ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2007, том 43, № 4, с. 488–491

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

ПРОСТРАНСТВО ХАРДИ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ БЕЛЬТРАМИ

© 2007 г. О. В. Ващенко, А. П. Солдатов

Рассмотрим на плоскости систему первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\,\frac{\partial \phi}{\partial x} = F, \tag{1}$$

где матрица $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$ постоянная и ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\nu > 0$. В скалярном случае $l = 1$ уравнение (1) с, вообще говоря, непрерывным коэффициентом $J(z)$, $\operatorname{Im} J > 0$, называют уравнением Бельтрами [1, с. 72].

Матрица-функция

$$E(z) = \frac{1}{2\pi i}\, z_J^{-1} \tag{2}$$

(здесь и ниже принято матричное обозначение $z_J = x\cdot 1 + y\cdot J$ для $z = (x+yi) \in \mathbb{C}$) является фундаментальным решением обобщенной системы Бельтрами (1). Другими словами, для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(z)$ с компактным носителем интеграл

$$(TF)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}} (t-z)_J^{-1} F(t)\, dt_1\, dt_2 \tag{3}$$

определяет классическое решение уравнения (1).

В самом деле, функция TF непрерывно дифференцируема и ее производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial (TF)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}} t_J^{-1}\,\frac{\partial F}{\partial x}(z+t)\, dt_1\, dt_2, \quad \frac{\partial (TF)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}} t_J^{-1}\,\frac{\partial F}{\partial y}(z+t)\, dt_1\, dt_2. \tag{4}$$

Рассмотрим двумерный сингулярный интеграл

$$(SF)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}} t_J^{-2} F(z+t)\, dt_1\, dt_2, \tag{5}$$

понимаемый как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $\{|t| \ge \varepsilon\}$. Поскольку

$$\int\limits_{|t|=1} t_J^{-2}\, ds_t = 0, \tag{6}$$

необходимое условие существования таких интегралов выполнено. В справедливости равенства (6) проще всего убедиться с помощью функции

$$\chi(\nu) = \int\limits_0^{2\pi} (\cos\theta + \nu\sin\theta)^{-2}\, d\theta,$$

аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\nu > 0$. С одной стороны, интеграл в левой части равенства (6) совпадает со значением $\chi(J)$ этой функции от матрицы J. С другой стороны, функция от матрицы χ и все ее производные обращаются в нуль в точке $\nu = i$, так что $\chi(J) = 0$. Запишем интеграл (3) как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $\{|t| \geq \varepsilon\}$ и проинтегрируем по частям под знаком предела. Тогда обычным образом получим равенства

$$\frac{\partial(TF)}{\partial x} = (SF)(z) + \sigma_1 F(z), \quad \frac{\partial(TF)}{\partial y} = J(SF)(z) + \sigma_2 F(z), \tag{7}$$

где коэффициенты $\sigma_k \in \mathbb{C}^{l\times l}$ определяются формулами

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} t_J^{-1} n_k \, ds_t, \quad k = 1, 2.$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ означает единичную внутреннюю нормаль к окружности $|t| = 1$, так что

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} (\cos\theta + J\sin\theta)^{-1} \cos\theta \, d\theta, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} (\cos\theta + J\sin\theta)^{-1} \sin\theta \, d\theta.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sigma_2 - J\sigma_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} (-\sin\theta + J\cos\theta)(\cos\theta + J\sin\theta)^{-1} \, d\theta = 1. \tag{8}$$

В самом деле, левая часть является значением от J аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im}\nu > 0$ функции

$$\chi_0(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{-\sin\theta + \nu\cos\theta}{\cos\theta + \nu\sin\theta} \, d\theta.$$

Простые вычисления показывают, что $\chi_0(i) = 1$, $\chi_0^{(k)}(i) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и, значит, $\chi_0(\nu) = 1$.

Объединяя равенства (7) и (8), убеждаемся в том, что функция TF действительно удовлетворяет уравнению (1).

Сингулярный оператор (5) принадлежит к типу Кальдерона–Зигмунда. Хорошо известно [2, с. 52], что он ограничен в пространстве $L^p(\mathbb{C})$, $p > 1$, причем для $F \in L^p$ интеграл существует для почти всех z. Отсюда с учетом равенств (7), (8) приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Пусть область $D \subseteq \mathbb{C}$ лежит в конечной части плоскости и $F \in L^p(D)$, $p > 1$. Тогда интеграл (3) определяет функцию TF из соболевского пространства $W^{1,p}(D)$, производные которой вычисляются по формулам (7). При этом справедлива оценка*

$$|TF|_{W^{1,p}(D)} \leq C|F|_{L^p(D)}, \tag{9}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от p и D.

Доказательство. Оценки

$$|(TF)_x|_{L^p} + |(TF)_y|_{L^p} \leq C|F|_{L^p}$$

составляют содержание теоремы Кальдерона–Зигмунда по отношению к сингулярному оператору S. Оценка $|TF|_{L^p(D)} \leq C|F|_{L^p(D)}$ для интеграла (3) легко выводится из неравенства Гёльдера. В совокупности эти оценки приводят к (9).

Пусть область D ограничена кусочно-гладким контуром Γ. Рассмотрим последовательность контуров $\Gamma_n \subseteq D$, $n = 1, 2, \ldots$, аппроксимирующих Γ в следующем смысле: для каждого n существует такое кусочно-непрерывное дифференцируемое гомеоморфное отображение $\alpha_n : \Gamma \to \Gamma_n$, что

$$|\alpha_n(t) - t|_{\mathbb{C}(\Gamma)} + |\alpha_n' - 1|_{\mathbb{C}(\Gamma)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{10}$$

В частности, если контур Γ_n ограничивает область D_n, то любой компакт $K \subseteq D$ содержится во всех D_n для достаточно больших n.

Пусть функция $\phi \in W^{1,p}_{\text{loc}}(D)$, т.е. она принадлежит классу $W^{1,p}$ в каждой области D_n, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда по теореме вложения [3] для каждого n справедлива оценка

$$|\phi|_{L^p(\Gamma_n)} \le C_n |\phi|_{W^{1,p}(D_n)}. \tag{11}$$

Введем следующее определение. Функция $\phi \in W^{1,p}_{\text{loc}}(D)$ принадлежит классу Харди $H^p_J(D)$, если

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} \in L^p(D) \tag{12}$$

и

$$\sup_n |\phi|_{L^p(\Gamma_n)} < \infty. \tag{13}$$

Заметим, что справедливо вложение

$$W^{1,p}(D) \subseteq H^p_J(D). \tag{14}$$

В самом деле, в этом случае норму в правой части оценки (11) можно брать в $W^{1,p}(D)$, поэтому нужно лишь убедиться в том, что постоянные C_n в этой оценке равномерно ограничены. С помощью условия (10) этот факт нетрудно получить из доказательства вложения $W^{1,p} \subseteq L^p(\Gamma)$, приведенного, например, в [3, с. 420].

Из (14) и теоремы 1 следует, что оператор T ограничен $L^p(D) \to H^p_J(D)$ и любая функция $\phi \in H^p$ представима в виде

$$\phi = TF + \phi_0, \tag{15}$$

где $F \in L^p(D)$, а ϕ_0 удовлетворяет однородному уравнению (1). Решения ϕ этого однородного уравнения (1) названы в [4] функциями, аналитическими по Дуглису или кратко J-аналитическими функциями.

Пример функций этого типа доставляют интегралы типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} (t - z)_J^{-1}\, dt_J\, \varphi(t), \quad z \in D, \tag{16}$$

где dt_J означает матричный дифференциал $dt_1 + J\, dt_2$, $t = t_1 + it_2 \in \Gamma$, и для определенности контур Γ ориентирован положительно по отношению к D (т.е. оставляют область D слева).

Как показано в [5], для вектор-функции $\varphi \in L^p(\Gamma)$ интеграл (16) определяет функцию $I\varphi \in H^p_J(D)$. Более точно, имеет место

Теорема 2. *a) Оператор I ограничен $L^p(D) \to H^p_J(D)$.*

b) Пусть $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $p > 1$. Тогда для интеграла существуют угловые предельные значения $\phi^+(t_0)$ почти для всех $t_0 \in \Gamma$ и справедлива формула Сохоцкого–Племеля

$$\phi^+(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} (t - t_0)_J^{-1}\, dt_J\, \varphi(t),$$

где интеграл справа сингулярный и понимается в смысле главного значения по Коши. При этом имеет место оценка $|\phi^+|_{L^p} \le C|\varphi|_{L^p}$.

Из теоремы 2, в частности, следует, что относительно нормы

$$|\phi| = |\phi_y - J\phi_x|_{L^p(D)} + \sup_n |\phi|_{L^p(\Gamma_n)} \tag{17}$$

пространство $H^p(D)$ банахово. С помощью теоремы 2 нетрудно также дать следующее эквивалентное описание пространства H^p.

Теорема 3. *В классе гладких в D функций норма (17) эквивалентна норме*

$$|\phi| = |\phi_y - J\phi_x|_{L^p(D)} + |\phi|_{L^p(\Gamma)}. \tag{18}$$

Доказательство. В силу разложения (15) эквивалентность норм (17) и (18) достаточно проверить для J-аналитических функций.

Обозначим через $C^{+0}(\overline{D})$ класс функций, непрерывных по Гёльдеру. Если J-аналитическая функция $\phi \in C^{+0}(\overline{D})$, то на основании теоремы 2, примененной к формуле Коши

$$2\phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t-z)_J^{-1}\,dt_J\,\phi(t),$$

приходим к оценке $|\phi|_{H^p(D)} \le C|\phi|_{L^p(\Gamma)}$. Обратно, пусть $\phi \in H^p(D)\cap C^{+0}(\overline{D})$. Тогда в силу (10) последовательность α_n равномерно сходится к ϕ на Γ, так что $|\phi|_{L^p(\Gamma)} \le C_1|\phi|_{H^p(D)}$. Тем самым требуемая эквивалентность норм установлена.

Из теоремы 3 и ее доказательства следует, что пространство $H^p(D)$ может быть получено замыканием класса $C^{1,+0}(\overline{D})$ по норме (18). В частности, каждой функции $\phi \in H^p$ можем поставить в соответствие ее предельное значение $\phi^+ \in L^p(\Gamma)$.

Разложение (16) можно дополнить следующим образом.

Теорема 4. *Пусть область D ограничена простым кусочно-ляпуновским контуром без точек возврата и матрица J треугольная. Тогда любая функция $\phi \in H^p(D)$ единственным образом представима в виде*

$$\phi = TF + I\varphi + i\xi, \tag{19}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^l$, $F = \phi_y - J\phi_x$ и вектор-функция $\varphi \in L^p(\Gamma)$ принимает действительные значения.

Доказательство. Заменяя ϕ на $\phi - T\phi$, не ограничивая общности, можно считать $F = 0$. В этом случае достаточно воспользоваться результатами работ [4, 6].

Работа выполнена при поддержке программы “Университеты России” (проект УР04.01.486).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. 2-е изд. М., 1988.
2. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1972.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1969.
4. *Солдатов А.П.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55. № 5. С. 1070–1100.
5. *Солдатов А.П., Александров А.В.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 3–8.
6. *Солдатов А.П.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1992. Т. 56. № 3. С. 566–604.

Белгородский государственный университет

Поступила в редакцию
04.04.2005 г.