УДК 517.9

В.А. ПОЛУНИН, А.П. СОЛДАТОВ
V.A. POLUNIN, A.P. SOLDATOV

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC SYSTEM

В ограниченной области трехмерного пространства D с R^3 рассматриваются вопросы фредгольмовой разрешимости задачи Римана - Гильберта для эллиптической системы Моисила - Теодореску. Также рассмотрены некоторые частные случаи этой задачи и условия их фредгольмовой разрешимости.

Ключевые слова: эллиптическая система, краевая задача, фредгольмовость задачи, индекс, матрица Паули, система Моисила - Теодореску.

We consider the Fredholm solvability of the Riemann-Hilbert problem for the Moisil-Teodorescu system in a bounded domain of three-dimensional space. We also is considered some special cases of this problem and conditions for their Fredholm solvability.

Keywords: elliptic system, boundary value problem, Fredholm solvability, index, Pauli matrix, Moisil-Teodorescu system.

Для вектор-функции $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ **в области** $D \subseteq R^3$ **рассмотрим систему Моисила - Теодореску**

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) u(x) = 0, \qquad (1)$$

записанную в матричном виде, где соответствующая матрица имеет вид

$$M(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

По отношению к паре комплексно-значных вектор-функций

$$\phi_1 = u_2 - iu_1, \quad \phi_2 = u_4 + iu_3$$

система (1) может быть записана в комплексной форме

$$E_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + E_2\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + E_3\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0, \quad \phi = (\phi_1, \phi_2) \qquad (2)$$

с матричными коэффициентами Паули

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для системы (1) в области $D \subseteq R^3$**, ограниченной гладкой поверхностью** Γ**, рассмотрим задачу Римана - Гильберта**

$$Bu^+ = f \qquad (3)$$

с 2 X 4 матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$

Здесь u ^ означают предельные значения функции u на границе Γ .

Перепишем задачу (3) в виде

$$\mathrm{Re}\ 0\phi\text{^}= f, \qquad (4)$$

где 2 X 2 матрица - функция G определяется элементами

$$^{G}k\backslash = {}^{b}k2 + \quad 2.\ ^{G}k2 = {}^{b}k4 \text{“} \text{^}^{b}k3 .$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. Согласно [1] в предположении Γ е , B е (г), $0 < v < 1$ задача (1),

(3) фредгольмова в классе C ^(D),0 <^<v, тогда и только тогда, когда вектор $l = (li, I_2, 13)$ краевого условия (3) с компонентами

$$l_1 = \det B^{12} + \det B^{34},\ l_2 = \det B^{13} - \det B^{24},\quad l_3 = \det B^{bb} + \det B^{23}$$

где B^{ij} - матрица, составленная из /-го и j-го столбцов, не выходит в касательную плоскость всюду на Γ . В общем случае, для многосвязной области D [2], при выполнении аналогичного требования на вектор l, задача (1), (3) фредгольмова, и ее индекс определяется формулой

$$a = m - s,$$

где 5 - число связных компонент поверхности Γ, а m - суммарный ее род (т. е. сумма родов ее компонент).

Частным случаем задачи (4) для системы (3) является C - линейная задача

$$a\phi 1 + b\phi 1 = f'' \mid a \mid + \mid b \mid = 1, \qquad (5)$$

с комплекснозначными функциями $a = a_1 + ia2,\ b = \text{^}1 + ib_2\ e\ C^{v}$ (Г)

Для этой задачи

$$B = \begin{matrix} a2 & a1 & - & b2 & b1 & \text{^} \\ - & a1 & a2 & b1 & b2 & \end{matrix}$$

и, соответственно,

$$l1 = \mid a \mid^{9} - \mid b \mid^{9},\ l2 = 2(a2b1 - a1b2),\ l3 = 2(a1b1 + a2b2)$$

При этом длина |l|=1.

Обратно, если исходить из единичного вектора l, то

$$2 \mid a \mid^2 = 1 + 1_1,\ 2 \mid b \mid^2 = 1 - 1_1,\ 2ab = \quad l_3 - \quad il_2.$$

Возникает вопрос, при каких условиях задача (3), (5) фредгольмова, т. е. когда вектор (6) не выходит в касательную плоскость. В работе найдены необходимые и достаточные условия на коэффициенты a,b, обеспечивающие положительное решение этого вопроса.

Введем на Γ замкнутые множества $F\sim = \{y\ e\ \Gamma, 1 + 11 = 0\}$.

Лемма. На торе Γ с параметрическим представлением

$$\text{^}1 = \sin ?_1,\ \text{^}2 = (2 + \cos i_1)\cos ?_2,\ \text{^}3 = (2 + \cos i_1)\sin ?_2,\ -\text{^}< ?_1,\ ?2\ -\text{^},$$

существует некасательное векторное поле l единичной длины для каждого из четырех случаев

$$F += F \sim = в: \qquad F += в,\ F\ в;$$

$$F \sim = в,\ F + \text{^}в;\ F + \text{^}в,\ F \sim \Phi в,$$

где $в$ - пустое множество.

Лемма. Если Γ не гомеоморфна тору, то для заданного единичного некасательного вектора l по крайней мере одно из множеств $F\sim$ не пусто.

Будем говорить, что контур $L \wedge \Gamma$ **разделяет множества** $F^\wedge$ **и** F**, если каждая компонента** $\Gamma \setminus F$ **может содержать точки только одного из этих множеств.**

Теорема. **Пусть кусочно-гладкий контур** $L \wedge \Gamma$ **разделяет множества** $F_\sim$**. Тогда система (5) разрешима тогда и только тогда, когда для любых двух связных компонент** $\theta \setminus, \ G\ 2$ **открытого множества** $\Gamma \setminus F$ **с общей границей** $L = dOi$ **n**$_5$**G**$_2$**, ориентированной положительно по отношению к Gi, приращение аргумента arg** $_{(/3}$ **—** $//_2$**) на контуре** iL **равно нулю.**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Soldatov A.P., The Riemann-Hilbert boundary value problem for the Moisil-Theodoresco system, Journal of mathem. sciences, 2019, 239, 3, P. 349-363.**
2. **Полунин В.А., Солдатов А.П. Об интегральном представлении решений системы Моисила-Теодореску в многосвязных областях // Доклады Академии Наук, 2017, Т. 475, № 4, С.369-372.**

Полунин Виктор Александрович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
К.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
Тел.: +7(4722) 30-13-56
E-mail: polunin@bsu.edu.ru

Солдатов Александр Павлович
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва
Д.ф.-м.н., профессор
E-mail: soldatov48@gmail.com