УДК 511.51

Л.Н. КУРТОВА, Н.Н. МОТЬКИНА
L.N. KURTOVA, N.N. MOT'KINA

О ЗАДАЧЕ КЛООСТЕРМАНА

KLOOSTERMAN PROBLEM

В работе приведен результат изучения главного члена асимптотической формулы задачи Клоостермана.

Ключевые слова: асимптотическая формула, сумма Гаусса, сумма Клоостермана.

The paper presents the result of studying the main member of the asymptotic formula of Kloosterman's problem.

Keywords: asymptotic formula, Gauss sum, Kloosterman sum.

Клоостерман Х. рассматривал задачу о представлении натурального числа n в виде квадратичной формы $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, где a, b, c, d - натуральные, x, y, z, t - целые числа. Он получил асимптотическую формулу числа таких представлений:

$$r(n) = \frac{\pi^2 n}{\sqrt{abcd}} S(n) + ,$$

где

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q),$$

$$A(q) = \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{nl}{q}} S(q;al;0)S(q;bl;0)S(q;cl;0)S(q;dl;0), \quad A = 1,$$

$$S(q;U;0) = \sum_{l=1}^{q} e^{2\pi i \frac{Ul^2}{q}}$$

сумма Гаусса. Также в работе [1] Клоостерман Х. описал случаи, когда число n не представимо в виде квадратичной формы $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$.

Выражение главного члена асимптотической формулы задачи Клоостермана в виде произведения по простым числам, применение точных формул для сумм Гаусса позволяет дополнить рассмотренные случаи [1]. Ранее авторами был получен результат для нечетных простых р, входящих в разложение a, b, c, d, n, при которых уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений [2].

В настоящей работе представлен результат для четного простого p, входящего в разложение a, b, c, d, n, когда число решений уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ равно нулю. Случай является новым и не рассматривался ранее.

Теорема. Пусть (n; 2) = 1 и три коэффициента делятся на 2:

$$a = 2^{\alpha} a_1, (a_1; 2) = 1, b = 2^{\beta} b_1, (b_1; 2) = 1, c = 2^{\gamma} c_1, (c_1; 2) = 1, (d, 2) = 1,$$

$$3 < \alpha < \beta < \gamma.$$

Тогда уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений в следующих случаях

$$\left(\frac{-1}{dn_1}\right) = -1 \text{ или } \left(\frac{}{dn}\right) = -1.$$

Для доказательства теоремы используются вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Для одномерной суммы Гаусса

$$S(q; I; m) = J\ e\ q \quad i=1$$

справедливы следующие утверждения:

1. Если (/; 2) = 1, то

$$S(2^{a};/;0) = \begin{cases} 0, \text{ если } a = 1, \\ \Gamma 2^{a/2}(1 + i), \text{ если } a > 1. \end{cases}$$

2. Если $(q; /) = n$, то

$$S(q; 1; m) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ не делит m}, \\ nS(q / n; I / n; m / n), & \text{если } n \text{ делит m}. \end{cases}$$

Доказательство. [3. с. 20].

Лемма 2 Пусть

$$K(2^{a}; n;0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2^{a}} e^{-2\pi i \frac{nl}{2^{a}}}$$

сумма Клоостермана. При (n; 2) = 1, $a > 1$

$$K(2;n;0) = -1; K(2^{a};n;0) = 0 .$$

Доказательство. [3. с. 46].

Лемма 3. Пусть

$$K_{1}(2^{a}; n;0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2^{a}} l e^{-2\pi i \frac{nl}{2^{a}}}$$

измененная сумма Клоостермана. Пусть (n; 2) = 1, $a > 2$, тогда

$$K_{1}(2; n;0) = -i, K_{1}(4; n;0) = 2 \cdot \left(\frac{-1}{n}\right), K_{1}(2^{a};n;0) = 0.$$

Доказательство.

$$K_{1}(2; n;0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2} l e^{-2\pi i \frac{nl}{2}}$$

$$K_{1}(4; n;0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2^{2}} l e^{-2\pi i \frac{nl}{2^{2}}} = \sin \ldots \sin \ldots \, 3mn \begin{cases} 2, \text{ если } n = 1(\text{mod}4), \\ -2, \text{ если } n = 3(\text{mod}4). \end{cases} = 2 \cdot \left(\frac{-1}{n}\right)$$

при $a > 1$

$$K_{1}(2^{a};n;0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2^{a}} l e^{-2\pi i \frac{nl}{2^{a}}} = \ldots \frac{\ldots - 1}{e^{-2\pi i \frac{n}{2^{a-1}}} - 1} = 0.$$

Лемма 4. Пусть

$$K_{2}(2^{a}; n;0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2^{a}} \left(\frac{2}{l}\right) e^{-2\pi i \frac{nl}{2^{a}}}$$

обобщенная сумма Клоостермана. Если (n; 2) = 1, $a > 3$, тогда

$$K_{2}(8;n;0) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{n}\right), K_{2}(2^{a};n;0) = 0 .$$

Доказательство.

$$K(8;n;0) = \wedge \wedge^2 \wedge e^{2\,1} \; 2^3 = (1 - (1 - e - '' '^{in}) = (1 + \wedge^2 \wedge (1 -) \wedge 2^{1} = 2y[2 \frac{2}{n}$$

$(l,2)=1$

при $a > 3$

$$K(2^a;n;0) = e^{-2\wedge 7 - 2a}(1 - e^{\frac{2Ж1 - \Pi e - 1\wedge^{-2жl n}}{2a-1}}) \frac{1A}{-e^{-2mi-\frac{n}{2a}} - 1} = 0.$$

Лемма 5. Пусть

$$K_{,,}(2^a,n;0) = \wedge I\, y\, Ii\, e^{2\, 2\, I - 2i\, l_{,,} - 2^a}$$

$(l,2)=1$

обобщенная измененная сумма Клоостермана. При $(n; 2) = 1$, $a > 3$

$$K(8; n, 0) = \wedge 2 \blacksquare f^{-1} Y^2 1, \; K_{,,}(2^a, n, 0) = 0.$$
$$\wedge\, n\, K\, n\, J$$

Доказательство.

$$K_{2,}(8;n;0) f\, 1 \; \underset{(l.2)=1}{\overset{2^3}{i=}} \; 2\,1\, e^{-2л,m\, 2^3} = (1 - e\text{-}\wedge^n)ie\text{-}\wedge^{\text{‘}n'4}(1 + e^{\wedge\text{”}n/2}) =$$

$$= 2i(2\cos\frac{яп}{2}\cos\frac{nn}{4} - 2i\sin\frac{nn}{2}\sin\frac{nn}{4}) = A/2 \bullet \wedge fZ \; \frac{f-1'}{V\, n}, \frac{f\,2'}{V\, n}.$$

при $a > 3$

$$K_2 i\,(2^a; n;0) = ie^{\frac{2ni}{2a}}(1 + e^{\frac{-2e\, '2nn}{2a-1}}) \frac{\wedge\, 4}{-e^{-2ni-\frac{n}{2}9a-2} - 1} = 0$$

Доказательство теоремы.

Воспользуемся свойством мультипликативности функции $A(q)$, тогда

$$\wedge(n) = \sum_{q=1}^{ад} A(q) = \prod_{p} (1 + A(p) + A(p^2) + \ldots).$$

Рассмотрим явные формулы для таких множителей при $p=2$. Так как $S(2; dl; 0) = 0$ по лемме 1, то $A\{2) = 0$. По лемме 1 имеем

$$S(4; al; 0)\, S(4; bl; 0)\, S(4; cl; 0)\, S(4; dl; 0) =$$

$$= 4S(1; \wedge 2^{a-2}1; 0) \bullet 4S(1; \backslash 2^{\wedge -2}1; 0) \bullet 4S(1; q2''^{-2}1; 0) \bullet 2(1 + i^{dl}) = 2^7(1 + i^{dl}).$$

Тогда

$$A(4) = -\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2} e^{1\wedge \,\wedge nl} \; 4\text{‘}'' 4 = \frac{1}{-}(Kn,0) + 4 \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}} e^{\wedge\, \wedge nl -4ni-} 4\wedge\wedge 4 \wedge$$

По лемме 2 $K(4; n; 0) = 0$. Если $d = 1 \pmod 4$, то $\wedge(4) = 1/2 \bullet K.(4; n;0)$. Если $d = 3 \pmod 4$, то $\wedge(4) = -1/2 \bullet K(4; n;0)$. По лемме 3 имеем

$$A(4) = \text{'}\wedge 11 \; V\, dn\, J$$

Из леммы 1 следует

$$S(8; al; 0)\, S(8; bl; 0)\, S(8; cl; 0)\, S(8; dl; 0) =$$

$$= 8S(1; \wedge 2^{a-3}1;0) \bullet 8S(1; \wedge 2^{\wedge -3}1; 0) \bullet 8S(1; q\, 2''^{-3}1;0) \bullet \{^2 12^{3/2}(1 + i^{dl}) = [^2 12^{21/2}(1 + i^{dl}).$$
$$V\, dl\, J \qquad V\, dl\, J$$

Тогда

A(8) = 2^-3/2 d 8 I=1 (I,2)=1 -2rn^n1 ^ 2 I 1(1 + i') = 2^-3/2 (2 1 (x,(8,n,0) + [-11K22,(8, и,0)) d d

По леммам 4 и 5 получаем

A(8) = — I (1 + dn dn .

A(q) =0 при a > 3.

Получаем множитель

П 2 a= p^a a1, (ai,2)=1 b = (b1,2)=1 c=p^c., (c,2)=1 (d,2)=1 (n,2)=1 3<a<p<y '-Г 2 -1 Л 1 dn dn I(1 dn J) П 2 a= p^a a1, (a1,2)=1 b=p^b^, (b1,2)=1 c=p^c., (c,2)=1 (d,2)=1 (n,2)=1 3<a<p<y (1 d^, V dn}

Множитель равен 0 при --- I =-1 или — I =-1. Теорема доказана.
dn J dn J

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kloosterman, H.D. On the representation of number in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Acta mathematica. - 1926. - V. 49. - P. 407-464.
2. Куртова Л.Н., Мотькина Н.Н. О видах решений задачи Лагранжа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. - 2019. - Т. 166. - С. 41-48.
3. Малышев, А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. - 1962. - Т. 65. - С. 3-212.

Куртова Лилиана Николаевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
К.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
Тел.: +7(4722) 30-13-56
E-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Мотькина Наталья Николаевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
К.ф.-м.н., доцент кафедры математики
Тел.: +7(4722) 30-13-00*28-13
E-mail: motkina@bsu.edu.ru