УДК 517.958

И.Н. БЕЛЯЕВА, Л.В. МИГАЛЬ
IN. BELYAEVA, L.V. MIGAL

РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ МЕТОДОМ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

CALCULATION OF MOTION INTEGRALS USING THE METHOD NORMAL FORM

В данной статье представлен метод Биркгофа - Густавсона построения нормальной формы и существующих приближенных интегралов движения для гамильтоновых систем с произвольным конечным числом степеней свободы. Приведены расчеты для конкретной гамильтоновой системы с двумя степенями. Полученные выражения для нормальной формы и приближенного интеграла движения совпадают с результатами, имеющимися в литературе.

Ключевые слова: метод Биркгофа - Густавсона, гамильтонова система, нормальная форма, интеграл движения

In given article presents the Birkhoff-Gustavson method for constructing a normal form and existing approximate motion integrals for Hamiltonian systems with an arbitrary finite number of degrees of freedom. Calculations for a specific Hamiltonian system with two degrees are given. The obtained expressions for the normal form and the approximate integral of motion coincide with the results available in the literature.

Keywords: Birkhoff-Gustavson method, Hamiltonian system, normal form, integral of motion

Суть метода нормальных форм состоит в том, чтобы преобразовать заданный дифференциальный оператор Г амильтона в ряд, в общем бесконечный, в котором каждый его член представляет простое дифференциальное выражение [1,2]. Представленный подход применим для достаточно широкого класса операторов Гамильтона разной размерности [3, 4].

Рассмотрим классическую гамильтонову систему с произвольным конечным n числом степеней свободы

$$H(q,p) = \sum_{k=1} (p_i + q_l) + \sum_{S=3} \sum_{l_1 + \dots + l_n + m_1 + \dots + m_n = S} C_{l_1 \dots l_n, m_1 \dots m_n} p_1^{..} p_2^{..} \dots q_1 q_2 \dots q_n \qquad \text{(l)}$$

где $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ - канонически сопряженные переменные,

$\dots m_n$ - известные коэффициенты, ω_k - частоты.

Затем, выполняя канонические преобразования (q,p) ^(^,^), где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, с производящей функцией

$$F(q,q) = q \cdot q + W(q,q) \qquad (2)$$

приводим гамильтонову функцию (1) к нормальной форме Биркгофа - Густавсона $H(q, p) \to G(\xi, q)$. Гамильтонова функция $G(\xi, q)$ имеет нормальную форму, если выполняется условие

$$DG(\xi, q) = 0, \qquad (3)$$

где дифференциальный оператор нормальной формы имеет вид

$$D = \sum_{k=1} \left(\eta_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} - \xi_k \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right) \qquad (4)$$

Гамильтонова функция H(q, p), ее нормальная форма $G(\xi, q)$ и функция W(q,q) представляются следующими суммами:

$$H(q,p) = \sum_{S=2} H^{(S)}(q,p), \quad H^{(S)}(q,p) = \sum_{|l|+|m|=S} h_{lm} q^l p^m, \qquad (5)$$

$$G_S\wedge_{AX},П) = \sum_{S=2}^{SMAX} G'_s(i,4).\ G'\wedge>(i.4) = Z\ Гт\wedge'ч'', \quad I'l+1''=S \tag{6}$$

$$w_{smax}(q.4) = \sum_{S=2}^{SMAX} \wedge S\wedge(q.4).\ W\wedge S\wedge(q.4) = Z\ \wedge'''\wedge'ч'' \quad I'l+1\ ''\backslash=S \tag{7}$$

Здесь величины h'_m известны, но $У'_m$ и w ''' являются неизвестными коэффициентами, которые с учетом условия (4) находятся из следующего дифференциального уравнения:

$$D(q.4)W^{(S)}(q.ч) = -H^{\wedge S)}(q.4) + G^{\wedge S)}(q.4).\ s = 2.3. \_ \tag{8}$$

При помощи разработанной символьной REDUCE программы [5] получаем таким образом производящий полином $W(д.ч)$ и нормальную форму $G(\wedge.4)$. которые имеют вид суммы однородных полиномов разных степеней по переменным $\wedge$ и 4 ■

Для решения основного уравнения (8), введем новые комплексные канонически сопряженные переменные ($x.\ y$):

$$q_{\wedge} = \wedge x_{\wedge} + iy_{\wedge\wedge}.\ ч_{\wedge} = \wedge X_v - iy_v).\quad i = \wedge f - 1.\ у = I.2. — .^n. \tag{9}$$

в которых оператор нормальной формы (4) будет диагональным

$$D(x.\ y) = iZ\wedge v \wedge \frac{d\ d}{dx_v} y_v \quad k\ y$$

Основное уравнение (8) примет вид

$$D\{x,y)jW^{\wedge S)}(x.y) = -H^{\wedge S)}(x.y) + (5^{(S)}(x.y) \blacksquare \tag{10}$$

Линейный оператор $D(x.\ y)$ определен в функциональном пространстве всех однородных полиномов степени S от $2n$ переменных ($x.\ y$), где $x = (x.\ X.\ —\ .\ X)$. $y = (y_1.y_2.\ —\ .y_n)$ п-мерные векторы. Размерность этого функционального пространства определяется по формуле

$$M = \frac{(2п + S - 1)!}{(2п - 1)!S!} \tag{11}$$

и однородные мономы степени S вида $cD^{(S)} \wedge x'\wedge y'' = x'\ x\backslash — X'\wedge y''''\ y''^2 — y''^п$, где S = ' +1" = ^ ^ ^ + " + " + — + " образуют в нём базис. Мономы $cp^{(S)}$ являются собственными функциями оператора нормальной формы D($x.\ y$) .

Тогда решение уравнения (10) в комплексных переменных (9) формально можно записать в виде

$$f\sim^{(S)} = D^{-1}\{G^{\wedge S)} - H^{\wedge S)}). \tag{12}$$

где обратный оператор D^{1} определяется соотношением

$$D^{-1}\wedge^{(S)} = \frac{ф^{(S)}}{\sum_v iZ\wedge_v(''_v - '_v\ Y} \tag{13}$$

Совершая обратное преобразование от комплексных переменных (x. y) к переменным (^.ч) по формулам

$$x_v = \sim\wedge\{\wedge_v + i4_v).\ У_v = \wedge\wedge\{4_v - i\wedge_v).\ v = 1.2.—.^n. \tag{14}$$

находим нормальную форму $G^{(s)}(\wedge,\wedge)$ и полином в производящей функции $W(q,\wedge)$ в виде однородных полиномов степени S по переменным $(\wedge,\wedge)$.

При практических расчетах на ЭВМ [6] ряды вычисляются до некоторой заданной максимальной степени. Тогда нормальная форма (5)-(7) и производящая функция (2) представятся следующими усеченными рядами:

$$G_{smax}(S,n) = G'-'(d,\wedge) + G'-'>(\wedge,\wedge) + \wedge + G'^{S\wedge MAX)}(l,\wedge), \quad (15)$$

$$F_{smax}(Ч,Л) = q\wedge + W'-'>(?,\wedge) + W<'>(q,\wedge) + \wedge + W'^{S\wedge'AX}>(q,\wedge). \quad (16)$$

В работе [2] доказано, что существует $(n - r)$ приближенных независимых интегралов движения вида

$$I(d,n) = \sum_{k=1} \frac{}{2}(di^2 + ni). \quad (17)$$

где $\wedge = (\wedge, JU_2, —,\wedge)$ есть любой n-мерный вещественный вектор такой, что выполняются условия

$$\sum_{i=1} a_{ij}\wedge_j = 0, \qquad i = 1,2,3,\wedge r, \quad (18)$$

где матричные элементы ^ - целые числа.

Выполняя обратное сложное преобразование от конечных переменных (d,^) к переменным (q, p) в исходном гамильтониане (1), используя выражения для производящей функции (16), находим все имеющиеся независимые интегралы движения.

В связи со сложностью процедуры приведения исходной функции Гамильтона к нормальной форме согласно методу Биркгофа - Густавсона был разработан алгоритм и составлена программа для символьно-численного вычисления нормальной формы и имеющихся интегралов движения для гамильтоновой системы.

Рассмотрим неинтегрируемую систему Хенона - Хейлеса с двумя степенями свободы [7], описываемую функцией Гамильтона:

$$H = \frac{1}{}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1,q_2), \quad V(q_1,q_2) = \frac{1}{}(q^2 + q^2) + a(q^2q_2 + cq\wedge 2) . \quad (19)$$

В данной работе для функции Гамильтона (19) был вычислен приближенный интеграл движения, согласно представленному методу:

$$I = -\frac{1}{1152} a^2 (1080c^2 q4 + 2160c^2 p2 q] + 1080c^2 p4 + 720cq^2 q] + 480q^2 q] -$$

$$- 96 q^2 pi + 1008cq^2 p^2 + 120q^4 - 576cp\wedge qp2q + 1152 pqp,\wedge. - 96 p^2 q\wedge +$$

$$+ 1008cp2q 2 + 480pf p 2 + 720cp\backslash p\backslash + 240p2 q2 + 120 p4 + 4320ac \wedge q\backslash +$$

$$+ 4320ac p_2 q\wedge + 640aq\wedge q\wedge + 1920acq\wedge q\wedge + 2880ac q\wedge q\wedge - 896aq\wedge p\wedge q, +$$

$$+ 4032acq2 p2q + 288ac^2 q2 p2q + 480acq2q + 640aq2q + 1408apjqp2q2 -$$

$$- 2340ac^2 pq\wedge pq^2 - 576acp\wedge q\wedge p,q^2 + 4032acpq\wedge pl - 4032ac^2 pq\wedge pl -$$

$$-896apqp^2 + 832apql p, -1536acpql p, +128apl q\backslash -1536acp^2q\backslash +$$

$$4896ac^2 p2q3 + 4032ac^2 pi p2 q - 4032acp2 p2 q + 896ap2 p2 q +$$

$$+ 2016acp^2 q^2 q - 192ap^2 q^2 q - 1344acp^lqq + 448ap^lqp2 -$$

$$- 448ap4q + 1344acp4q + 14715a^2c\wedge q2 + 31185a^2c\wedge p2q4 +$$

$$+ 4164\ 31185a^2c4p2q4 + 10395a^2c\wedge p\backslash + 12042a^2c^2q2q2 + 396a^2q2q4 +$$

$$+ 4164a\ cq\wedge q\wedge + 4455a\ c\ q\wedge q\wedge + 7560a\ cq\wedge p\wedge q2 -$$

$$- 1890a^2c^2q2\ p2\ q2 - 840a^2\ q2\ p2q2 + 22680a^2c^2q2\ p2q2 + 364a^2\ q2\ p4 +$$

+ 1021ap\ + 5607a^qf p\ - 2940a^cqlp\ + 1784a^q4q\ + 1782a^'cq^ql +
+ 3123a^c^q4q2 - 560a^q4p2 + 1722a^cq4p2 + 3339a^c^q4p2 + 99a^q6 +
+ 248a^cq6 + 8064a^cp^qp2q3 - 7560a^c^pqp,ql + 2016a^c^pqp,ql +
+ 448a^pq^p,ql + 4536a^c^pi^p^q -18144a^c^pq^plq, + 18816a^'cpq^plq, -
-1344a^pq^plq, -1008a^c^pqf - 4872a^cpq\p,q, + 4816a^p^qfp,q, -
- 84a^pfq4 + 19278a^c^piq4 + 1092a^cplq4 - 5481a^c^piq4 + 56a^pip2q2 +
+ 3528a^cplp2q2 + 2142a^c^piplql + 22680a^c^piplql + 6468a^cp2p4 -
- 3465a^c^pip4 + 12474a^c^pip4 - 308a^pip4 + 840a^piqiqi +
+ 10206a^c^plqlqi + 1008a'^cplqli +12222a^c^p'qip' - 5040a^'cplqlp' +
+ 2632a^plqlp' +1512a^cplql -119a'^plq4 + 2128a^pl^pq2 +
+ 4536a^'cpl^p.q, - 5040a^c^'plqp^^2 + 7371a^c^p4q' - 3654a^cp^q' +
+ 784a^p4qi + 1848a^p4p' -1386a^cp^p' + 4851a^c^p4p' + 1848a^cp^q' -
-231a'p^ql -77a'^pl + 616a^cpf).

Далее было проведено сравнение с результатами, имеющимися в литературе. Полученные выражения для нормальной формы и приближенного интеграла движения при значениях параметров a = 1, c = -1/3 совпадают с результатами, приведенными в статье Ф. Густавсона [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж. Динамические системы. - Москва-Ижевск.: РХД, 2002. - 406 с.
2. Gustavson F.G. On construction formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point // Astronom. J. - 1966. - V. 71. - No. 8. - P. 670-686.
3. Belyaeva I.N., Chekanov N.A., Gusev A.A., Rostovtsev V.A., Vinitsky S.I. A symbolic-numeric approach for solving the eigenvalue problem for the one-dimensional Schrodinger equation// In: Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2006. Lecture Notes in Computer Science; ed. by V.G. Ganzha, E.W. Mayr, E.V. Vorozhtsov. - Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. - V. 4194. - P. 23-32.
4. Чеканов Н.А., Беляева И.Н., Кириченко И.К., Чеканова Н.Н. Символьно-численные методы решения дифференциальных уравнений классической и квантовой механики - Харкiв: «1СМА», 2019. - 420 с.
5. Basios V., Chekanov N.A., Markovski B.L., Rostovtsev V.A., Vinitsky S.I. GITA: a REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians // Comp. Phys. Commun. - 1995. - V. 90. - P. 355-368.
6. Богачев В.Е., Чеканов Н.А. MAPLE: программа символьно-численных вычислений нормальной формы и интегралов движения гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы // Херсон: Вестник Херсонского национального технического университета. - 2011. - № 3 (42). - С. 93-98.
7. Dirac P.A.M. Generalized Hamiltonian dynamics // Proceed. Roy. Soc. - 1958. - V. A246. - P. 326-332.

Беляева Ирина Николаевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
К.ф.-м.н., доцент кафедры информатики, естественнонаучных дисциплин и методик преподавания
Тел.: (4722) 30-13-00*28-16
E-mail: ibelyaeva@bsu.edu.ru

Мигаль Лариса Владимировна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
К.ф.-м.н., доцент кафедры информационных и робототехнических систем
Тел.: (4722) 30-13-71
E-mail: migal@bsu.edu.ru