

УДК 004.001.57:519.2

DOI: 10.18413/2518-1092-2016-1-3-10-15

Сидоренко И.А.<sup>1</sup>  
Будникова М.А.<sup>2</sup>

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  $N$ -МЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ КОСИНУСА РАЗНОСТИ ФАЗ**

1) доцент кафедры информационных систем и технологий, кандидат технических наук, доцент Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия. *e-mail: sidorenko@bsu.edu.ru*

2) студентка кафедры информационных систем и технологий. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия *e-mail: 775939@bsu.edu.ru*

**Аннотация**

В статье предложена модель, позволяющая исследовать многомерную плотность распределения вероятности для случайных величин, представляющих собой косинус разности фаз, имеющих равномерное случайное распределение. Приведены результаты моделирования в виде гистограмм экспериментальных данных. С помощью разработанной модели получены аппроксимирующие формулы для  $n$ -мерной плотности вероятности косинуса разности фаз для  $n \leq 5$ . Результаты проведенного исследования могут быть актуальны при оценке эффективности приема сигналов со случайными параметрами.

**Ключевые слова:** компьютерное моделирование, многомерная плотность вероятности, некогерентный прием, интерполяция.

UDC 004.001.57:519.2

Sidorenko I.A.<sup>1</sup>  
Budnikova M.A.<sup>2</sup>

**MODELING  $N$ -DIMENSIONAL PROBABILITY DENSITY OF THE COSINE OF PHASE DIFFERENCE**

1) Candidate of Technical Sciences, Associate Professor Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia *e-mail: sidorenko@bsu.edu.ru*

2) Student. Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia *e-mail: 775939@bsu.edu.ru*

**Abstract**

The article proposes a model that allows to explore a multivariate probability density for random variables representing the cosine of phase difference with uniform distribution. The study demonstrates the results of modeling as a histogram of the experimental data. The developed model allowed getting approximate formulas for the  $n$ -dimensional probability density of the cosine of the phase difference for  $n \leq 5$ . The results of this study may be relevant when assessing the effectiveness of signal reception with random parameters.

**Keywords:** computer modeling; multivariate probability density; incoherent reception; interpolation.

**Введение**

Передача информации по каналам связи, радиолокация, радионавигация, физические эксперименты и т.д. связаны с проблемой измерения и определения параметров сигналов, несущих информацию об исследуемом объекте. Информация может быть заключена в амплитуде сигнала, частоте, фазе, времени задержки и т.д. Во всех этих случаях необходимо определить с некоторой погрешностью истинное значение

измеряемого параметра. Тем более что сигнал, несущий информацию, подвержен воздействию помех и искажений, возникающих, например, в случае многолучевого распространения сигнала. Поэтому алгоритмы, по которым обрабатываются сигналы, должны учитывать случайный характер этих сигналов. В связи с этим была разработана математическая теория обработки сигналов, основанная на теории вероятностей, теории

случайных процессов и математической статистики.

Во многих задачах статистической радиотехники осуществляется прием сигналов, представляющих собой сумму независимых случайных величин. Например, при некогерентном поэлементном приеме с накоплением, выполняется сложение  $n$  элементов сигнала со случайными фазами при постоянной или случайной амплитуде [2]. При этом каждый элемент сигнала представляет собой фрагмент гармонического колебания со случайной начальной фазой, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0 \div 2\pi)$ . Амплитуда суммы  $n$  элементов сигнала представляет собой случайную величину, зависящую от значений фаз каждого из  $n$  суммируемых фрагментов гармонического колебания. Известно [4, 7], что амплитуда суммы двух элементов сигнала с постоянной амплитудой полностью описывается плотностью распределения случайной величины  $\theta = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\Delta\varphi)$ , представляющей собой косинус разности фаз двух суммируемых колебаний.

$$w(\theta) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\theta^2}}, \quad (1)$$

В случае суммирования  $n \geq 3$  элементов сигнала необходимо иметь соответственно  $n$ -мерную плотность вероятности косинуса разности фаз. В теории вероятностей отсутствует формула  $n$ -мерной плотности распределения случайных величин, представляющих собой косинус разности фаз, имеющих равномерное случайное распределение. Тем не менее, потребность в такой формуле возникает всякий раз, когда необходимо выполнить операцию усреднения по случайной величине  $\theta$ . Указанные обстоятельства определяют актуальность темы исследований, изложенных в данной статье.

Для нахождения формул  $n$ -мерной плотности распределения косинуса разности фаз можно использовать [1, 3] либо метод характеристических функций с последующим решением численными методами, либо статистическое моделирование с аппроксимацией экспериментальных данных в виде какой-либо функции. При этом следует иметь в виду, что при  $n \gg 1$  плотность вероятностей  $w_n(\theta)$  должна стремиться к нормальному закону распределения, а при малых значениях  $n$  закон распределения будет сильно видоизменяться. Именно поэтому в данной статье приводятся результаты исследований  $n$ -мерной плотности вероятности

косинуса разности фаз для  $n \leq 5$ , а затем производится оценка нормализации совместного распределения для  $n$  случайных величин при  $n \gg 1$ .

### Основная часть

Целью статьи является исследование  $n$ -мерной плотности распределения вероятностей косинуса разности фаз для малых и больших значений параметра  $n$  методом статистического моделирования.

### Постановка задачи

При некогерентных методах передачи сигналов по каналам радиосвязи фаза принимаемого сигнала обычно является случайной величиной, принимающей значения в пределах от 0 до  $2\pi$ . Пусть фаза сигнала – случайная величина  $\varphi$ , которая распределена равномерно на интервале  $[0, 2\pi]$ . В этом случае [4], закон распределения  $\varphi$  описывается простым выражением  $f(\varphi) = 1/2\pi$  при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Требуется исследовать вероятностные характеристики некогерентного приема радиосигнала с накоплением  $n$  элементов на основе статистического моделирования.

Для исследования  $n$ -мерной плотности распределения вероятностей косинуса разности фаз требуется создать модель, генерирующую заданное множество  $n$  случайных величин  $\theta = \cos(\varphi)$ , где случайная величина  $\varphi$ , которая распределена равномерно на интервале  $[0, 2\pi]$ . Программа должна включать в себе генератор случайных чисел  $\varphi$ , распределенных по равномерному закону в интервале  $[0, 2\pi]$ , тригонометрическую функцию вычисления  $\cos(\varphi)$ , накопитель суммы  $n$  значений и повтор эксперимента со сбором статистики. Для проведения исследований была использована прикладная программа MATLAB®, с помощью которой реализован алгоритм разработанной модели и визуализация результатов моделирования.

Структурная схема разработанной модели изображена на рис. 1.

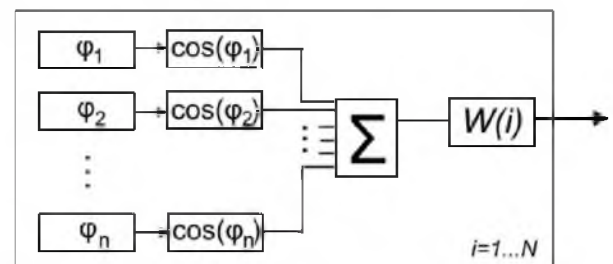


Рис. 1. Статистическая модель  
Fig. 1. Statistical model

Переменными в модели являются два параметра:  $n$  – число слагаемых суммы, и  $N$  – количество опытов в эксперименте. Результат выводится в виде гистограмм, характеризующих статистику полученных значений случайной величины и её закон распределения.

Цель исследований, проводимых на данной модели, – получить законы распределения для заданных значений  $n$  и найти приближение теоретической функции распределения, построенное с помощью выборки из него. Количество опытов принято  $N=100000$ , и это значение использовано для всех экспериментов на данной модели.

Для нахождения выражения, описывающего эмпирические данные, было принято решение

использовать интерполяционные полиномы, и производить соответствующие вычисления в программной среде MATLAB®.

#### Результаты вычислительных экспериментов

В ходе моделирования получены законы совместного распределения  $n$  случайных величин для  $n \leq 5$ . На рис. 2, а, б, в, г представлены результаты моделирования в виде гистограмм при  $n=2, 3, 4, 5$  соответственно.

Сопоставление гистограмм показывает существенное различие законов распределения случайной величины  $\theta_n$  для различных значений  $n$ . При этом очевидно, что уже при  $n=5$  наблюдается нормализация закона распределения случайной величины  $\theta_n$ .

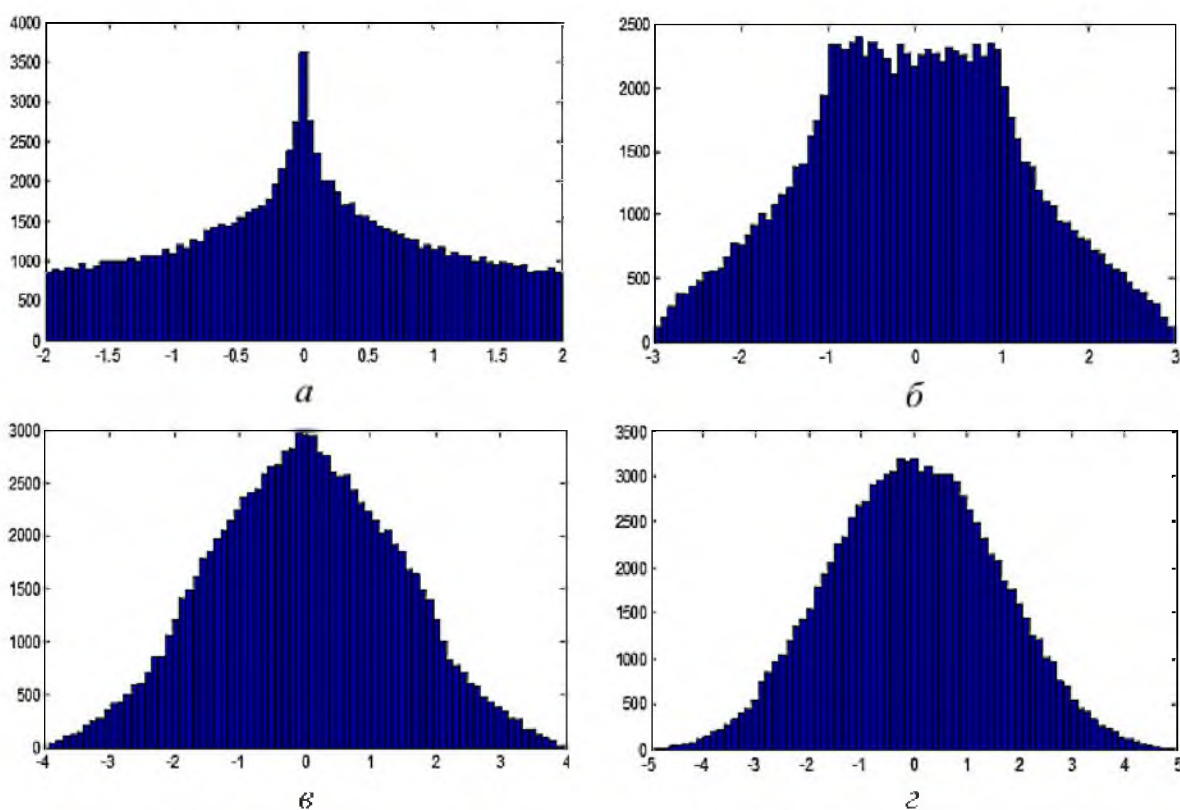


Рис. 2. Гистограммы экспериментальных данных  
Fig. 2. Histograms of the experimental data

Для удобства анализа, на рис. 3 результаты представлены в виде нормированных графиков функции статистики (оггибающих гистограммы).

По полученным графикам можно наблюдать выполнение закона больших чисел, когда совместное действие большого числа одинаковых и независимых случайных факторов приводит к результату, в пределе не зависящему от случая.

Полученное распределение с увеличением  $n$  стремится к нормальному (гауссовому) закону распределения, что является иллюстрацией центральной предельной теоремы для одинаково распределенных слагаемых [1]. В данном случае при  $n=5$  совместное распределение случайных величин уже можно считать близким к нормальному.

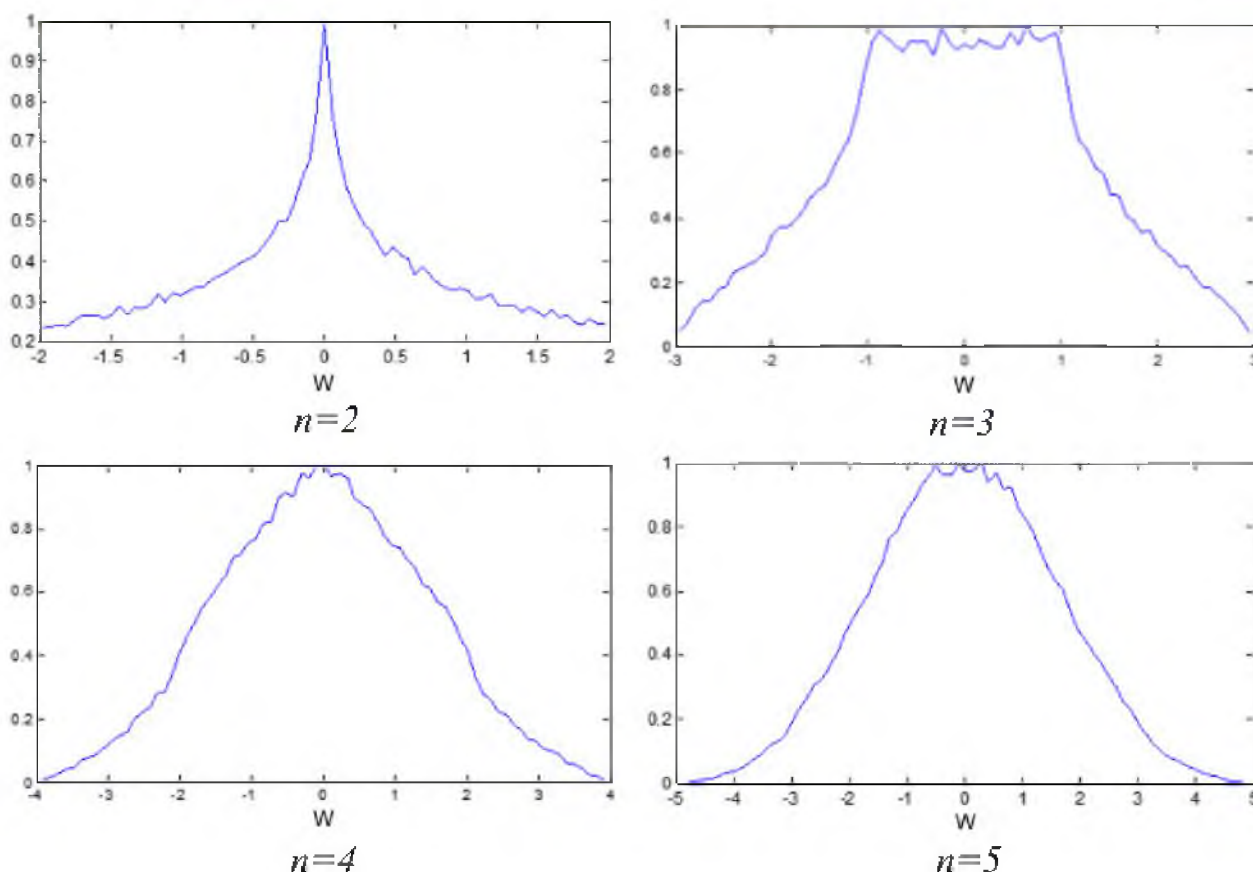


Рис. 3. Нормированные графики огибающих гистограмм  
Fig. 3. Normalized graphs of envelope histograms

Статистические данные, полученные в ходе моделирования и проиллюстрированные в виде графиков на рис. 3, представляют собой определенные математические зависимости, которые удобнее описать в форме аналитически заданных функций. Для этого необходимо произвести интерполяцию и определить уравнение регрессии экспериментальных данных [3].

Для данного исследования оптимальной будет являться интерполяция, приближенная в узлах, позволяющая сгладить неточности и отклонения экспериментальных данных, обусловленные ограничениями, неизбежными при компьютерном моделировании поведения случайных величин [5]. Так, огибающие гистограммы, описывающие законы распределения исследуемых случайных величин, не являются гладкими; ограничение количества опытов конечным числом также не позволяет получить идеальные функции.

Обработка статистических данных моделирования осуществлялась с помощью функции MATLAB polyfit(), которая выполняет

аппроксимацию полиномами. В качестве примера на рис. 4 изображен график интерполирующей функции, представляющей собой полином шестой степени. Задача интерполяции в данном случае сводится к поиску коэффициентов полинома с помощью встроенной функции polyfit().

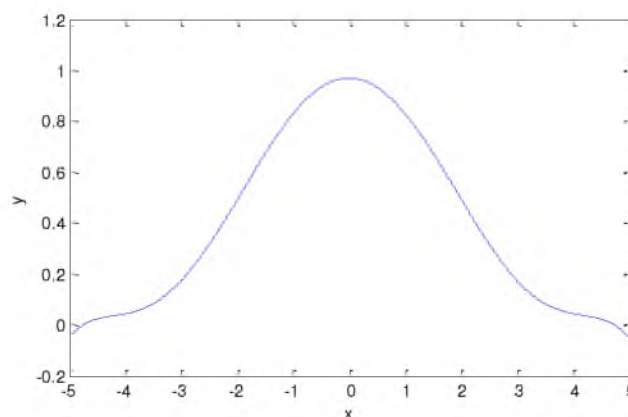


Рис. 4. Функция интерполяции  
Fig. 4. Interpolation function

Данная интерполяция проводилась для функции плотности вероятности при  $n=5$ . Ниже приведено выражение функции интерполяции на рис. 4 в виде формулы (2).

$$f(x) = -0,0002 \cdot x^6 + 0,00002 \cdot x^5 + 0,0085 \cdot x^4 - 0,0002 \cdot x^3 - 0,155 \cdot x^2 - 0,0004 \cdot x + 0,998 \quad (2)$$

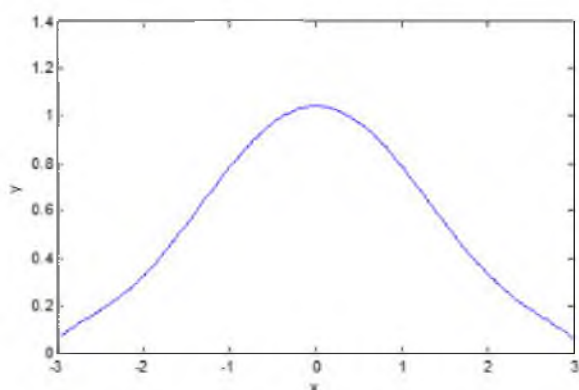
Для оценки точности интерполяции можно произвести расчет среднеквадратическая погрешности по формуле (3).

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N (\tilde{s}(t) - s(t))^2}{\sum_{t=1}^N s^2(t)}}, \quad (3)$$

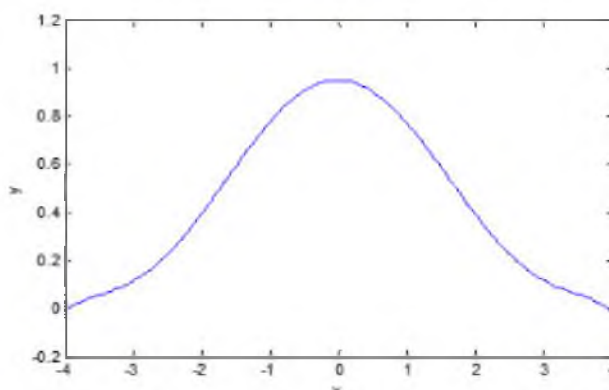
где  $s(t)$  — исходная функция;  
 $\tilde{s}(t)$  — значения аппроксимированной функции, взятые от аргументов исходной.

Для  $n=5$  среднеквадратическая погрешность интерполяции равна 0,024.

На рис. 5 приведены аналогичные аппроксимации для  $n=3,4$ .



$n=3$



$n=4$

Рис. 5. Интерполяция экспериментальных данных

Fig. 5. Interpolation of the experimental data

В (4) и (5) приведены выражения соответствующих функций интерполяции.

$$f(x) = -0,0013 \cdot x^6 - 0,00005 \cdot x^5 + 0,03 \cdot x^4 + 0,0032 \cdot x^3 - 0,28 \cdot x^2 - 0,009 \cdot x + 1,037 \quad (4)$$

$$f(x) = -0,0037 \cdot x^6 - 0,00002 \cdot x^5 + 0,014 \cdot x^4 + 0,0003 \cdot x^3 - 0,19 \cdot x^2 - 0,001 \cdot x + 0,9314 \quad (5)$$

При  $n=3$  среднеквадратическая погрешность интерполяции составила 0,0821; при  $n=4$  – 0,0324.

Для  $n=2$  подобрать простую аппроксимирующую функцию не удалось. Однако вычисление двумерной плотности вероятности не требует поиска аппроксимирующего выражения, так как для него существует точное выражение, определяемое формулой (1).

### Заключение

В результате проведения исследования были получены аппроксимирующие формулы для  $n$ -мерной плотности вероятности косинуса разности

фаз для  $n \leq 5$ . Показано, что для значений  $n > 5$  плотность вероятностей может быть аппроксимирована нормальным законом распределения. Результаты исследований могут быть использованы при проведении статистических расчётов для оценки эффективности методов приема и обработки сигналов со случайными параметрами.

### Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. 6-е изд. стер. М.: Высшая школа, 1999. 576 с.
2. Гуткин Л.С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. 491 с.
3. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 376 с.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Советское радио, 1974. 552 с.
5. Половко А.М., Бутусов П.Н. MATLAB для студента. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 320 с.
6. Потемкин В. Г. Вычисления в среде MATLAB. М.: Диалог-МИФИ, 2004. 720 с.

7. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.

8. Интерполяция функций интерполяционными полиномами // MATLAB.Exponenta / Материалы по продуктам MATLAB & Toolboxes. URL: <http://matlab.exponenta.ru/spline/book1/10.php> (дата обращения: 27.04.2016).

#### References

1. Ventcel' E.S. Probability Theory: High School Textbook, 6th edition. Moscow: Vysshaya Shkola, 1999. P.576.

2. Gutkin L.S. The Theory of Optimal Methods of Radio Reception in Fluctuating Noise. Moscow: Gosehnergoizdat, 1961. P.491.

3. Cooper G., McGillem C. Probabilistic Methods of Signal and System Analysis. Moscow: Mir, 1989. P.376.

4. Levin B.R. Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering. Book One. 2nd edition. Moscow: Sovetskoe Radio, 1974. P.552.

5. Polovko A.M., Butusov P.N. MATLAB for Students. St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2005. P.320.

6. Potemkin V. G. Calculations in MATLAB. Moscow: Dialog-MIFI, 2004. P.720.

7. Tikhonov V.I. Statistical Radios. 2nd edition. Moscow: Radio i Svyaz', 1982. P.624.

8. Interpolation of Functions by Interpolating Polynomials // MATLAB.Exponenta / Information on products MATLAB & Toolboxes. URL: <http://matlab.exponenta.ru/spline/book1/10.php>. (date of access: April 27, 2016).