из леммы 2b) следует, что матрица-функция $\zeta(V+B)^{-1}(\zeta,E_j)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Таким образом, условия теорем 2 и 3 применительно к рассматриваемой задаче выполнены. В частности, любое решение $\phi\in C^{\mu}_{-0}$ однородной задачи принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}$.

Убедимся в том, что пространство решений однородной задачи состоит из констант и, следовательно, имеет размерность единица. Отсюда с учетом равенства (35) будет следовать и безусловная разрешимость неоднородной задачи.

Пусть $\phi=(\phi^p)_1^3$ – решение однородной задачи (6), (28) в классе C^{μ}_{-0}. Тогда в силу теоремы 3

$$\tilde{\phi}^p(z)=(z-\tau_1)(z-\tau_2)(\phi^p)'(z)\in C^{\mu}_{+0}(D^p),\quad p=1,2,3.$$

Поэтому функция $|(\phi^p)'(z)|$ интегрируема с квадратом в области D^p и к гармонической функции $u^p=\operatorname{Re}\phi^p$ можем применить формулу Грина

$$\int\limits_{D^p}\left[\left(\frac{\partial u^p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^p}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\int\limits_{\partial D^p}u^p\,\frac{\partial u^p}{\partial n}\,ds,\quad 1\le p\le 3.$$

В силу однородных условий на дуге Γ_1^p последний интеграл равен

$$\int\limits_{\partial D^p}u^p\,\frac{\partial u^p}{\partial n}\,ds=\int\limits_{\Gamma_0}u^p\,\frac{\partial u^p}{\partial n}\,ds.$$

Из однородных условий на дуге Γ_0 следует, что сумма этих интегралов по $1\le p\le 3$ равна нулю. Следовательно,

$$\sum_{p=1}^{3}\int\limits_{D^p}\left[\left(\frac{\partial u^p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^p}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=0,$$

так что каждая из функций u^p постоянна в области D^p.

Поскольку в силу краевого условия на Γ_1^p мнимые части функций ϕ^p равны нулю, пространство решений однородной задачи действительно состоит из констант и одномерно.

5. Задача DN. Пусть, как и выше, дуги $\Gamma_0=\Gamma_0^p$ и дуги Γ_1^p, Γ_2^p, составляющие кривую Γ_+^p, $1\le p\le 3$, граничного контура ∂D^p области D^p, принадлежат классу $C^{1,\mu+0}$ и ориентированы положительно по отношению к D^p. Занумеруем эти дуги следующим единым образом: $(\Gamma_0^1,\Gamma_0^2,\Gamma_0^3,\Gamma_1^1,\Gamma_1^2,\Gamma_1^3,\Gamma_2^1,\Gamma_2^2,\Gamma_2^3)=(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_9)$. Тогда для боковых сторон шести секторов $S^p(\tau_1)$ и $S^p(\tau_2)$ будем иметь соответственно выражения

$$\partial^+S^p(\tau_1)=\Gamma_p^{(0)},\quad 1\le p\le 3,$$

$$\partial^-S^1(\tau_1)=\Gamma_4^{(1)},\quad \partial^-S^2(\tau_1)=\Gamma_5^{(1)},\quad \partial^-S^3(\tau_1)=\Gamma_6^{(1)},$$

$$\partial^-S^p(\tau_2)=\Gamma_p^{(1)},\quad 1\le p\le 3,$$

$$\partial^+S^1(\tau_2)=\Gamma_7^{(0)},\quad \partial^+S^2(\tau_2)=\Gamma_8^{(0)},\quad \partial^+S^3(\tau_2)=\Gamma_9^{(0)},$$

а боковые стороны трех секторов $S^p(\tau^p)$ определяются равенствами

$$\partial^+S^1(\tau^1)=\Gamma_4^{(0)},\quad \partial^-S^1(\tau^1)=\Gamma_7^{(1)},$$

$$\partial^+S^2(\tau^2)=\Gamma_5^{(0)},\quad \partial^-S^2(\tau^2)=\Gamma_8^{(1)},$$

$$\partial^+S^3(\tau^3)=\Gamma_6^{(0)},\quad \partial^-S^3(\tau^3)=\Gamma_9^{(1)}.$$

В принятой нумерации задачу DN с краевыми условиями (3), (4_{DN}) запишем в виде (6) с 9×9-матрицей

$$a=\operatorname{diag}(a_1,a_2,a_3), \tag{36}$$

в которой матрицы a_1, a_2 такие, как в (14), а $a_3=\operatorname{diag}(-i,-i,-i)$, и вектор f в правой части равенства (6) имеет вид

$$f_1=f_2=0,\quad f_3=C,\quad f_j=h^p\circ\gamma_j,\quad j\ge 4.$$

Матрица b, согласно (7), имеет вид

$$b=a^{-1}\overline{a}=\operatorname{diag}(c,c_1,c_2)\in\mathbb{C}^{9\times 9}; \tag{37}$$

здесь матрицы c и c_1 совпадают с матрицами c_1 и c_2 соответственно из (15), а

$$c_2=\operatorname{diag}(-1,-1,-1).$$

Матрица b блочно-диагональна относительно разбиения $\widehat{O}$ множества $\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_9\}$ на элементы $O_1=\{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3\}$, $O_2=\{\Gamma_4\}$, $O_3=\{\Gamma_5\}$, $O_4=\{\Gamma_6\}$, $O_5=\{\Gamma_7\}$, $O_6=\{\Gamma_8\}$, $O_7=\{\Gamma_9\}$. Матрица V блочно-диагональна относительно разбиения множества концевых дуг на пары $G^p(\tau)=\{\partial^\pm S^p(\tau)\}$, $\tau\in F^p$.

Составим разбиение E следующим образом:

$$E_1=G^1(\tau_1)\cup G^2(\tau_1)\cup G^3(\tau_1),\quad E_2=G^1(\tau_2)\cup G^2(\tau_2)\cup G^3(\tau_2),$$

$$E^1=G^1(\tau^1),\quad E^2=G^2(\tau^2),\quad E^3=G^3(\tau^3).$$

Оно состоит из целых элементов разбиений G и $\widehat{O}$. Следовательно, матрицы V и B блочно-диагональные относительно этого разбиения, а значит, этим свойством обладает и их сумма $(V+B)(\zeta,E_j)$. Выберем единую нумерацию концевых дуг следующим образом:

$$E_1=\{\Gamma_1^{(0)},\Gamma_2^{(0)},\Gamma_3^{(0)},\Gamma_4^{(1)},\Gamma_5^{(1)},\Gamma_6^{(1)}\}=\{\Gamma_{(1)},\Gamma_{(2)},\Gamma_{(3)},\Gamma_{(4)},\Gamma_{(5)},\Gamma_{(6)}\},$$

$$E_2 = \{\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \Gamma_3^{(1)}, \Gamma_7^{(0)}, \Gamma_8^{(0)}, \Gamma_9^{(0)}\} = \{\Gamma_{(7)}, \Gamma_{(8)}, \Gamma_{(9)}, \Gamma_{(10)}, \Gamma_{(11)}, \Gamma_{(12)}\},$$

$$E^1 = \{\Gamma_4^{(0)}, \Gamma_7^{(1)}\} = \{\Gamma_{(13)}, \Gamma_{(14)}\},$$

$$E^2 = \{\Gamma_5^{(0)}, \Gamma_8^{(1)}\} = \{\Gamma_{(15)}, \Gamma_{(16)}\},$$

$$E^3 = \{\Gamma_6^{(0)}, \Gamma_9^{(1)}\} = \{\Gamma_{(17)}, \Gamma_{(18)}\}.$$

Тогда диагональные блоки матриц V и B имеют следующий вид:

$$V(\zeta, E_j) = \begin{pmatrix} 0 & v_j(\zeta) \\ v_j(\zeta) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}, \quad v_j(\zeta) = \operatorname{diag}[e^{i\theta_1(\tau_j)\zeta}, e^{i\theta_2(\tau_j)\zeta}, e^{i\theta_3(\tau_j)\zeta}],$$

где $\theta_p(\tau_j)$ – раствор сектора $S^p(\tau_j)$,

$$B(\zeta, E_j) = \operatorname{diag}(c, (-1)^j) \in \mathbb{C}^{6\times 6}, \quad j = 1, 2,$$

где c находится из (40) (см. ниже). Остальные 2×2-диагональные блоки определяются равенствами

$$V(\zeta, E^j) = e^{i\theta_j(\tau^j)\zeta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(E^j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad 1 \le j \le 3.$$

Из теоремы 1 следует, что для разрешимости задачи DN в классе C^{μ}_{-0} достаточно исследовать нули определителя $\det(V+B)(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta = 0$ и порядок полюса в точке $\zeta = 0$ обратной матрицы-функции $(V+B)^{-1}(\zeta)$. Как отмечено выше, это достаточно сделать для диагональных блоков соответствующих матриц.

Очевидно,

$$\det(V+B)(\zeta, E^j) = -(1 + e^{2i\theta_j(\tau^j)\zeta}), \quad 1 \le j \le 3,$$
$$(V+B)^{-1}(\zeta, E^j) = [\det(V+B)(\zeta, E^j)]^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -e^{i\theta_j(\tau^j)\zeta} \\ -e^{i\theta_j(\tau^j)\zeta} & 1 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$\det(V+B)(\zeta, E_1) = -\det[c + v_1^2(\zeta)], \quad \det(V+B)(\zeta, E_2) = \det[c - v_2^2(\zeta)], \tag{39}$$

$$(V+B)^{-1}(\zeta, E_1) = \begin{pmatrix} (c+v_1^2)^{-1} & (c+v_1^2)^{-1}v_1 \\ v_1(c+v_1^2)^{-1} & v_1(c+v_1^2)^{-1}v_1 - 1 \end{pmatrix},$$
$$(V+B)^{-1}(\zeta, E_2) = \begin{pmatrix} (c-v_2^2)^{-1} & -(c-v_2^2)^{-1}v_2 \\ -v_2(c-v_2^2)^{-1} & v_2(c-v_2^2)^{-1}v_2 + 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

С помощью аналогичных вычислений имеем

$$\det(v+1)(\zeta, E^j) = 1 - e^{2i\theta_j(\tau^j)\zeta}, \quad 1 \le j \le 3, \tag{41}$$

$$(V+1)^{-1}(\zeta, E^j) = [\det(v+1)(\zeta, E^j)]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -e^{i\theta_j(\tau^j)\zeta} \\ -e^{i\theta_j(\tau^j)\zeta} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(V+1)(\zeta, E_j) = \det[1 - v_j^2(\zeta)] = (1 - e^{2i\theta_1(\tau_j)\zeta})(1 - e^{2i\theta_2(\tau_j)\zeta})(1 - e^{2i\theta_3(\tau_j)\zeta}), \tag{42}$$

$$(V+1)^{-1}(\zeta, E_j) = \begin{pmatrix} (1-v_j^2)^{-1} & -(1-v_j^2)^{-1}v_j \\ -v_j(1-v_j^2)^{-1} & v_j(1-v_j^2)^{-1}v_j + 1 \end{pmatrix}.$$

В силу (38) $\det(V+B)(\zeta, E^j) \ne 0$, $\operatorname{Re}\zeta = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть поведение на мнимой оси функции $(V+B)(\zeta, E_j)(\zeta)$.

Лемма 3. *a) Функция* $\det(V+B)(\zeta, E_j)$, $j=1,2$, *на мнимой оси не имеет нулей, отличных от* $\zeta=0$, *а в точке* $\zeta=0$ *имеет нуль* j*-го порядка;*

b) матрица-функция $(V+B)^{-1}(\zeta, E_j)$ *в точке* $\zeta=0$ *имеет полюс первого порядка для обоих значений* j;

c) имеют место следующие равенства:

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(V+B)(\zeta,E_j)}{\det(V+1)(\zeta,E_j)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = \begin{cases}1, & j=1,\\ 1/2, & j=2,\end{cases} \tag{43}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(V+B)(\zeta,E^j)}{\det(V+1)(\zeta,E^j)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = \frac{1}{2}. \tag{44}$$

Доказательство. a) Согласно (39), утверждение леммы достаточно установить для матриц $(c+v_1^2)$ и $(c-v_2^2)$. Покажем сначала справедливость леммы для первой матрицы. Обозначая $t_k = e^{2i\theta_k\zeta}$, $1\le k\le 3$, и учитывая (39), матрицу $(c+v_1^2)$ запишем в виде

$$c+\operatorname{diag}(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+3t_1 & -2 & -2\\ -2 & 1+3t_2 & -2\\ -2 & -2 & 1+3t_3\end{pmatrix}.$$

По лемме 2a) функция $\det(V+B)(\zeta,E_1)$ на мнимой оси не имеет нулей, отличных от $\zeta=0$, а в точке $\zeta=0$ имеет нуль первого порядка.

В силу (39) матрица $(c-v_2^2)$ имеет вид

$$c-\operatorname{diag}(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-3t_1 & -2 & -2\\ -2 & 1-3t_2 & -2\\ -2 & -2 & 1-3t_3\end{pmatrix},$$

где $t_k = e^{2i\theta_k\zeta}$, $1\le k\le 3$. Согласно лемме 1a), функция $\det(V+B)(\zeta,E_2)$ на мнимой оси не имеет нулей, отличных от $\zeta=0$, а в точке $\zeta=0$ имеет нуль второго порядка. Тем самым утверждение a) полностью доказано.

b) Из (40) видно, что порядок полюса $(V+B)^{-1}(\zeta,E_j)$ совпадает с порядком полюса $[c-(-1)^j v_j^2]^{-1}$. Для $j=1$ справедливость утверждения следует из леммы 2b), а для $j=2$ – из леммы 1b).

c) Покажем справедливость первого равенства. Определители в числителе задаются формулами (39), а определители в знаменателе вычисляются непосредственно в силу (42):

$$\det(V+1)(\zeta,E_j) = (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3), \quad t_k = e^{2i\theta_k(\tau_j)\zeta}, \quad k=1,2,3.$$

Обозначая $g(t)=(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)$ для $t=(t_1,t_2,t_3)$, получаем

$$x_1(\zeta) = \frac{\det(V+B)(\zeta,E_1)}{\det(V+1)(\zeta,E_1)} = -\frac{f(t)}{g(t)}, \quad x_2(\zeta) = \frac{\det(V+B)(\zeta,E_2)}{\det(V+1)(\zeta,E_2)} = \frac{f(-t)}{g(t)}.$$

Для этих функций справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\ln x_j(\zeta)|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = -\frac{1}{2\pi i}\ln x_j(\zeta)|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}.$$

По принципу аргумента для аналитических функций выполняется равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\ln x_j(\zeta)|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} - \frac{1}{2\pi i}\ln x_j(\zeta)|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = m_j,$$

где m_j означает разность между числом нулей и числом полюсов функции $x_j(\zeta)$ в полосе $-\alpha<\operatorname{Re}\zeta<\alpha$, считая кратности.

Очевидно, функция $\det(V+1)(\zeta, E_j)$ имеет в этой полосе единственный нуль в точке $\zeta = 0$ кратности 3. Из леммы 3а) следует, что $m_1 = -2$, $m_2 = -1$. В результате получаем равенство (43). В силу (38), (41) для второго равенства имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(V+B)(\zeta, E^j)}{\det(V+1)(\zeta, E^j)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{1+e^{2i\theta_j(\tau^j)\zeta}}{1-e^{2i\theta_j(\tau^j)\zeta}}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = -\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+z}{1-z}\Bigg|_0^\infty,$$

где приращение в последнем слагаемом берется вдоль луча $\arg z = -\varepsilon$ с малым $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что это приращение равно $-\pi i$, следовательно, равенство (44) справедливо. Таким образом, лемма полностью доказана.

Теорема 6. *Пусть все дуги Γ_j принадлежат классу $C^{1,\mu+0}$. Тогда задача DN однозначна разрешима в классе C^μ_{-0}. Если правая часть f принадлежит классу C^μ_{+0}, то ее решение ϕ принадлежит $C^\mu_{(+0)}$.*

Доказательство. Напомним, что индекс $\varkappa_0$ вычисляется по формуле (10). Подставляя полученные в лемме 3с) значения для обоих слагаемых, имеем $\varkappa_0 = -1 - 1/2 - 3/2 = -3$. На основании теоремы 1 заключаем, что индекс задачи DN равен нулю.

Вопрос о разрешимости задачи DN в классе $C^\mu_{(+0)}$ сводится к проверке выполнения условий теоремы 2. Из второго утверждения леммы 3 следует, что матрица-функция $\zeta(V+B)^{-1}(\zeta, E_j)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Таким образом, условия теоремы 2 применительно к рассматриваемой задаче выполнены.

Рассмотрим вопрос о единственности решения задачи DN. Пусть $\phi^p \in C^\mu_{-0}$ – решение однородной задачи. Тогда на основании теоремы 2 и последнего утверждения теоремы 3 функции ϕ^p обладают свойством (12) по отношению к классу C^μ_{+0}. Другими словами,

$$\tilde{\phi}^p(z) = (z-\tau_1)(z-\tau_2)(z-\tau^p)(\phi^p)'(z) \in C^\mu_{+0}(D^p), \quad p = 1, 2, 3.$$

Поэтому функция $|(\phi^p)'(z)|$ интегрируема с квадратом в области D^p и совершенно аналогично тому, как в доказательстве теоремы 5, показываем, что каждая из функций $u^p = \operatorname{Re}\phi^p$ постоянна в области D^p. На основании однородного условия на дуге Γ^p_0 в действительности все u^p равны нулю.

Таким образом, числа k и k' в теореме 1 для рассматриваемой задачи равны нулю, так что эта задача однозначно разрешима в классе C^μ_{-0}. На основании теоремы 2 это верно и по отношению к классу $C^\mu_{(+0)}$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00299) и Государственного фонда естественных наук Китая (проект 08-01-92208-ГФЕН).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004.
2. *Солдатов А.П.* Метод теории функций в эллиптических краевых задачах на плоскости. II. Кусочно-гладкий случай // Изв. АН СССР. 1992. Т. 56. № 3. С. 566–604.
3. *Солдатов А.П.* Обобщенная задача Римана на римановой поверхности // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 6. С. 735–738.

Белгородский государственный университет

Поступила в редакцию
03.06.2008 г.