УДК 517.983.23

А.В. ГЛУШАК
A.V. GLUSHAK

# КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА - ПУАССОНА - ДАРБУ

# CRITERION OF UNIQUENESS OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE ABSTRACT EULER-POISSON-DARBU EQUATION

*Устанавливается критерий единственности решения обратной задачи для абстрактного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу с финальным условием Неймана.*
*Ключевые слова: уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу, обратная задача, критерий единственности.*

*A criterion is established for the uniqueness of the solution of the inverse problem for the abstract Euler-Poisson-Darboux equation with the final Neumann condition.*
*Keywords: Euler-Poisson-Darboux equations, inverse problem, uniqueness criterion.*

**Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и $A$ - линейный замкнутый оператор в E, область определения $D\{A)$ которого не обязательно плотна в E.**

**Мы будем изучать обратные задачи на конечном интервале O < t < 1 , т. к. общий случай сводится к рассматриваемому заменой переменной $t$ на $t/T$.**

**При $k>0$ рассмотрим задачу определения функции $u\{$ t) G C^( [O, 1 ] $,E)$ принадлежащей $D(A)$ при t G ( O, 1 ) , и элемента $p \in E$, удовлетворяющих сингулярному уравнению Эйлера - Пуассона - Дарбу**

$$u''(t) + -u'(t) = Au(t) + p, \quad 0 < t < 1 \tag{1}$$

**начальным условиям**

**(2)**

**а также финальному переопределению в точке . В настоящей работе будет рассмотрен случай финального переопределения, имеющего вид**

$$u'(1) = щ \in D(A). \tag{3}$$

**Отметим, что при O < k < 1 в условии (2) вместо $u'(0) = 0$ можно задавать и более общее весовое условие**

$$\lim_{t\to+0} t^{k}u'(t) = V_0, \quad V_0 \in$$

**и доказательство основных результатов при этом не изменится.**

**Задача (1)-(3) для эволюционного сингулярного уравнения относится к классу обратных задач (см. [1], [2]) и является, вообще говоря, некорректно поставленной задачей.**

**Требуется восстановить неизвестную, не зависящую от времени $t$, правую часть $p$ уравнения (1) при помощи дополнительного условия (3) в финальный момент времени.**

**Мы будем исследовать вопрос единственности решения рассматриваемой обратной задачи.**

**Ранее в [3] был получен критерий единственности такого рода обратных задач в случае дифференциального уравнения первого порядка, а для несингулярных уравнений второго порядка (случай k = O в уравнении (1)) - в работах [4], [5]. Отметим также, что в работах [3], [4] задавалось финальное переопределение в виде $u(1) = щ$, а в [5] - в виде . В указанных работах приводится обзор публикаций по данной тематике и установлено, что единственность решения обратных задач зависит лишь от расположения на комплексной плоскости собственных значений оператора $A$ и связана с**

**распределением нулей некоторых аналитических функций. В настоящей работе будет показано, что аналогичная ситуация имеет место и в случае обратных задач для сингулярного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу.**

**Исследование единственности решения задачи (1)-(3) сводится к вопросу об отсутствии у уравнения (1) нетривиальных решений** $(u(t),p)$**, удовлетворяющих нулевым условиям**

$$и(0) = 0,\ и'(0) = 0,\ и'(1) = 0, \quad (4)$$

**поскольку нулевое решение** $u(t) = 0,\ p = 0$ **у этой задачи всегда имеется.**

**Нетривиальные решения** $(u(t),p)$ **однородной задачи (1), (4) имеют вид**

$$(u_m(\cdot),p_m) \qquad ((\wedge \kappa(\wedge'\wedge т) \qquad 1)\ \partial m,\partial m')\wedge$$

**где**

$$>'.(«) = г(-)(-)\ /к + 1)(tVI\ \ 1/2\text{-}A:/2 \quad \wedge fc/2\text{-}l/2(f'\wedge)<$$

**Г ( • ) - гамма-функция Эйлера,** $I\ \wedge\ (\blacksquare)$ **- модифицированная функция Бесселя,** $Л_T$ **при некотором** $T\ E\ N$ **является собственным значением оператора** $A$ **с собственным вектором** $Д_T\ \wedge$ **0. Функцию Ук( t, Я) называют нормированной функцией Бесселя и используют также обозначение** $j_{\kappa/2}$ **- i / r( tVl).**

**Сформулируем теперь критерий единственности решения обратной задачи (1)-(3).**

Теорема 1. **Пусть** $K > 0$ **и** $A$ **- линейный замкнутый оператор в** $E$**. Предположим, что обратная задача (1)-(3) имеет решение** $(и(t),p)$**. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции**

$$л(я) = /_{\kappa/2+1/2}(VI)$$

**не являлся бы собственным значением оператора** $A$**.**

Следствие. **Пусть** $A$ **- линейный замкнутый оператор, не имеющий действительных отрицательных собственных значений. Тогда обратная задача (1)-(3) при любом выборе элементов имеет не более одного решения.**

**Например, для заданного на множестве функций**

$$D(Л) = Я2(0,1)\ П\ ЯоЧО, 1), \qquad Я = L2(0,1)$$

**дифференциального оператора Бесселя , где**

$$H\frac{q}{X}\frac{d}{dx}"3“,\ q > 0,$$

**единственность решения рассматриваемых обратных задач сводится к исследованию расположения нулей функции** $I_{q/2-1/2}(\sqrt{z})$**, которые являются собственными значениями оператора** $B_q\wedge$**, и нулей функции** $I_{\kappa/2+1/2}$ **( л/Я) . Отметим также, что важную роль при исследовании единственности играют и промежутки изменения переменных и , поскольку при этом нули каждой из функций Бесселя меняют свое положение.**

**В зависимости от параметров** $K$ **и** $q$**, указанные функции Бесселя могут иметь, а могут и не иметь общих нулей, расположенных на , поэтому единственность решения обратных задач может иметь место, а может и нарушаться. Подробнее о расположении нулей см., например, в работе [6].**

**В случаях** $A = -Bq,\wedge$ **или** $A = iBq\wedge$**, где** $i$ **- мнимая единица, собственные значения оператора** $A$ **лежат либо на** $(0,-Ь\ Co)$**, либо на мнимой оси и не попадают на** $(-Co,0)$**, поэтому соответствующие обратные задачи имеют единственное решение.**

**Далее уже при** $\kappa < 0$ **рассмотрим уравнение Эйлера - Пуассона - Дарбу (1) с неизвестным элементом и зависящей от времени правой частью специального вида**

$$w''(t) + kw'(t) = Aw(t) + t^{1-\kappa}p, \qquad 0 < t < 1. \quad (5)$$

Как следует из работы [7], в этом случае следует задавать начальные условия вида

$$W(0) = O, \lim_{t\to+0} t^{\wedge} w'(t) = W_q, \qquad W_q \in D(A). \tag{6}$$

^i-/c

Задача (5), (6) заменой w ( t ) = (t) сводится к уравнению Эйлера - Пуассона - Дарбу с параметром $2 - \kappa > 0$

$$u''\{t\} + \quad = Au(t) + (1 - \kappa)p, \quad 0 < t < 1 \tag{7}$$

и с начальными условиями

$$u(0) = W_0 \in D(A), \qquad u'(0) = 0. \tag{8}$$

В теореме 1 установлен критерий единственности обратной задачи (7), (8) с финальным условием

$$u'(1) = (1 - k) w_1 \in D(A),$$

которое по отношению к функции w ( t) имеет вид

$$w'(1) + (\kappa - 1) w(1) = W_1. \tag{9}$$

Таким образом, для обратной задачи (5), (6), (9) справедлив следующий критерий.

Теорема 2. Пусть к < 0 и ^ - линейный замкнутый оператор в $E$. Предположим, что обратная задача (5), (6), (9) имеет решение ( w ( t) ,p ) . Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

$$= \frac{hl2-kl2}{l3/4-fc/4} (\sqrt{I})$$

не являлся бы собственным значением оператора $A$.

Сделаем замечание об обратной задаче с финальным условием

$$u(1) = U_1, \tag{10}$$

задаваемом вместо условия (3). Как установлено в работе [8], характеристическая функция /д. (Я) обратной задачи (1), (2), (10) имеет вид

$$XkW = -J \quad . 1$$

и для того, чтобы решение обратной задачи (1), (2), (10) было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль характеристической функции не являлся собственным значением оператора $A$ .

Нули характеристической функции /д(Я) не являются нулями функции Бесселя, явно не выписываются, поэтому для указанной задачи метод доказательства достаточности, использующий разложение в ряды Фурье - Бесселя, не проходит.

В работе [8] также указано, что для однозначной разрешимости задачи (1), (2), (10) с ограниченным оператором $A$ необходимо и достаточно, чтобы на спектре оператора $A$ выполнялось условие

$$XkW \wedge 0, \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Кроме того, приводится достаточное условие однозначной разрешимости и с неограниченным оператором $A$.

В заключение укажем, что рассматриваемая в [9] задача Дирихле для уравнения Бесселя - Струве

$$u''(t) + \frac{\kappa}{t}(u'(t) - u'(0)) = Au(t), \tag{11}$$

$$u(0) = U_0, \quad u(1) = U_1 \tag{12}$$

была переформулирована и решена как обратная задача нахождения функции и входящего в уравнение (11) элемента p = u ' ( 0) ∈ D(A ) , одновременно являющегося вторым начальным условием из уравнения

$$u''(t) + -u'\{t\} = Au(t) + -p, \quad 0 < t < 1 \tag{13}$$

**по начальному и финальному условиям из равенства (12). Уравнение (13) отличается от уравнения (1) тем, что оно содержит зависящую от времени правую часть специального вида.**

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00732).*

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

**1. Денисов А.М. - Введение в теорию обратных задач - М.: Изд-во МГУ, 1994.**

**2. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. - Methods for solving inverse problems in mathematical physics - New York. Basel. Marcel Dekker. 2000.**

**3. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром - Дифференц. уравнения. - 2000 - Т. 36, № 8 - С. 1132 - 1133.**

**4. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг - Леффлера. - Дифференц. Уравнения. - 2002 - Т. 38, № 5 - С. 637-644.**

**5. Алмохамед М. Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода. - Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. - 2019. - № 3 - С. 50-58.**

**6. Керимов М.К. Исследования о нулях специальн^хх функций Бесселя и методах их вычисления. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2014 - Т. 54, № 9 - С. 1387-1441.**

**7. Глушак А.В. Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу. - Дифференц. уравнения. - 2018 - Т. 54, № 5 - С. 627-637.**

**8. Глушак А.В., Попова В.А. Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу. - СМФН. - 2006. - Т. 15. - РУДН, М. С. 126-141.**

**9. Глушак А.В. О разрешимости граничных задач для абстрактного уравнения Бесселя - Струве. - Дифференц. уравнения - 2019 - Т. 55, № 8 - С. 1103-1110.**

Глушак Александр Васильевич
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
Д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
E-mail: glushak@bsu.edu.ru