УДК 517.983

В.Б. ВАСИЛЬЕВ, А.А. ХОД^1РЕВА

V.B. VASILYEV, A.A. KHODYREVA

О ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

ON DIGITAL OPERATORS IN THE THEORY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

В данной статье авторами рассматриваются дискретные функции в конусе, рассматриваются свойства их дискретных преобразований Фурье. Данные свойства связаны аналитичностью исследуемых классов функций в специальных областях многомерного комплексного пространства.

Ключевые слова: дискретная область, дискретное преобразование Фурье, аналитичность.

In this article, the authors consider discrete functions in a cone, consider the properties of their discrete Fourier transforms. These properties are related by the analyticity of the studied classes of functions in special areas of a multidimensional complex space.

Keywords: discrete domain, discrete Fourier transform, analyticity.

Пусть D - выпуклый конус, не содержащий целой прямой, и D - сопряженный конус к D, т.е.

D={x e R^m : x • y >, y e D}.

Обозначим D_d = hZ^m , h > 0, h = h^{-1} , множество вида hT^m +i D обозначим T(D) с C^m. Для hT^m = R^m (h ^ 0) такие множества многомерного комплексного пространства называют радиальными трубчатыми областями над конусом D [1]. Вводим функцию

$$Bdi\text{-}Z) = \wedge\ hf\wedge.z = \wedge\ \text{-Ь G hT"}\wedge$$

x£Dd

и определим оператор

$$(BduXO = \lim_{T\text{->}0} \int_{hT^{m}} Ba(z- 7])ua(r])d7].$$

Данный оператор будет представлять собой конический аналог периодического преобразования Гильберта [2, 3,4].

Далее вводятся дискретные аналоги пространства Шварца S(hZ^m) и пространств Соболева - Слободецкого H^s(hZ^m), H^s(D) [3, 4]. Рассматриваются функции дискретного аргумента u_d на дискретном множестве D_d.

Положим P_d : H^s(hZ^m) ^ H^s(D) - проектор на D_d, т.е. V u_d G H^s(hZ^m)

.

Дискретное преобразование Фурье будет определяться формулой

$$(Fd\wedge d)(0 = \wedge e\wedge\wedge\text{-}\wedge ua(x)h\wedge, \qquad \wedge\ G\ h\ [\text{-тт; тт}]"\wedge.$$

xEihZ™-

Свойство 1. Для u_d G S(hZ^m) справедливо следующее тождество:

FdPdud = BdFdud.

Доказательство. Если введем функцию X (£) как характеристическую функцию дискретного конуса Dd , то очевидным будет равенство

$$(Pd\wedge d)(x) = X(x)uД x).$$

Для того чтобы применить теорему о свертке, необходимо регуляризовать характеристическую функцию X (x) множителем e ^^ '"-, т G D, так, что произведение X (x) e"^ будет являться уже интегрируемой функцией.

После этого можно воспользоваться теоремой о свертке двух функций X (£) ^ и u_d (x) . Теперь согласно определению $B_d(z)$ и свойствам преобразования Фурье получаем утверждение Леммы 1.

Замечание. Из свойства 1 следует, оператор B_d: $L^2(hT^m)$ ^ $L^2(hT^m)$ - будет линейным ограниченным оператором с нормой, не зависящей от h, она равна 1.

Свойство 2. Функция Bd(z) аналитична в области T(D) и удовлетворяет оценке

hT™

где постоянная C не зависит от h.

Доказательство. Условия Коши - Римана проверяются непосредственно.

Необходимо воспользоваться аргументами из [1]. Согласно равенству Парсеваля, имеем:

I |Sa(f + iT|2df = 1~.1 / (2mг)^ ^ |gtX-Z| x£Dd 2^т ^ (2mгУ x£Dd ,2x-т

hT™

1 / (2mгУ I x£Dd ,-2|x|-|x|-cos(x,T)^m

где (x,m) обозначает угол между x и т. Последний ряд будет сходящимся только, если т G D. Следовательно,

4т» |S<!« +

где a > 0, X G D’d , т G D”d(cM.[1]).

Необходимо учесть, что для b > 0

00

,-khb-jTj^ _ h ,-hb-hl

к=0

мы получаем

I |B,(f+ixpdf <c(^—A_) ,

hT™

Это завершает доказательство.

Замечание 2. Очевидно, что при h ^ 0 мы получаем известную оценку [1] вида C” |т| $^{-m}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. - М.: Наука, 1964. - 411 с.

2. Vasilyev A., Vasilyev V. Discrete singular operators and equations in half-space // Azerb. J. Math. - 2013. - V. 3. - No 1. - P. 84 - 93.

3. Vasilyev A., Vasilyev V. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // Math. Model. Anal. - 2018. - V. 23. - No 3. - P. 492 - 506.

4. Vasilyev V. The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochener kernel, discrete pseudo-differential operators // In: T. Simons and C. Tsitouras (Eds.), Proceeding of the International Conference on Numerical Analysis and Applications (ICNAAM - 2016), V. 1863 of AIP Conf. Proc., p. 140014, Melville, 2017. AIP Publishing.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
Д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, и.о. заведующего кафедрой
Тел.: +7(4722) 30-13-56
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Ходырева Анастасия Александровна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
Аспирант кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
E-mail: 711012@bsu.edu.ru