ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2011, том 47, № 3, с. 366–375

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

© 2011 г. В. А. Полунин, А. П. Солдатов

На гладкой замкнутой поверхности рассматриваются интегралы типа Коши с ядром, зависящим от разности аргументов. Они охватывают как потенциалы двойного слоя для эллиптических уравнений второго порядка, так и обобщенные интегралы типа Коши для эллиптических систем первого порядка. Для функций, определяемых этими интегралами, найдены достаточные условия, обеспечивающие их непрерывную продолжимость на граничную поверхность. Получены соответствующие формулы для их предельных значений.

Пусть заданы конечная область $D \subseteq \mathbb{R}^3$, ограниченная гладкой поверхностью $\Gamma = \partial D$, и непрерывная функция $Q(x, y; \xi)$ переменных $x \in \overline{D}$, $y \in \Gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$, которая однородна степени -2 и нечетна по ξ, т.е. $Q(r\xi) = r^{-2}Q(\xi)$, $r > 0$, и $Q(-\xi) = -Q(\xi)$. Рассмотрим в области D интеграл

$$\phi(x) = \int\limits_{\Gamma} Q(x, y; y - x)\varphi(y)\, ds_y, \quad x \in D, \tag{1}$$

где ds_y означает элемент площади на Γ. Интегралы подобного типа возникают как потенциалы двойного слоя для эллиптических уравнений второго порядка [1, гл. II]. Например, для уравнения Лапласа потенциал двойного слоя

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n(y)}\left[\frac{1}{|y - x|}\right]\varphi(y)\, ds_y,$$

где $n(y)$, $y \in \Gamma$, – единичная внешняя нормаль, записывается в виде (1) с

$$Q(y, \xi) = [n_1(y)\xi_1 + n_2(y)\xi_2 + n_3(y)\xi_3]|\xi|^{-3}.$$

Другой пример доставляют интегралы типа Коши, отвечающие системе Моисила–Теодореску [2]

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \quad D(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix},$$

для четырехкомпонентной вектор-функции $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. Согласно [3, с. 243], функция

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} M[y - x, n(y)]\varphi(t)\, ds_t$$

с матричным ядром

$$Q(y, \xi) = M[\xi, n(y)], \quad M(\xi, \eta) = -D^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\frac{1}{|\xi|}D(\eta),$$

является решением этой системы.

В приведенных примерах в предположении определенной гладкости плотности φ и поверхности Γ функция $u(x)$ продолжается по непрерывности на Γ и имеет место соответствующая формула ее предельных значений. В настоящей работе аналогичный вопрос рассмотрим для общих интегралов вида (1). В соотношении для предельных значений $\phi^+(y_0)$ функции (1) в граничных точках y_0 будет участвовать сингулярный интеграл

$$\phi^*(y_0) = \int\limits_\Gamma Q(y_0, y; y - y_0)\varphi(y)\, ds_y, \quad y_0 \in \Gamma, \tag{2}$$

который понимается в смысле главного значения как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $\Gamma \cap \{|y - y_0| \geq \varepsilon\}$.

Отметим, что в случае, когда ядро Q зависит только от ξ, вопрос о непрерывности функции ϕ вплоть до границы изучался в работе [4], в которой установлено следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция $Q(\xi)$, $\xi \neq 0$, непрерывно дифференцируема, нечетна и однородна степени -2, кроме того, заданы плоскость P с единичной нормалью n и полупространство G с границей $\partial G = P$, для которого n является внутренней нормалью. Тогда сингулярный интеграл*

$$q = \int\limits_P Q(y - x)\, ds_y, \quad x \in G, \tag{3}$$

понимаемый в смысле главного значения на бесконечности как предел при $R \to \infty$ интегралов по $P \cap \{|y| \leq R\}$, существует и не зависит от $x \in G$. Справедливо также равенство

$$q = \int\limits_{P\cap\{|y-y_0|\leq 1\}} Q(y - y_0 - n)\, ds_y + \int\limits_{P\cap\{|y-y_0|\geq 1\}} [Q(y - y_0 - n) - Q(y - y_0)]\, ds_y, \tag{3$'$}$$

где $y_0 \in P$ и интегралы существуют в обычном смысле.

В дальнейшем все рассмотрения будем вести в рамках классов Гёльдера C^ν. Напомним, что для заданной на множестве E функции φ ее норма в этом классе определяется равенством $|\varphi|_{\nu,E} = |\varphi|_{0,E} + [\varphi]_{\nu,E}$, где

$$|\varphi|_{0,E} = \sup_{x\in E} |\varphi(x)|, \quad [\varphi]_{\nu,E} = \sup_{x\neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1.$$

При $[\varphi]_{1,E} < \infty$ говорят также, что функция φ удовлетворяет условию Липшица. Если множество E является замкнутой областью, то можно ввести класс $C^{1,\nu}(E)$ непрерывно дифференцируемых функций φ условиями $\varphi, \varphi' \in C^\nu(E)$, где φ' означает любую из частных производных этой функции.

Пусть H^n_{-2} означает класс функций $Q(\xi) \in C^n$, $\xi \neq 0$, однородных степени -2. Нетрудно показать [4], что функции $Q \in H^1_{-2}$ удовлетворяют условию Липшица вне окрестности точки $\xi = 0$. Более точно, они допускают оценку

$$|Q(\xi) - Q(\eta)| \leq C(|\xi|^{-3} + |\eta|^{-3})|\xi - \eta|, \tag{4}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от Q. В частности, из этой оценки следует, что второй интеграл в правой части $(3')$ существует в обычном смысле.

Как и в (1), основной интерес представляют функции $Q(\xi) = Q(u, \xi)$, зависящие от параметра $u \in E$. Обозначим через $C^\nu(E; H^n_{-2})$ класс функций $Q(u; \xi)$ этого типа, которые при фиксированном u принадлежат H^n_{-2}, а относительно первой переменной вместе со своими частными производными по ξ принадлежат $C^\nu(E)$, причем конечна норма

$$|Q|^{(n)}_\nu = \sup_{|\xi|=1,\ k\leq n} |Q^{(k)}|_{\nu,E}, \tag{5}$$

где $Q^{(k)}$ означает набор из всех частных производных функции $Q(u, \xi)$ порядка k по переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Введем класс L^1 непрерывно дифференцируемых гомеоморфных отображений пространства $\mathbb{R}^3$ на себя, которые вместе со своим обратным удовлетворяют условию Липшица. Преобразования α этого типа называем липшицевыми, по определению для некоторой постоянной $M > 0$ они допускают двустороннюю оценку

$$M^{-1}|x-y| \le |\alpha(x)-\alpha(y)| \le M|x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}^3. \tag{6}$$

Рассмотрим матрицу Якоби $D\alpha$, столбцами которой служат частные производные $\partial\alpha/\partial x_i$. Очевидно,

$$\alpha(x)-\alpha(y) = [A(x,y)](x-y), \quad A(x,y) = \int\limits_0^1 (D\alpha)[x(1-\tau)+y\tau]\,d\tau, \tag{7}$$

где матрица A в квадратных скобках действует на вектор $x-y$ обычным образом. Подставляя это выражение в (6) и полагая $x = y + r\xi$, $r > 0$, с фиксированным вектором ξ, в пределе при $r \to 0$ получаем аналогичную оценку

$$M^{-1}|\xi| \le |[(D\alpha)(x)]\xi| \le M|\xi|, \tag{8}$$

равномерную по x и ξ. В частности, обратное отображение α^{-1} также непрерывно дифференцируемо и матрицы Якоби $D(\alpha^{\pm1})$ равномерно ограничены. Очевидно верно и обратное: если отображения $\alpha^{\pm1}$ непрерывно дифференцируемы и их матрицы Якоби равномерно ограничены, то $\alpha \in L^1$. Ниже будем рассматривать липшицевы преобразования α со свойством $D\alpha \in C^\nu(\mathbb{R}^3)$, класс таких преобразований обозначим через $L^{1,\nu}$. Ясно, что вместе с α этому классу принадлежит и обратное преобразование $\beta = \alpha^{-1}$.

Рассмотрим связь липшицевых преобразований с функциями $Q \in H^n_{-2}$, введенными выше.

Лемма 2. *Пусть* $Q(x,y;\xi) \in C^\nu(E_1 \times E_2; H^2_{-2})$, *где* $E_j \subseteq \mathbb{R}^3$, *и задано липшицево преобразование* $\alpha \in L^{1,\nu}$. *Тогда существует такая функция* $\tilde{Q}(x,y;\xi) \in C^\nu(\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2; H^1_{-2})$, *где* $\tilde{E}_j = \alpha^{-1}(E_j)$, *что имеет место включение*

$$k(x,y) = Q[\alpha(x),\alpha(y);\alpha(y)-\alpha(x)] - \tilde{Q}(x,y;y-x) \in C^\nu(\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2), \tag{9}$$

причем

$$\tilde{Q}(x,x;\xi) = Q[\alpha(x),\alpha(x);(D\alpha)(x)\xi]. \tag{10}$$

Доказательство. При $x = y$ матрица $A(x,y)$ в (7) совпадает с матрицей Якоби $(D\alpha)(x)$, которая по предположению принадлежит классу $C^\nu(\mathbb{R}^3)$. Поэтому имеем оценку

$$|A(x,y)-A(x,x)| \le C|x-y|^\nu,$$

где слева берется операторная норма в $\mathbb{R}^{3\times3} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Следовательно, с учетом (8) отсюда вытекает двойное неравенство

$$(2M)^{-1}|\xi| \le |A(x,y)\xi| \le 2M|\xi| \quad \text{при} \quad |x-y| \le \delta, \tag{11}$$

где $0 < \delta \le 1$ выбирается из условия $2MC\delta \le 1$.

Выберем гладкую срезывающую функцию $\chi(x)$, которая тождественно равна единице при $|x| \le \delta/2$ и нулю при $|x| \ge \delta$, и положим

$$\tilde{Q}(x,y;\xi) = \chi(x-y)Q[\alpha(x),\alpha(y);A(x,y)\xi]. \tag{12}$$

Очевидно, для этой функции условие (10) выполнено. Убедимся в том, что она принадлежит классу $C^\nu(\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2; H^1_{-2})$. В силу выбора функции χ в действительности это достаточно проверить по отношению ко множеству $\tilde{E} \subseteq \tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2$, выделяемому условием $|x-y| \le \delta$.

Согласно (4), в шаровом кольце $(2M)^{-1} \le |\eta| \le 2M$ функция $Q[\alpha(x),\alpha(y);\eta]$ удовлетворяет условию Липшица равномерно по x, y. В силу (11) при $|\xi| = 1$ и $(x,y) \in \tilde{E}$ вектор $A(x,y)\xi$ изменяется в этом слое. Поэтому с учетом условия $A \in C^\nu(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ отсюда заключаем, что $Q[\alpha(x),\alpha(y);A(x,y)\xi] \in C^\nu(\tilde{E})$ равномерно по $|\xi| = 1$. Аналогично проверяется этот факт и по отношению к частным производным

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi_i} = \chi(x-y)\sum_{k=1}^{3} A_{k\,i}(x,y)\frac{\partial Q}{\partial \eta_k}[\alpha(x),\alpha(x);A(x,y)\xi],$$

где A_{ki} – элементы матрицы A.

В соответствии с (7), (12) для функции $k(x,y)$ из (9) имеем выражение

$$k(x,y) = [1-\chi(x-y)]Q[\alpha(x),\alpha(y);\alpha(y)-\alpha(x)].$$

Поскольку $1-\chi(x-y) = 0$ при $|x-y| \le \delta/2$, достаточно убедиться в том, что $k(x,y) \in C^\nu(\tilde{F})$ на множестве $\tilde{F} = \{(x,y) \in \tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2,\ |x-y| \ge \delta/2\}$. В силу (6) для $(x,y) \in \tilde{F}$ имеем оценку $|\alpha(x)-\alpha(y)| \ge \delta/(2M)$. Поэтому с учетом (4) функция $Q[\alpha(x),\alpha(y);\eta]$ удовлетворяет условию Липшица в области $|\eta| \ge \delta/(2M)$ равномерно по $(x,y) \in E$. Тем самым отсюда принадлежность функции k классу $C^\nu(\tilde{F})$ установлена, что завершает доказательство леммы.

В дальнейшем предполагаем, что Γ является поверхностью Ляпунова и принадлежит классу $C^{1,\nu}$. Последнее означает следующее: для любого $a \in \Gamma$ существует гомеоморфное отображение $y = \gamma(t) = (\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))$ единичного круга $B = \{t \in \mathbb{R}^2,\ |t| \le 1\}$ на некоторую окрестность точки a поверхности Γ, которое принадлежит классу $C^{1,\nu}(B)$ и ранг матрицы Якоби $(D\gamma)(t)$ равен двум в каждой точке, т.е. касательные векторы

$$c_i(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial t_i}, \quad i = 1,2, \tag{13}$$

линейно независимы.

Следует заметить, что элемент площади на Γ определяется равенством

$$ds_y = |[c_1(t),c_2(t)]|\,dt_1\,dt_2,$$

где $[\cdot,\cdot]$ означает векторное произведение. Другими словами, интеграл от функции $\varphi \in C(\Gamma)$ по поверхности $\gamma(B) \subseteq \Gamma$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_{\gamma(B)} \varphi(x)\,ds_x = \int\limits_B \varphi[\gamma(t)]|[c_1(t),c_2(t)]|\,dt. \tag{14}$$

Условимся касательную плоскость к гладкой поверхности Γ в точке a обозначать через $(d\Gamma)(a)$. Поверхность Γ плоская в окрестности этой точки, если существует такой шар B с центром в точке a, что $B \cap \Gamma = B \cap (d\Gamma)(a)$. По определению липшицево преобразование β выпрямляет поверхность Γ в окрестности точки a, если образ $\beta(\Gamma)$ является плоским в окрестности точки $\beta(a)$.

Лемма 3. *a) Пусть* $\Gamma \in C^{1,\nu}$ *и* $a \in \Gamma$. *Тогда существует липшицево преобразование* $\beta \in L^{1,\nu}$, *выпрямляющее поверхность* Γ *в окрестности точки* a.

b) Пусть липшицево преобразование $y = \alpha(x) \in L^{1,\nu}$ *переводит гладкую поверхность* $\tilde{\Gamma} \in C^{1,\nu}$ *на* Γ. *Тогда справедлива формула замены переменных*

$$\int\limits_\Gamma \varphi(y)\,ds_y = \int\limits_{\tilde{\Gamma}} \varphi[\alpha(x)]J(x)\,ds_x, \quad J(x) = |[(D\alpha)e_1(x),(D\alpha)e_2(x)]|, \tag{15}$$

где векторы e_1, e_2 *лежат в касательной плоскости* $(d\tilde{\Gamma})(x)$, *имеют единичную длину и ортогональны друг другу. При этом коэффициент* $J(x)$ *принадлежит* $C^\nu(\tilde{\Gamma})$.

c) Пусть поверхность $\Gamma \in C^{1,\nu}$, *функция* $Q(y_0, y; \xi)$ *принадлежит* $C^\nu(\Gamma \times \Gamma; H^2_{-2})$ *и при* $y = y_0$ *нечетна по* ξ. *Тогда существует сингулярный интеграл*

$$\int\limits_\Gamma Q(y_0, y; y - y_0)\, ds_y = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma \setminus B_\varepsilon} Q(y_0, y; y - y_0)\, ds_y, \tag{16}$$

где B_ε *– шар с центром* $y_0 \in \Gamma$ *радиуса* ε.

Доказательство. a) Пусть $a = (a_1, a_2, a_3) \in \Gamma$ и гомеоморфное отображение $y = \gamma(t)$ круга $B = \{|t| \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ на окрестность точки a поверхности Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}(B)$, причем 3×2-матрица Якоби $D\gamma$ имеет ранг 2 в каждой точке $t \in B$ и $a = \gamma(0)$. Тогда один из ее миноров, например, на пересечении первой и второй строк отличен от нуля. Поэтому по теореме об обратной функции существует отображение $t = \omega(y_1, y_2)$ окрестности G точки (a_1, a_2) на некоторый круг $|t| \le \varepsilon$ класса $C^{1,\nu}(\overline{G})$, которое является обратным к $y_i = \gamma_i(t)$, $i = 1, 2$. Полагая $f = \gamma_3 \circ \omega$, получаем вещественную функцию $f \in C^{1,\nu}(\overline{G})$, график которой совпадает с Γ в окрестности точки a.

Пусть гладкая функция χ тождественно равна единице в окрестности точки (a_1, a_2) и нулю вне некоторого компакта, содержащегося в G. Тогда функция $g(y_1, y_2) = f(y_1, y_2)\chi(y_1, y_2)$ принадлежит классу $C^{1,\nu}(\mathbb{R}^2)$ и ее график совпадает с Γ в окрестности точки a. Поэтому преобразование $\tilde{y} = \beta(y)$, определяемое соотношениями

$$\tilde{y}_1 = y_1, \quad \tilde{y}_2 = y_2, \quad \tilde{y}_3 = y_3 - g(y_1, y_2),$$

удовлетворяет всем требованиям леммы.

b) Рассмотрим окрестность Γ_0 некоторой точки a поверхности Γ, представленную параметрически уравнением $y = \gamma(t)$, $|t| \le 1$, класса $C^{1,\nu}$, фигурирующим в доказательстве утверждения a). Тогда $\tilde{\gamma} = \alpha^{-1} \circ \gamma$ служит параметризацией $\tilde{\Gamma}_0 = \alpha^{-1}(\Gamma_0)$ того же типа. Пусть $\tilde{c}_i$ определяются по $\tilde{\gamma}_i$ аналогично (13). Тогда в силу (14) равенство (15), записанное по отношению к Γ_0 и $\tilde{\Gamma}_0$, переходит в

$$\int\limits_B \varphi[\gamma(t)] |[c_1(t), c_2(t)]|\, dt = \int\limits_B \varphi[\gamma(t)] J[\tilde{\gamma}(t)] |[\tilde{c}_1(t), \tilde{c}_2(t)]|\, dt,$$

где, напомним, B означает единичный круг плоскости $\mathbb{R}^2$. Поэтому коэффициент J определяется соотношением $J[\tilde{\gamma}(t)]|[\tilde{c}_1(t), \tilde{c}_2(t)]| = |[c_1(t), c_2(t)]|$. В точке $\tilde{y} = \tilde{\gamma}(t)$ векторы $\tilde{c}_i = \partial\tilde{\gamma}/\partial t_i$ являются линейными комбинациями $\tilde{c}_i = p_{i,1}e_1 + p_{i,2}e_2$, $i = 1, 2$, векторов e_1, e_2 с определителем $\det p \ne 0$. Очевидно, $[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2] = [p_{1,1}e_1 + p_{1,2}e_2, p_{2,1}e_1 + p_{2,2}e_2] = (\det p)[e_1, e_2]$. Поскольку $c_i = \partial\gamma/\partial t_i$ связаны с $\tilde{c}_i$ соотношением $c_i = (D\alpha)(\tilde{y})\,\tilde{c}_i$, где матрица Якоби $D\alpha$ вычислена в точке $\tilde{y} = \tilde{\gamma}(t)$, можем также записать равенство

$$[c_1, c_2] = [p_{1,1}(D\alpha)e_1 + p_{1,2}(D\alpha)e_2, p_{2,1}(D\alpha)a_1 + p_{2,2}(D\alpha)a_2] = (\det p)[(D\alpha)e_1, (D\alpha)e_2].$$

Так как $|[e_1, e_2]| = 1$, в результате для J получим выражение (15).

Остается убедиться в том, что $J \in C^\nu(\tilde{\Gamma})$. Для этого достаточно единичные векторы $e_i(x)$, фигурирующие в (15), выбрать из класса $C^\nu(\tilde{\Gamma}_0)$. Используя ортогонализацию, в действительности можно исходить из пары линейно независимых векторов. В соответствии с утверждением a) леммы такой выбор всегда возможен.

c) Предположим сначала, что поверхность Γ плоская в окрестности y_0, т.е. $B_r \cap \Gamma = B_r \cap (d\Gamma)(y_0)$ для некоторого $r > 0$. Тогда в силу нечетности функции $Q(y_0, y_0; \xi)$ по ξ интеграл от $Q(y_0, y_0; y - y_0)$ по круговому кольцу $\Gamma \cap (B_r \setminus B_\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < r$, равен нулю. Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma \setminus B_\varepsilon} Q(y_0, y; y - y_0)\, ds_y =$$

$$= \int\limits_{\Gamma\setminus B_\varepsilon} [Q(y_0, y; y - y_0) - Q(y_0, y_0; y - y_0)]\, ds_y + \int\limits_{\Gamma\setminus B_\varepsilon} Q(y_0, y_0; y - y_0)\, ds_y.$$

По определению нормы (5) имеем оценку

$$|Q(y_0, y; \xi) - Q(y_0, y_0; \xi)| \le |Q|_\nu^{(0)} |\xi|^{-2} |y - y_0|^\nu,$$

так что выражение в квадратных скобках в предыдущем равенстве интегрируемо на Γ. Поэтому предел (16) существует.

В общем случае воспользуемся утверждением а) леммы и рассмотрим преобразование $\beta \in L^{1,\nu}$, выпрямляющее Γ в окрестности y_0. Не ограничивая общности, можно считать, что $\beta(y_0) = y_0$ и матрица $(D\beta)(y_0)$ единична. В частности,

$$\beta(y) - y = |y - y_0|\Delta(y), \quad \lim_{y\to y_0} \Delta(y) = 0. \tag{17}$$

В обозначениях леммы 2, согласно (15), имеем

$$\int\limits_{\Gamma\setminus B_\varepsilon} Q(y_0, y; y - y_0)\, ds_y = \int\limits_{\tilde\Gamma\setminus \beta(B_\varepsilon)} \tilde Q(y_0, y; y - y_0) J(y)\, ds_y + \int\limits_{\tilde\Gamma\setminus \beta(B_\varepsilon)} k(y_0, y) J(y)\, ds_y.$$

Очевидно, последнее слагаемое в правой части этого равенства имеет предел при $\varepsilon \to 0$. По отношению к $\tilde\Gamma = \beta(\Gamma)$ и $\tilde Q(y_0, y; \xi) J(y)$ выполняются условия рассмотренного выше случая. Поэтому достаточно образ $\beta(B_\varepsilon)$ шара B_ε надлежащим образом заключить в шары близкого радиуса. В силу (17) при $|y - y_0| = \varepsilon$ имеем оценки

$$\varepsilon(1 - \delta_\varepsilon) \le |\beta(y) - y_0| \le \varepsilon(1 + \delta_\varepsilon),$$

где

$$\delta_\varepsilon = \max_{|y-y_0|=\varepsilon} |\Delta(y)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Следовательно,

$$B_\varepsilon^- \subseteq \beta(B_\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon^+, \quad B_\varepsilon^\pm = B_{\varepsilon\pm\varepsilon\delta_\varepsilon}. \tag{18}$$

Поскольку поверхность $\tilde\Gamma$ плоская в окрестности точки y_0, для достаточно малых ε ее пересечение с $B_\varepsilon^+ \setminus B_\varepsilon^-$ является круговым кольцом площади

$$\pi\varepsilon^2[(1 + \delta_\varepsilon)^2 - (1 - \delta_\varepsilon)^2] = 4\pi\varepsilon^2\delta_\varepsilon.$$

В силу соотношений (18) можем записать равенство

$$\int\limits_{\tilde\Gamma\setminus\beta(B_\varepsilon)} \tilde Q J\, ds_x = \int\limits_{\tilde\Gamma\setminus B_\varepsilon^+} \tilde Q J\, ds_x + \int\limits_{B_\varepsilon^+\setminus\beta(B_\varepsilon^+)} \tilde Q J\, ds_x. \tag{19}$$

Как показано выше, первое слагаемое здесь имеет предел при $\varepsilon \to 0$, а второе слагаемое по модулю не превосходит величины

$$\int\limits_{B_\varepsilon^+\setminus B_\varepsilon^-} |\tilde Q(y_0, y; y - y_0)||\tilde J(y)|\, ds_y \le C\delta_\varepsilon$$

с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от ε. Тем самым левая часть равенства (19) имеет предел при $\varepsilon \to 0$, что завершает доказательство леммы.

Обратимся к исходному интегралу (1).

Теорема 1. *Пусть поверхность* $\Gamma \in C^{1,\nu}$ *ограничивает конечную область* D *и задана функция* $Q(x,y;\xi) \in C^{\nu}(\overline{D}\times\Gamma; H^2_{-2})$, *нечетная по* ξ *при* $x = y \in \Gamma$. *Тогда для* $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0<\mu<\nu$, *интеграл (1) определяет функцию* $\phi(x)$, *которая непрерывно продолжима на* Γ *и принадлежит классу* $C^{\mu}(\overline{D})$. *При этом для ее предельных значений справедлива формула*

$$\phi^{+}(y_0) = q(y_0)\varphi(y_0) + \phi^{*}(y_0), \quad y_0 \in \Gamma, \tag{20}$$

где $\phi^*(y_0)$ *представляет собой интеграл (2), а* $q(y_0)$ *определяется аналогично лемме 1 по отношению к* $Q(y_0, y_0; \xi)$, *плоскости* $P = (d\Gamma)(y_0)$ *и внутренней (по отношению к* D *) нормали* $n(y_0)$.

Доказательство. Принадлежность функции ϕ классу C^{μ} достаточно установить по отношению к граничным точкам $a \in \Gamma$. Другими словами, для каждой точки a найдется такой шар B с центром в точке a, что $\phi \in C^{\mu}(D\cap B)$. В этом случае ϕ продолжается по непрерывности на замыкание $\overline{D\cap B}$ и принадлежит $C^{\mu}(\overline{D\cap B})$.

Предположим сначала, что поверхность Γ плоская в окрестности точки a, например, в пересечении с шаром $B_{2r} = \{|x-a| \le 2r\}$, в качестве B выберем шар B_r. В этом случае теорему установим при более слабом условии $Q \in C^{\nu}(\overline{D}\times\Gamma; H^1_{-2})$ на ядро. Начнем со случая, когда ядро $Q = Q_0$ не зависит от x, т.е. рассмотрим функцию

$$\phi_0(x) = \int\limits_{\Gamma} Q_0(y; y-x)\varphi(y)\, ds_y, \quad x \in D\cap B. \tag{21}$$

Принадлежность этой функции классу C^{μ} установлена в работе [4] вместе с оценкой

$$|\phi_0|_{C^{\mu}(D\cap B)} \le C|Q|^{(1)}_{\nu}|\varphi|_{\mu,\Gamma}. \tag{22}$$

В общем случае применим эту оценку к функции

$$\phi_1(z,x) = \int\limits_{\Gamma} Q(z,y;y-x)\varphi(y)\, ds_y, \quad x,z \in D\cap B,$$

рассматривая z как параметр. Тогда в силу (22) имеем равномерно по z оценку

$$|\phi_1(z,x') - \phi_1(z,x'')| \le C|x'-x''|^{\mu}. \tag{23}$$

Разностное отношение

$$\tilde{\phi}_0(x) = [\phi_1(z',x) - \phi_1(z'',x)]|z'-z''|^{-\mu}$$

функции ϕ_1 по первой переменной можем записать в форме (21) по отношению к ядру

$$\tilde{Q}_0(y;\xi) = \frac{Q(z',y;\xi) - Q(z'',y;\xi)}{|z'-z''|^{\mu}}. \tag{24}$$

Далее воспользуемся следующим известным свойством [5, с. 47] функций, удовлетворяющих условию Гёльдера: если некоторая функция $f(x)$ принадлежит $C^{\nu}(E)$ и $0<\mu<1$, то функция

$$g(x,y) = [f(x)-f(y)]|x-y|^{-\mu},$$

доопределенная нулем при $x=y$, принадлежит классу $C^{\nu-\mu}(E\times E)$ и выполнена соответствующая оценка $|g|_{\nu-\mu,E\times E} \le C|f|_{\nu,E}$. В соответствии с определением (5) применительно к (24) этот результат позволяет утверждать, что $\tilde{Q} \in C^{\nu-\mu}(\Gamma; H^1_{-2})$ равномерно по z', z''. На основании (22), где ν и $\mu<\nu$ следует заменить соответственно на $\tilde{\nu} = \nu-\mu$ и $\tilde{\mu}<\tilde{\nu}$, приходим к оценке

$$|\phi_1(z',x) - \phi_1(z'',x)| \le C|z'-z''|^{\mu},$$

из которой совместно с (23) вытекает принадлежность ϕ_1, а значит, и $\phi(x) = \phi_1(x, x)$ классу C^μ.

Обратимся к доказательству формулы (20) в точке $y_0 = a$. Обозначая $Q(y_0, y; \xi)\varphi(y)$ снова через $Q(y_0, y; \xi)$, без ограничения общности можем считать $\varphi \equiv 1$. Предположим сначала, что $Q(a, a; \xi) = 0$. В этом случае имеем

$$|Q(x, y; \xi)| = |Q(x, y; \xi) - Q(a, a; \xi)| \le |Q|_\nu^{(0)}(|x - a| + |y - a|)^\nu |\xi|^{-2}. \tag{25}$$

Пусть точка $x \in D$ стремится к a вдоль внутренней нормали к Γ. Тогда векторы $x - a$ и $y - a$, $y \in B \cap \Gamma$, ортогональны и, значит, $|x - y|^2 = |x - a|^2 + |y - a|^2 \ge (|x - a| + |y - a|)^2/2$. Отсюда и из (25) вытекает, что

$$|Q(x, y; y - x)| \le |Q|_\nu^{(0)} \frac{(|x - a| + |y - a|)^\nu}{|x - a|^2 + |y - a|^2} \le 2|Q|_\nu^{(0)} |y - a|^{\nu - 2}.$$

Поэтому на основании теоремы Лебега о мажорированной сходимости можно перейти к пределу при $x \to a$ под знаком интеграла (1), что дает равенство (20) для $a = y_0$ и $q(a) = 0$.

В общем случае положим

$$Q(x, y; \xi) = [Q(x, y; \xi) - Q(a, a; \xi)] + Q(a, a; \xi).$$

По отношению к интегралу, определяемому выражением в квадратных скобках, выполняются условия рассмотренного выше случая. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $Q(\xi) = Q(x, y; \xi)$ не зависит от x, y. В этом случае $q = q(a)$ определяется равенством (3), где $P = (d\Gamma)(a)$ и точка x лежит в полупространстве, определяемом нормалью $n(a)$. Вспоминая, что $P \cap B = \Gamma \cap B$, можем записать равенство

$$\phi(x) - q = \int\limits_{\Gamma \setminus B} Q(y - x)\, ds_y - \int\limits_{P \setminus B} Q(y - x)\, ds_y.$$

В правой части этого равенства можем перейти к пределу при $x \to a$ под знаком интегралов, так что

$$\phi^+(a) - q = \int\limits_{\Gamma \setminus B} Q(y - a)\, ds_y - \int\limits_{P \setminus B} Q(y - a)\, ds_y.$$

Отсюда, поскольку

$$\int\limits_{P \setminus B} Q(y - a)\, ds_y = \int\limits_{B} Q(y - a)\, ds_y = 0,$$

приходим к равенству $\phi^+(a) = q + \phi^*(a)$, завершающему доказательство формулы (20).

Итак, в предположении, что поверхность Γ плоская в окрестности граничной точки a, теорема полностью установлена. В общем случае воспользуемся леммой 3а), т.е. липшицевым преобразованием $\beta \in L^{1,\nu}$, выпрямляющим поверхность Γ в окрестности точки a. Без ограничения общности можно считать, что $\beta(a) = a$ и $(D\beta)(a) = 1$. Тогда в силу леммы 2 равенство (1), связывающее функции ϕ и φ, перейдет в аналогичное равенство

$$\tilde\phi(x) = \int\limits_{\tilde\Gamma} \tilde Q(x, y; y - x)\tilde\varphi(y)\, ds_y + \int\limits_{\tilde\Gamma} k(x, y)\tilde\varphi(y)\, ds_y = \tilde\phi_0(x) + \tilde\phi_1(x), \quad x \in \overline{D},$$

относительно $\tilde\phi(x) = \phi[\alpha(x)]$ и $\tilde\varphi = \varphi[\alpha(x)]J(x) \in C^\mu(\tilde\Gamma)$, где $\alpha = \beta^{-1}$.

Очевидно, $\tilde\phi_1 \in C^\nu(\overline{D})$, а функция $\tilde\phi_0$ на основании уже доказанного принадлежит $C^\mu(\overline{D})$ и справедлива формула

$$\tilde\phi_0^+(a) = \tilde q(a)\tilde\varphi(a) + \tilde\phi_0^*(a). \tag{26}$$

Ясно, что это равенство справедливо и по отношению к $\tilde{\phi}$. В силу равенства (10) с учетом предположения $(D\alpha)(a) = 1$ функция $\tilde{Q}(a, a; \xi)$ совпадает с $Q(a, a; \xi)$ и, значит, $\tilde{q}(a) = q(a)$. Из этих же соображений получаем, что $J(a) = 1$ и $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a)$. Как видно из доказательства леммы 3с), имеем равенство $\tilde{\phi}^*(a) = \phi^+(a)$, так что (26) переходит в формулу (20) для ϕ. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Из выражения $(3')$ для коэффициента q из леммы 1 видно, что в условиях теоремы 1 функция $q(y_0)$ в формуле (20) принадлежит классу $C^\mu(\Gamma)$. В частности, сингулярный оператор $\varphi \to \phi^*$ ограничен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. Для общих сингулярных операторов на гладких многообразиях этот факт хорошо известен. В случае ядер $Q(x, y; \xi)$ специального вида коэффициент $q(y_0)$ можно записать более явно.

Лемма 4. *Пусть в условиях теоремы 1 при $x = y$ функция $Q(x, y, \xi)$ определяется равенством*

$$Q(y, y; \xi) = Q_1(\xi)n_1(y) + Q_2(\xi)n_2(y) + Q_3(\xi)n_3(y), \tag{27}$$

где n_j – компоненты внутренней нормали на Γ, причем

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_3} = 0. \tag{28}$$

Тогда коэффициент $q = q(y_0)$ не зависит от y_0 и задается равенством

$$q = -\frac{1}{2} \int\limits_{|\xi|=1} \left[\sum_{i=1}^{3} Q_i(\xi)\xi_i \right] ds_\xi. \tag{29}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1 имеем

$$q(y_0) = \int\limits_P Q(y_0, y_0; y - x_0)\, ds_y = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{P\cap B_R} Q(y_0, y_0; y - x_0)\, ds_y,$$

где P – касательная плоскость $d\Gamma(y_0)$ и $x_0 = y_0 + n(y_0)$. Подынтегральное выражение здесь определяется правой частью равенства (27) с постоянными коэффициентами $n_j(y_0)$ внутренней (по отношению к D) нормали $n(y_0)$. Пусть $G^\pm$ – полупространства, для которых $\pm n(y_0)$ является внутренней нормалью. Рассмотрим полушар $G^- \cap B_R$, сферическую часть границы которого обозначим через Ω_R^-. В этой области к $Q(y_0, y_0; y - x_0)$ можно применить формулу Гаусса–Остроградского. С учетом (28) получим равенство

$$\int\limits_{\partial(G^-\cap B_R)} [Q_1(y - x_0)n_1(y) + Q_2(y - x_0)n_2(y) + Q_3(y - x_0)n_3(y)]\, ds_y = 0,$$

где $n_l(y)$ означают здесь компоненты внешней нормали (по отношению к $G^- \cap B_R$). Поэтому

$$-\int\limits_{P\cap B_R} Q(y_0, y_0; y - x_0)\, ds_y = \frac{1}{R} \int\limits_{\Omega_R^-} [Q_1(y - x_0)y_1 + Q_2(y - x_0)y_2 + Q_3(y - x_0)y_3]\, ds_\xi,$$

где учтено, что $n_i(y) = y_i/R$ на Ω_R^-. При подстановке $y = R\xi$, $|\xi| = 1$, интеграл в правой части переходит в

$$\int\limits_{\Omega_1^-} R^2[Q_1(R\xi - x_0)\xi_1 + Q_2(R\xi - x_0)\xi_2 + Q_3(R\xi - x_0)\xi_3]\, ds_y.$$

В силу однородности $R^2 Q_j(R\xi - x_0) = Q_j(\xi - x_0/R)$, так что при $R \to \infty$ последний интеграл сходится к пределу

$$\int\limits_{\Omega_1^-} [Q_1(\xi)\xi_1 + Q_2(\xi)\xi_2 + Q_3(\xi)\xi_3]\, ds_\xi,$$

который в силу нечетности $Q_j(\xi)$ совпадает с правой частью формулы (29).

Проиллюстрируем лемму на примере интегралов, приведенных в начале работы. В случае потенциала двойного слоя для уравнения Лапласа имеем

$$Q(y;\xi) = \frac{n(y)\xi}{|\xi|^3},$$

соответственно

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i(\xi)\xi_i = \frac{1}{|\xi|}$$

и формула (29) дает значение $q = -2\pi$, что согласуется с классическим результатом [6, с. 416].

Для системы Моисила–Теодореску ядро определяется равенством

$$Q(y;\xi) = -D^{\mathrm{т}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\frac{1}{|\xi|} D[n(y)].$$

В этом случае

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i(\xi)\xi_i = \frac{D^{\mathrm{т}}(\xi)D(\xi)}{|\xi|^3}.$$

Поскольку $D^{\mathrm{т}}(\xi)D(\xi) \equiv |\xi|^2$, отсюда следует значение $q = -2\pi$, что также согласуется с известным результатом [3, с. 248].

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (госконтракты П19, П693, 02.740.11.0613) и при поддержке РФФИ-ГФЕН (Государственный фонд естественных наук Китая) (проект 08-01-92208-ГФЕН).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
2. *Moisil Gr.C., Theodoresco N.* Fonctions holomorphes dans l’espace // Mathematica. 1931. V. 5. P. 142–153.
3. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. 2-е изд. М., 1972.
4. *Полунин В.А.* Граничные свойства трехмерного аналога интеграла типа Коши // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. академии наук. 2008. Т. 10. № 1. С. 47–53.
5. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., 1991.
6. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. 3-е изд. М., 1976.

Белгородский государственный университет

Поступила в редакцию 31.03.2009 г.