

**ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
INFORMATION TECHNOLOGIES AND TELECOMMUNICATION**

УДК 621.396.01

DOI:10.18413/2518-1092-2017-2-1-55-63

Жиляков Е.Г.
Черноморец А.А.
Болгова Е.В.

**О СУБИНТЕРВАЛЬНЫХ МАТРИЦАХ
НА ОСНОВЕ УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85,
г. Белгород, 308015, Россия

e-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru, chernomorets@bsu.edu.ru, bolgova_e@bsu.edu.ru

Аннотация

В работе предложены соотношения, определяющие вид подобласти пространственных частот при выбранном унитарном преобразовании, введены понятия частей и долей энергии изображения в заданной подобласти пространственных частот при выбранной системе ортогональных базисных функций. В работе описаны системы ортогональных базисных функций для различных унитарных преобразований, предложены процедуры вычисления на основе отдельных унитарных преобразований субинтервальных матриц, позволяющих осуществлять анализ свойств изображений в различных подобластях пространственных частот.

Ключевые слова: подобласть пространственных частот доли энергии, субинтервальная матрица, субполосная матрица, унитарные преобразования.

UDC 621.396.01

Zhilyakov E.G.
Chernomorets A.A.
Bolgova E.V.

**ABOUT SUBINTERVAL MATRICES BASED
ON UNITARY TRANSFORMATIONS**

Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

e-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru, chernomorets@bsu.edu.ru, bolgova_e@bsu.edu.ru

Abstract

In this paper we propose a ratio that help determine sub-areas of spatial frequencies at a selected unitary transformation, we introduce the concepts of parts and a shares of image energy in a given subarea of spatial frequencies for the chosen system of orthogonal basis functions. In the paper we describe a system of orthogonal basis functions for different unitary transformations, we propose on the basis of a separate unitary transformation calculation procedure of subinterval matrices, allowing to analyze the image properties in different subareas of spatial frequencies.

Keywords: subdomain of spatial frequencies, shares of energy, subinterval matrix, subband matrix, unitary transformations.

В настоящее время при анализе изображений широко применяют различные ортогональные системы базисных функций [1, 2, 3]: тригонометрические функции $\exp(-jnu)$, $\sin(nu)$, $\cos(nu)$, функции Хартли $cas(nu)$, функции Уолша-Адамара-Пэли $wal(n,u)$, $had(n,u)$, $pal(n,u)$, функции Хаара $har(nu)$ и др., где значение n определяется размерностью анализируемого изображения, величина u является пространственной частотой.

Указанные системы базисных функций определяют соответствующие унитарные преобразования изображений [6].

Анализ в области пространственных частот позволяет исследовать различные свойства изображений $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $k = 1, 2, \dots, N_2$, на основе анализа частотных характеристик [4] (спектр) $F(u, v)$, $(u, v) \in D_2$, унитарного преобразования W в выбранном базисе на основе ортогональной системы базисных функций $\{w_i(u)\}$, $\{w_k(v)\}$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $k = 1, 2, \dots, N_2$:

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} f_{ik} w_i(u) w_k(v), \quad (u, v) \in D_2, \quad (1)$$

где D_2 – область пространственных частот, различная для конкретного унитарного преобразования.

Обратное преобразование позволяет получить значения элементов анализируемого изображения Φ в виде:

$$f_{ik} = \frac{1}{ab} \iint_{(u,v) \in D_2} F(u, v) w_i^*(u) w_k^*(v) dudv, \quad (2)$$

где $w_i^*(u)$, $w_k^*(v)$ – комплексно-сопряженные функции; значения a, b зависят от выбранного унитарного преобразования.

Для унитарных преобразований справедлива теорема Парсевала [4, 7], которая устанавливает связь между энергией изображения и его спектром,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M f_{ik}^2 = \frac{1}{ab} \iint_{(u,v) \in D_2} |F(u, v)|^2 dudv. \quad (3)$$

В контексте субполосного анализа равенство Парсевала (3) [4, 5, 7] целесообразно представить в виде

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} E_{r_1 r_2}(\Phi), \quad (4)$$

где

$$E_{r_1 r_2}(\Phi) = \frac{1}{ab} \iint_{(u,v) \in V_{r_1 r_2}} |F(u, v)|^2 dudv, \quad (5)$$

$$r_1 = 1, 2, \dots, R_1, \quad r_2 = 1, 2, \dots, R_2,$$

где $V_{r_1 r_2}$ – подобласти пространственных частот (ППЧ), которые получены на основании разбиения области пространственных частот D_2 на непересекающиеся подобласти (в общем случае, выбор разбиения области пространственных частот зависит от применяемой системы базисных функций) [4, 7],

$$D_2 = \bigcup_{r_1=1}^{R_1} \bigcup_{r_2=1}^{R_2} V_{r_1 r_2}, \quad (6)$$

$$V_{r_1 r_2} = D_2 \cap G_{r_2}, \quad (7)$$

где D_{r_1} и G_{r_2} – некоторые субполосы в области D_2 (зависят от выбранного преобразования).

Представляется естественным интегралы вида (5) называть частями энергии [4, 7] (евклидовой нормой) изображения в заданном базисе функций, попадающей в соответствующие ППЧ.

В свою очередь отношения

$$P_{r_1 r_2}(\Phi) = E_{r_1 r_2}(\Phi) / \|\Phi\|^2, \quad (8)$$

$$r_1 = 1, 2, \dots, R_1, \quad r_2 = 1, 2, \dots, R_2,$$

представляют собой доли энергии, которые позволяют судить о ее сосредоточенности в выбранных ППЧ $V_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$.

Можно доказать следующее утверждение. Значения частей энергий изображения вида (5), соответствующие подобласти пространственных частот $V_{r_1 r_2}$ вида (7) при заданной системе ортогональных базисных функций (при заданном унитарном преобразовании), определяются соотношением

$$E_{r_1 r_2}(\Phi) = \text{tr}(A_{r_1} \Phi B_{r_2} \Phi^T), \quad (9)$$

где «tr» означает след матрицы, «T» – операция транспонирования матрицы, матрицы $A_{r_1} = (a_{in}^{r_1})$, $i, n = 1, 2, \dots, N_1$, и $B_{r_2} = (b_{km}^{r_2})$, $k, m = 1, 2, \dots, N_2$, – субинтервальные матрицы, соответствующие подобласти $V_{r_1 r_2}$ при заданной системе ортогональных базисных функций, значения элементов которых определяются на основании следующих выражений:

$$a_{in}^{r_1} = \frac{1}{a} \int_{u \in D_{r_1}} w_i(u) w_n(u) du, \quad (10)$$

$$b_{km}^{r_2} = \frac{1}{b} \int_{v \in G_{r_2}} w_k(v) w_m(v) dv. \quad (11)$$

Справедливость этого утверждения доказывается непосредственной подстановкой в определение (5) представления (1).

Для унитарных преобразований, соответствующих симметрической матрице, интегралы в выражениях (10) и (11), в большинстве случаев, можно вычислить точно.

Учитывая соотношения (8) и (9), соотношение для вычисления доли энергии изображения, соответствующей ППЧ $V_{r_1 r_2}$, при заданной системе базисных функций имеет вид

$$P_{r_1 r_2}(\Phi) = \frac{\text{tr}(A_{r_1} \Phi B_{r_2} \Phi^T)}{\text{tr}(\Phi \Phi^T)}. \quad (12)$$

Рассмотрим наиболее распространенные унитарные преобразования, применяемые при обработке изображений.

Так, при преобразовании Фурье (ФТ) изображение представляется в виде ряда Фурье по следующим системам базисных комплексных функций:

$$w_i(u) = e^{-ju(i-1)}, \quad (13)$$

$$w_k(v) = e^{-jv(k-1)}, \quad (14)$$

где j – мнимая единица,

область определения пространственных частот задается следующим образом:

$$D_2 = \{(u, v) | -\pi \leq u, v < \pi\}, \quad (15)$$

параметры в соотношении (2) имеют следующими значениями:

$$a = b = \frac{1}{2\pi}. \quad (16)$$

При анализе изображений на основе преобразования Фурье подобласть пространственных частот $V_{r_1 r_2}$ (7) является центрально-симметричной и определяющие ее субполосы D_{r_1} и G_{r_2} имеют следующий вид [4, 7]:

$$D_{r_1} = [-u_{r_1 2}, -u_{r_1 1}) \cup [u_{r_1 1}, u_{r_1 2}), \quad (17)$$

$$G_{r_2} = [-v_{r_2 2}, -v_{r_2 1}) \cup [v_{r_2 1}, v_{r_2 2}), \quad (18)$$

где

$$0 \leq u_{r_1 1} < u_{r_1 2} < \pi,$$

$$0 \leq v_{r_2 1} < v_{r_2 2} < \pi.$$

Схематично подобласть пространственных частот $V_{r_1 r_2}$, применяемая при субполосном анализе изображений в базисе Фурье, представлена на рисунке 1.

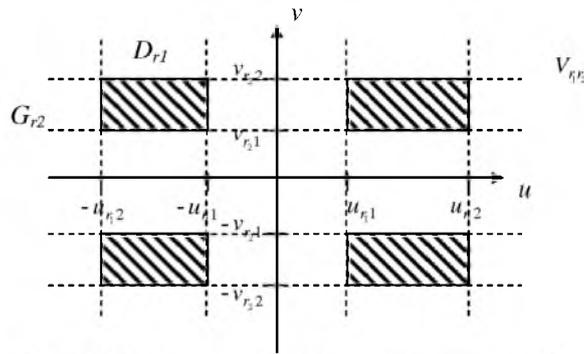


Рис. 1. Подобласть пространственных частот V_{η_2} при субполосном анализе изображений на основе преобразования Фурье

Fig. 1. Subdomain of spatial frequencies V_{η_2} for the images subband analysis based on Fourier transform

Можно показать [4, 7], что элементы субполосной матрицы A_{η_1} , соответствующей субполосе D_{η_1} , определяются на основании следующих соотношений:

$$a_{in}^{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{u \in D_{\eta_1}} e^{-ju(i-n)} e^{-ju(i-n)} du = \frac{1}{2\pi} \int_{u \in D_{\eta_1}} e^{-ju(i-n)} du = \begin{cases} \frac{\sin(u_{\eta_2}(i-n)) - \sin(u_{\eta_1}(i-n))}{\pi(i-n)}, & i \neq n, \\ \frac{u_{\eta_2} - u_{\eta_1}}{\pi}, & i = n, \end{cases} \quad (19)$$

Элементы субполосной матрицы B_{η_2} , соответствующей субполосе D_{η_2} , определяются аналогично.

Значения элементов некоторой субполосной матрицы можно представить в виде изображения на рисунке 2.

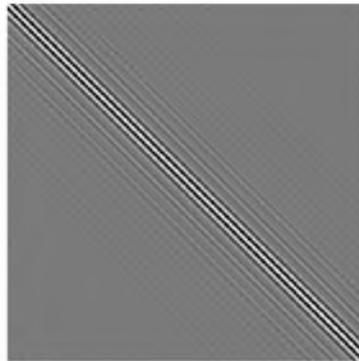


Рис. 2. Графическое представление значений элементов субполосной матрицы
Fig. 2. Graphical representation of the values of the subband matrix elements

При косинусном преобразовании (СТ) базисные функции имеют вид:

$$w_i^{CT}(u) = \cos(u(i - \frac{1}{2})), \quad (20)$$

$$w_k^{CT}(v) = \cos(v(k - \frac{1}{2})), \quad (21)$$

$$a = b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (22)$$

$$0 \leq u, v < \pi, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad k = 1, 2, \dots, N_2.$$

При анализе изображений на основе косинусного преобразования подобласть пространственных частот V_{η_2} (7) задается субполосами D_{r1} и G_{r2} , которые имеют следующий вид:

$$D_{r1}^{CT} = [u_{\eta_1}, u_{\eta_2}], \quad (23)$$

$$G_{r2}^{CT} = [v_{r21}, v_{r22}]. \quad (24)$$

Подобласть пространственных частот V_{η_2} схематично изображена на рисунке 3.

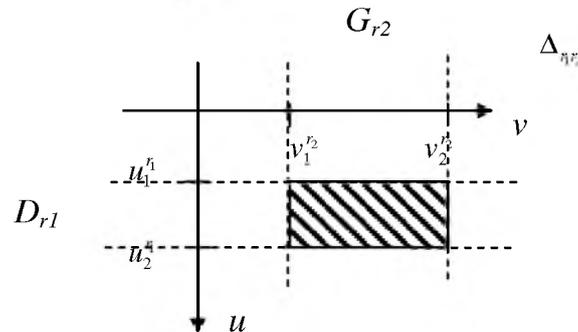


Рис. 3. Подобласть пространственных частот V_{η_2}

при субполосном анализе изображений на основе косинусного преобразования

Fig. 3. Subdomain of spatial frequencies V_{η_2} for the images subband analysis based on cosine transform

Авторами предложено при анализе изображений на основе унитарных преобразований, отличных от преобразования Фурье, использовать термин субинтервальные матрицы.

Элементы субинтервальной матрицы $A_{\eta} = (a_{in}^{\eta, CT}), i, n = 1, 2, \dots, N_1$, соответствующей субполосе D_{r1}^{CT} , определяются на основании соотношения:

$$a_{in}^{\eta, CT} = a_{in}^{\eta} + h_{in}^{\eta}, \quad (25)$$

где a_{in}^{η} – определено в (19),

$$h_{in}^{\eta} = \frac{\text{Sin}(u_{\eta_2}(i+n-1)) - \text{Sin}(u_{\eta_1}(i+n-1))}{\pi(i+n-1)}. \quad (26)$$

Элементы субинтервальной матрицы B_{r2} , соответствующей субполосе G_{r2}^{CT} , определяются аналогично.

Значения элементов некоторой субинтервальной матрицы косинусного преобразования можно представить в виде изображения на рисунке 4.



Рис. 4. Графическое представление значений элементов субинтервальной матрицы косинусного преобразования

Fig. 4. Graphical representation of the values of the subinterval matrix elements for the cosine transform

Преобразование Уолша (Уолша-Адамара, WH) основано на базе функций Уолша, которые образуют полную систему ортонормированных прямоугольных функций (принимает значения -1 и +1).

Множество функций Уолша обычно рассматривают в вариантах, отличающихся последовательностью расположения функций в системе, а именно: упорядочение по Уолшу (по частности), упорядочение по Адамару (естественное), упорядочение по Пэли (диадическое).

При упорядочении по Адамару матрица дискретного преобразования Уолша-Адамара для системы из $N = 2^n$ функций Уолша может быть получена в результате последовательного построения n блочных матриц H_k , $k = 1, 2, \dots, n$, следующим образом:

$$H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad H_0 = (1).$$

Так, при упорядочении по Адамару матрица преобразования Уолша-Адамара для системы из восьми функций Уолша имеет вид:

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Параметры в соотношении (2) для преобразований Уолша-Адамара задаются следующими значениями:

$$a = b = 1, \tag{27}$$

Область значений пространственных частот имеет вид:

$$D_2 = \{(u, v) | 0 \leq u, v < 1\}, \tag{28}$$

Первые восемь непрерывных функций Уолша приведены на рисунке 5.

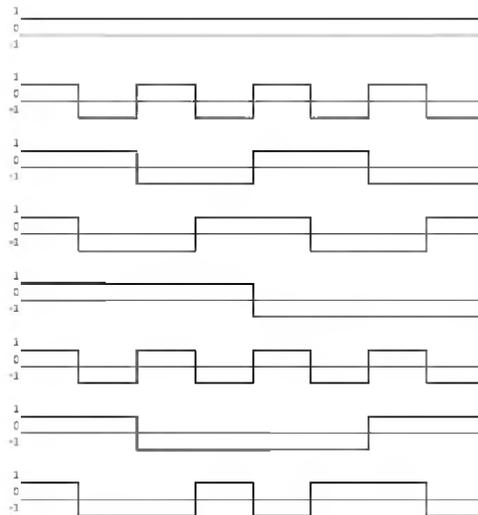


Рис. 5. Пример непрерывных функций Уолша
Fig. 5. Example of continuous Walsh functions

При применении преобразований Уолша-Адамара подобласть пространственных частот $V_{\eta_2}^{WH}$ (7) задается пересечением субполос D_{η_1} и G_{r_2} ,

$$D_{\eta_1}^{WH} = [u_{\eta_1}, u_{\eta_2}), \quad (29)$$

$$G_{r_2}^{WH} = [v_{r_2}, v_{r_2}). \quad (30)$$

$$0 \leq u_{\eta_1} < u_{\eta_2} < 1, \quad 0 \leq v_{r_2} < v_{r_2} < 1.$$

При применении преобразования Уолша-Адамара подобласть пространственных частот $V_{\eta_2}^{WH}$ схематично изображена на рисунке 6.

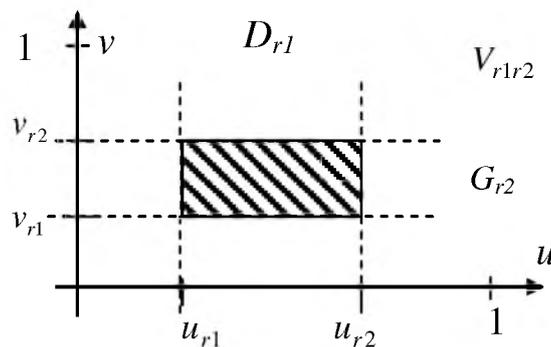


Рис. 6. Подобласть пространственных частот $V_{\eta_2}^{WH}$ при субполосном анализе изображений на основе преобразования Уолша-Адамара
Fig. 6. Subdomain of spatial frequencies $V_{\eta_2}^{WH}$ in the images subband analysis based on Walsh-Hadamard transform

При анализе изображений на основе преобразования Уолша-Адамара (базисные функции упорядочены по Адамару) значения элементов a_{in}^s субинтервальной матрицы A_{η_1} в выражении (10) для области D_{η_1} вида (29) определяется следующим образом (учтем симметричность матрицы преобразования Уолша-Адамара при упорядочении функций по Адамару, а также соотношения (27), (28)):

$$a_{in}^s = \int_{u \in D_{\eta_1}} w_{i-1}(u)w_{n-1}(u)du = \int_{u_{\eta_1}}^{u_{\eta_2}} w_{i-1}(u)w_{n-1}(u)du = \int_{u_{\eta_1}}^{u_{\eta_2}} w_{(i-1) \oplus (n-1)}(u)du \quad (31)$$

где $(i-1) \oplus (n-1)$ – результат сложения по модулю 2 номеров в двоичной системе чисел $(i-1)$ и $(n-1)$.

Учитывая тот факт, что функции Уолша являются кусочно-постоянными, то интеграл в правой части выражения (31) может быть записан в виде конечной суммы. Тогда,

$$a_{in}^s = \frac{1}{N_1} \sum_{n_0=u_{\eta_1}}^{u_{\eta_2}} w_{(i-1) \oplus (n-1)}(n_0), \quad (33)$$

$$i, n = 1, 2, \dots, N_1$$

Аналогично можно получить соотношение для вычисления значений элементов субинтервальной матрицы B_{r_2} при анализе изображений на основе преобразования Уолша-Адамара.

Преобразование Хаара основано на функциях Хаара $har_i(x)$, определенных на интервале $x \in [0,1)$ и $i = 0, 1, \dots, N-1$, где $N = 2^n$.

Базисные функции Хаара задаются на основании следующих соотношений:

$$har_0(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad x \in [0,1], \quad har_i(x) = h_{pq}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2}, & x \in [(q-1)/2^p, (q-1/2)/2^p), \\ -2^{p/2}, & x \in [(q-1/2)/2^p, q/2^p), \\ 0, & \text{для всех остальных } x \in [0,1], \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (34)$$

где p, q – целые положительные числа,

$$i = 2^p + q - 1, \quad 1 \leq q < 2^p.$$

Матрица преобразования Хаара, строки которой составлены из базисных функций Хаара, при $N = 8$ имеет следующий вид:

$$W_N = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Первые восемь непрерывных функций Хаара приведены на рисунке 7.

При применении преобразования Хаара подобласть пространственных частот V_{sr} совпадает с ППЧ, применяемом при преобразовании Уолша-Адамара.

При анализе изображений на основе преобразования Хаара значения элементов $a_{in}^{\eta_1}$ субполосной матрицы A_{η_1} в выражении (10) для области D_{η_1} вида (29) определяется следующим образом:

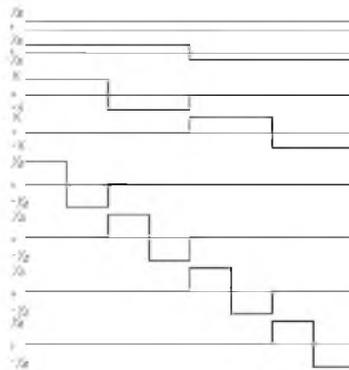


Рис. 7. Пример непрерывных функций Хаара
Fig. 7. Example of continuous Haar functions

$$a_{in}^{\eta_1} = \int_{u \in D_{\eta_1}} har_{i-1}(u) har_{n-1}(u) du = \sum_{u=u_{\eta_1 1}}^{u_{\eta_1 2}} har_{i-1}(u) har_{n-1}(u), \quad (35)$$

Аналогичным образом можно указать значения элементов субинтервальных матриц для других унитарных преобразований.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-07-01570-а.

Список литературы

1. Ахмед Н., Рао К., 1980. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М., Связь, 248.
2. Ярославский Л.П., 1979. Введение в цифровую обработку изображений. М., Сов. радио, 312.

3. Прэтт У., 1982. Цифровая обработка изображений. М., Мир, 312.
4. Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., 2010. О частотном анализе изображений. Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 1: 94-103.
5. Черноморец А.А., Волчков В.П., 2012. О свойствах квазисубполосных и G-субполосных матриц. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 1(120): 126-134.
6. Черноморец А.А., Болгова Е.В., 2015. Об анализе данных на основе косинусного преобразования. Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. 1(198): 68-73.
7. Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., 2013. Об оптимальном выделении субполосных компонент изображений. Информационные системы и технологии. 1(75): 5-11.

References

1. Ahmed N., Rao K., 1980. The orthogonal transform in digital signal processing. Moscow, Svyaz', 248. (Jaroslavskij L.P., 1979. Introduction to digital image processing. Moscow, Sov. Radio, 312.
2. Pratt W., 1982. Digital image processing. Moscow, Mir, 312.
3. Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., 2010. About the frequency image analysis. Problems of Radio Electronics. 1: 94-103.
4. Chernomorets A.A., Volchikov V.P., 2012. About properties of quasisubband and G-subband matrices. Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies. 1(120): 126-134.
5. Chernomorets A.A., Bolgova E.V., 2015. On the analysis of data based on the cosine transformation. Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies. 1(198): 68-73.
6. Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., 2013. Optimal separation of image subband components. Information systems and technologies. 1(75): 5-11.

Жиляков Евгений Георгиевич, зав. кафедрой информационно-телекоммуникационных систем и технологий, доктор технических наук, профессор

Черноморец Андрей Алексеевич, профессор кафедры прикладной информатики и информационных технологий, кандидат технических наук

Болгова Евгения Витальевна, аспирант кафедры прикладной информатики и информационных технологий

Zhilyakov Evgeniy Georgievich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies

Chernomorets Andrey Alekseevich, PhD in Technical Sciences, Department of Applied Informatics and Information Technologies

Bolgova Evgeniya Vitalievna, Postgraduate Student, Department of Applied Informatics and Information Technologies