федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(НИУ "БелГУ")

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ И ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ НА ДИФФУЗИО-И ФОТОФОРЕЗ КРУПНОЙ СЛАБО ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ ПРИ МАЛЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕПАДАХ ТЕМПЕРАТУРЫ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 03.04.02 Физика
очной формы обучения, группы 12001737
Шаполовой Ирины Михайловны

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Малай Н.В.

Рецензент:
к.ф.-м.н., доцент кафедры
естественнонаучных
дисциплин, БУКЭП
Москаленко Н.И.

Белгород 2019

РЕФЕРАТ

При числах Рейнольдса и Пекле много меньших единицы в квазистационарном приближении решена задача о влиянии движения среды (учет конвективных членов в уравнениях диффузии и теплопроводности) на диффузио-и фотофорез крупной слабо испаряющейся капли сферической формы, внутри которой действуют тепловые источники в бинарной вязкой газообразной среде. Получены аналитические формулы для силы и скорости упорядоченного движения капли, в которых учтено не только тепловое и диффузионное скольжение, но и зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры; внутренние течения; плотность тепловых источников и конвективные члена в уравнении теплопроводности как вне, так и внутри капли. Проведенные качественные оценки показали, что движение среды не влияет на диффузиофорез.

Основные результаты опубликованы в работе Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, И.М. Зинькова, З.Л. Шулиманова Особенности диффузио-и фотофоретического движения слабо испаряющейся капли при малых относительных перепадах температуры //Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2019. Том 51, № 1. С. 104-114

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования.

В промышленности и природе достаточно широко распространены многокомпонентные газовые смеси, в которых может возникнуть упорядоченное движение взвешенных в них частиц [1-2]. Физической причиной такого движения являются возмущения, нарушающие состояние термодинамического равновесия. Например, движение частиц может быть обусловлено неоднородным распределением концентраций компонентов газовой смеси или температуры. При этом движение частиц, вызванное внешним заданным градиентом концентраций компонентов газовой смеси, в литературе получило название диффузиофорезом [1-2]. Оно вызвано передачей молекулами многокомпонентной газообразной среды не скомпенсированного импульса взвешенным в них частицам. Это явление отчетливо проявляется в таким процессах как испарения или конденсации.

Другое хорошо изученное в научной литературе явление, которое также обусловлено действием сил молекулярного происхождения – явление фотофореза. Это явление заключается в движении взвешенных частиц в газообразной среде в поле электромагнитного излучения [3]. Механизм этого явления, вкратце, можно описать следующим образом. Электромагнитного излучение взаимодействует со взвешенной в газообразной среде аэрозольными частицами. Эта энергия излучения, поглощаясь в объеме частиц, перерабатывается в тепловую энергию. Тепло неоднородно распределяется в объеме частицы за счет теплопроводности и описывается функцией q_i, которую в научной литературе называют объемной плотностью внутренних источников тепла [3]. За счет этой тепловой энергии происходит неоднородный нагрев поверхности частиц и, следовательно, молекулы газообразной смеси, окружающие частицу, отражаются от нагретой стороны после соударения с ее поверхностью с большей скоростью, чем от холодной. В результате такого столкновения, частица приобретает не скомпенсированный импульс. Он направлен от горячей стороны поверхности частицы к холодной. В зависимости от оптических свойств материала частицы и ее размеров более горячей может оказаться как освещенная, так и теневая сторона частицы. Поэтому наблюдают как положительный (т.е. движение частицы в направлении излучения), так и отрицательный фотофорез. Явления диффузио–и фотофореза практически всегда сопутствуют термодинамически неравновесным аэродисперсным системам.

Диффузио–и фотофоретическая сила может оказывать значительное влияние на процесс осаждения частиц в каналах тепло–и массообменников, на движение частиц в зонах просветления дисперсных систем и в окрестностях, вымывающих частицы, капель; можно использовать при проведении тонкой очистки небольших объемов газов, отборе аэрозольных проб, нанесения, заданной толщины, специальных покрытий из частиц, получение высококачественных оптических волокон и.д. Поэтому изучение особенностей диффузио–и фотофоретического движения является важным и актуальным вопросом и представляет как научный, так и практический интерес.

В природе и промышленности имеют место как летучие, так и нелетучие аэрозольные частицы. Если на поверхности аэрозольной частицы происходит испарение (сублимация) или конденсация образующего их вещества, то такие частицы называют летучими. В случае отсутствия фазового перехода на поверхности частиц их называют нелетучими.

Кроме того, частицы по размерам классифицируют на крупные и умеренно крупные. Для классификации аэрозольных частиц по размерам, взвешенных в многокомпонентных газообразных системах, проводят из сравнения характерных размеров частицы R со средней длиной свободного пробега молекул λ газообразной среды. Для этого применяют критерий Кнудсена [1]: $K_n = \dfrac{\lambda}{R}$ $(\lambda = max(\lambda_1,\ \lambda_2))$. Частицы называются крупными, если $K_n \leq 0.01$ и умеренно крупными при $0.01 \leq K_n \leq 0.3$, где под λ_k подразумевается средняя длина свободного пробега газовых молекул k - сорта.

При теоретическом описании явлений диффузио-и фотофореза вводится важное понятие, которое необходимо при линеаризации системы уравнений газовой динамики – относительный перепад температуры. В общем случае система газодинамических уравнений представляет собой нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и решение такой системы наталкивается на большие математические трудности. Поэтому введение такого понятия позволяет с физической точки зрения существенно упростить систему газодинамических уравнений.

Под этим понятием понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы T_{iS} и температурой вдали от нее T_∞ к последней, т.е. $\dfrac{(T_{iS} - T_\infty)}{T_\infty}$. Если $\dfrac{(T_{iS} - T_\infty)}{T_\infty} \ll 1$, то относительный перепад температуры считается малым. В этом случае коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) считаются слабо зависящими от средней температуры поверхности частицы, а газ рассматривается как несжимаемая среда. При таком подходе система газодинамических уравнений существенно упрощается (коэффициенты молекулярного переноса можно считать постоянными) и решение такой системы не вызывает больших математических затруднений.

В дипломной работе рассматривается влияние движения бинарной газообразной среды на диффузио-и фотофорез крупной слабо испаряющейся капли сферической формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

Тема исследования. Влияние движения бинарной газовой смеси на диффузио-и фотофорез крупных слабо испаряющихся капель сферической формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

Объектом исследования является изучение явлений диффузиофореза и фотофореза в бинарной вязкой газообразной среде.

Предметом исследования: влияние движения среды (учет конвективного члена в уравнении теплопроводности) на диффузио-и фотофорез крупной слабо испаряющейся капли сферической формы.

Цель исследования - получить аналитические выражения, позволяющие учитывать влияние движения среды на силу и скорость диффузио-и фотофореза крупной слабо испаряющейся капли.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие *задачи исследования*:

— изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в сферической системе координат;

— решить уравнения конвективной теплопроводности и диффузии и линеаризованную по скорости систему уравнений Навье-Стокса с соответствующими граничными условиями;

— получить аналитические выражения, позволяющие учитывать влияние движения среды на силу и скорость диффузио-и фотофореза крупной слабо испаряющейся капли;

— провести качественный анализ влияния влияния движения среды на силу и скорость диффузио-и фотофореза.

Научная новизна исследования. В дипломной работе изучается влияние движения среды на диффузио-и фотофорез крупной слабо испаряющейся капли сферической формы в неоднородной по составу бинарной газовой смеси.

Практическая значимость исследования заключается в том, что его выводы и материалы не только дополняют, но и углубляют исследования по данной проблеме, а также могут быть использованы при оценке скорости диффузио-и фотофореза крупной слабо испаряющейся капли в каналах; при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц и т.д.

Апробация исследования. Основные результаты исследования опубликованы в работе Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, И.М. Зинькова, З.Л. Шулиманова Особенности диффузио-и фотофоретического движения слабо испаряющейся капли при малых относительных перепадах температуры //Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2019. Том 51, № 1. С. 104-114

Структура работы. Дипломная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы.

Глава I. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия

Крупная слабо испаряющаяся капля (например, капля ртути) сферической формы радиуса R с плотностью ρ_i и вязкостью μ_i, внутри которой действуют неравномерно распределенные источники тепла плотностью q_i, помещена в неограниченную бинарную вязкую газовую смесь, которая описывается плотностью ρ_e, температурой T_e и вязкостью μ_e. С помощью внешних источников в газе стационарно поддерживаются градиенты относительных концентраций компонент смеси $\nabla C_{1\infty}$ и $\nabla C_{2\infty}$. Через C_1 и C_2 обозначены отношения $C_1 = \dfrac{n_1}{n_e}$, $C_2 = \dfrac{n_2}{n_e}$, $C_1 + C_2 = 1$, $n_e = n_1 + n_2 -$ полное количество молекул в единице объема, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2 -$ плотность газовой смеси, $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, n_1,m_1 и n_2,$m_2 -$ соответственно, концентрация и масса молекул первого и второго компонента бинарной газовой смеси. Между градиентами $\nabla C_{1\infty}$ и $\nabla C_{2\infty}$ имеется очевидное соотношение $\nabla C_{1\infty} = -\nabla C_{2\infty}$.

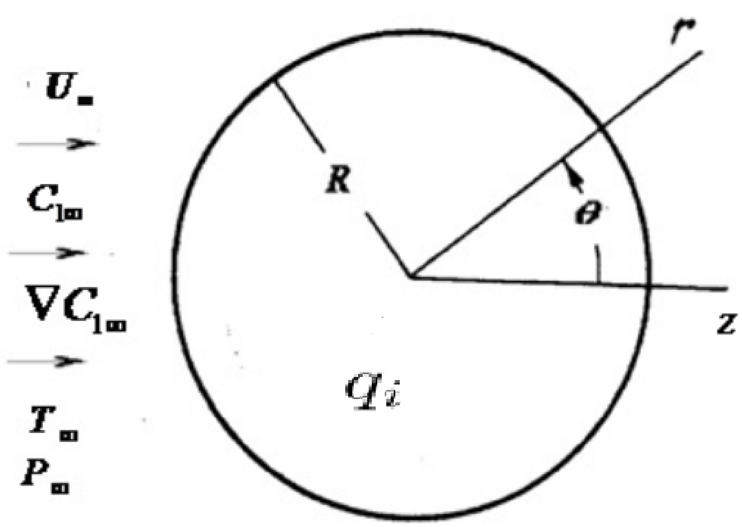

Рис. 1: Обтекание крупной слабо испаряющейся капли

Задача решается в сферической системе координат r, θ, φ $(0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi)$. Начало координат совместим с центром масс капли, а полярную ось $(z = r\cos\theta)$ направим вдоль градиента относительной концентрации молекул первого компонента $\nabla C_{1\infty}$. Такой выбор начала координат обусловлен следующими обстоятельствами. Поскольку мы совместили начала координат с центром масс капли, то каплю можно считать покоящейся, а бинарную смесь – движущейся с постоянной скоростью $\mathbf{U}_\infty$ относительно центра масс капли (см. рис.). В этом случае наша задача, по-существу, сводится к анализу задачи обтекания крупной слабо испаряющейся капли бесконечным плоскопараллельным потоком, скорость которого $\mathbf{U}_\infty$ подлежит определению. Определенная в такой системе координат скорость газа на бесконечности равна с обратным знаком величине силы и скорости диффузио–и фотофореза крупной слабо испаряющейся капли. Индексы «e» и «i» здесь и далее будем относить к газу и капле, индексом «s» – обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности капли равной T_{iS}, а индексом «∞» – обозначены средние значения физических величин, характеризующие бинарную газовую среду в отсутствии внешнего градиента концентрации $\nabla C_{1\infty}$.

Распределения температур T_e, T_i, скорости $\mathbf{U_e}$, давления P_e и относительной концентрации первого компонента бинарной вязкой газовой смеси C_1 симметричны относительно оси, проходящей через центр капли. Это означает, что все неизвестные функции зависят только от радиальной координаты r и полярного угла θ.

При дальнейшем описании диффузио-и фотофореза сделаем некоторые допущения, которые оправданы с физической точки зрения. В силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации при теоретическом описании диффузио–и фотофореза будем предполагать, что процессы массо-и теплопереноса в системе капля–бинарная газовая смесь протекают квазистационарно; времена релаксации (тепловой и диффузионной) малы по сравнению с характерным временем переноса капли и, что капля при своем движении в бинарной газовой смеси сохраняет сферическую форму. Для того, чтобы крупная слабо испаряющаяся капля сохраняла сферическую форму должно выполняться следующее условие [9]:

$$\sigma/R \gg \mu_e U/R,$$

т.е. силы внешнего давления малы по сравнению с давлением, вызванным межфазным (жидкость–газ) поверхностным натяжением. Здесь $\sigma-$ коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела капля–бинарная газовая смесь; $U-$ абсолютная величина скорости газовой смеси относительно капли.

Рассматривать движение крупной слабо испаряющейся капли в вязкой бинарной газовой смеси будем при числах Рейнольдса и Пекле много меньших единицы, при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности и капля однородна и изотропна по своему составу.

Как мы отмечали выше, что если выполняется условие $(T_{iS} - T_\infty)/T_\infty \sim 0(1)$, то при решении системы уравнений газовой динамики необходимо уже учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии), а также плотности газообразной среды от температуры. В этом случае бинарная газовая смесь считается неизотермической и при решении такой системы мы сталкиваемся с большими математическими трудностями. Это обусловлено тем, что система газодинамических уравнений становится существенно нелинейной. В научной литературе имеется мало работ, посвященных исследованию движения частиц при значительных относительных перепадах температуры в газообразных средах. Например, гравитационное движение нагретых крупных частиц [5,6], фотофорез нагретых крупных частиц [7], термофоретическое движение нагретых крупных частиц [8]. В приведенных выше работах показано, что нагрев поверхности частиц существенно влияет на их движение.

В дипломной работе (в рамках сформулированных выше допущений), решалась следующая система газодинамических уравнений (1)-(5), описывающая распределения массовых скоростей U_e и $\mathbf{U_i}$, давлений P_e и P_i, температур T_e, T_i и относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси C_1 [9,10]

$$\mu_e \Delta \mathbf{U}_e = \nabla P_e, \quad \mathrm{div} \mathbf{U}_e = 0, \tag{1}$$

$$\mu_e \Delta \mathbf{U}_i = \nabla P_i, \quad \mathrm{div} \mathbf{U}_i = 0, \tag{2}$$

$$\rho_e c_{pe} (\mathbf{U_e} \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e, \tag{3}$$

$$\rho_i c_{pi}(\mathbf{U_i}\nabla)T_i = \lambda_i \Delta T_i + q_i, \tag{4}$$

$$(\mathbf{U_e}\nabla)C_1 = D_{12}\Delta C_1, \tag{5}$$

Здесь выражения (1)-(2) – линеаризованные по скорости уравнения Навье-Стокса, описывающие поля скорости и давления вне и внутри слабо испаряющейся капли; выражения (3)-(4) – конвективное уравнение теплопроводности, описывающие поля температуры вне и внутри слабо испаряющейся капли и выражение (5) – конвективное уравнение диффузии, описывающее распределение относительной концентрации первого компонента C_1 в бинарной вязкой газообразной среде.

При решении системы уравнений (1)-(5) получаются произвольные постоянные и для их определения необходимо задать краевые условия. В нашем случае, система уравнений (1)-(5) решалась со следующими краевыми условиями (6)-(8), записанные в сферической системе координат. На поверхности капли $r = R$, учитываются граничные условия (6)

$$U_r^{(e)} = U_r^{(i)} = 0, \quad U_\theta^{(e)} - U_\theta^{(i)} = K_{TS}\frac{\nu_e}{RT_e}\frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS}\frac{D_{12}}{R}\frac{\partial C_1}{\partial \theta},$$

$$T_e = T_i, \; -\lambda_e\frac{\partial T_e}{\partial r} = -\lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial r} - \sigma_0\sigma_1(T_i^4 - T_{e\infty}^4), \;\; \frac{\partial C_1}{\partial r} = 0, \tag{6}$$

$$\mu_e\left(\frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{r}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma}{\partial T_i}\frac{\partial T_i}{\partial \theta} = \mu_i\left(\frac{\partial U_\theta^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(i)}}{r}\right),$$

вдали от частицы ($r \to \infty$) справедливы стандартные условия (7)

$$U_r^{(e)} = U_\infty cos\theta, \; U_\theta^{(e)} = -U_\infty sin\theta, \; P_e = P_\infty,$$

$$T_e = T_\infty, \; C_1 = C_{1\infty} + |\nabla C_{1\infty}| r cos\theta, \tag{7}$$

и конечность физических величин, характеризующих каплю при $r \to 0$ учтено в (8)

$$T_i \neq \infty, \; P_i \neq \infty, \; \mathbf{U_i} \neq 0. \tag{8}$$

Здесь U_r, U_θ− радиальная и касательная компоненты массовой скорости; σ_0− постоянная Стефана-Больцмана, ν_e− коэффициент кинематической вязкости; c_p− удельная теплоемкость при постоянном давлении; σ_1− интегральная степень черноты вещества капли; D_{12}− коэффициент взаимной диффузии; λ_e, λ_i− коэффициенты теплопроводности газообразной среды и капли; $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$− величина скорости набегающего потока.

Физический смысл граничных условий, приведенных выше заключается в следующем. В граничных условиях на поверхности частицы (6) учтены условия непроницаемости для нормальной компоненты; тепловое и диффузионное скольжения для касательных компонент массовой скорости; равенства температур и радиальных потоков тепла с учетом излучения и непрерывность касательных компонент тензора напряжений с учетом зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Выражения для газокинетических коэффициентов K_{TS}, K_{DS} приведены в [11], где они получены в ходе решения уравнения Больцмана. При коэффициентах аккомодации тангенциальной проекции импульса и энергии газовых молекул равных единице, значения газокинетических коэффициентов равны [11]: $K_{TS} \approx 1.161$, $K_{DS} \approx 0.3$.

Чтобы найти выражения для силы сопротивления, которая оказывает вязкая бинарная смесь крупной слабо испаряющейся капли, а также выражений для силы и скорости диффузио-и фотофореза, необходимо необходимо знать полную силу, действующую на нее. Эта сила определяется интегрированием компонент тензора напряжений по поверхности частицы и имеет вид [9,10]:

$$F = 2\pi \int_0^\pi \Big(-P_e cos\theta + \sigma_{rr} cos\theta - \sigma_{r\theta} sin\theta \Big) r^2 sin\theta d\theta, \tag{9}$$

где $\sigma_{rr} = 2\mu_e \dfrac{\partial U_r^\theta}{\partial r}$, $\quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\dfrac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \dfrac{U_\theta^e}{r} \right)$.

Для дальнейшего решения поставленных задач в дипломной работе необходимо перейдем к безразмерным величинам. Обезразмерим уравнения и соответствующие краевые условия. Введем безразмерную координату, скорость и температуру — $y_k = x_k/R$, $\mathbf{V} = \mathbf{U}/U_\infty$, $t = T/T_\infty$. В качестве единицы измерения расстояния выбран радиус капли R, температуры T_∞ и скорости U_∞.

Приведение к безразмерным величинам уравнений и краевых условий позволяет выявить безразмерные комбинации. Действительно, определяющими параметрами задачи являются материальные постоянные ρ_e, μ_e, λ_e, c_{pe}, а также сохраняющиеся в процессе движения слабо испаряющейся капли величины R, T_∞, $|\nabla C_{1\infty}|$ и U_∞. Из этих параметров можно составить три безразмерные комбинации: числа Рейнольдса ($R_e = \rho_e R U_\infty/\mu_e$), число Пекле ($P_e = \rho_e c_{pe} R U_\infty/\lambda_e = R_e \cdot P_r$, $P_r = c_{pe}\mu_e/\lambda_e -$ число Прандтля) и малый безразмерный параметр $\varepsilon = R|\nabla C_{1\infty}|$.

При описании диффузиофореза $\varepsilon = R|\nabla C_{1\infty}|$ играет роль малого параметра [1,2], а при описании фотофореза роль малого параметра играет число Рейнольдса [1,7]. Это обусловлено следующими обстоятельствами: скорость слабо испаряющейся капли в поле градиента относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси по порядку величины равна $|U_{dh}| \sim D_{12}|\dfrac{\Delta C_1}{L}| \sim \dfrac{D_{12}}{R}\varepsilon$ [2]. Здесь $\dfrac{\Delta C_1}{L} -$ средний градиент относительной концентрации первого вдали от частицы. Этот градиент равен отношению перепада концентрации ΔC_1 на конечном отрезке L. Скорость диффузиофореза равна с обратным знаком скорости центра инерции газовой среды на большом расстоянии от частицы, поэтому число Рейнольдса построенное по характерной скорости равно $R_e = \dfrac{|U_{dh}|R\rho_e}{\mu_e} \sim \varepsilon$. Таким образом, для фотофореза роль малого параметра играет число Рейнольдса, а для диффузиофореза ε.

При $\varepsilon \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние. Это означает, что при решение уравнений газовой динамики можно использовать метод теории возмущения, т.е.

$$\mathbf{V_e} = \mathbf{V_e}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V_e}^{(1)} + ..., p_e = p_e^{(0)} + \varepsilon p_e^{(1)} + ...,$$

$$t_e = t_e^{(0)} + \varepsilon t_e^{(1)} + ..., C_1 = C_1^{(0)} + \varepsilon C_1^{(1)} + ...$$

Из выше приведенных выражений следует, что при нахождении диффузио–и фотофоретической силы и скорости можно ограничится поправками первого порядка малости по ε.

Вид граничных условий указывает на то, что выражения для компонент массовой скорости U_r и U_θ ищутся в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [10]. Известно [10], что для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений. С учетом этого выражения для компонент массовой скорости будем искать в виде:

$$U_r(y,\theta) = U_\infty cos\theta \, G(y), \; U_\theta(y,\theta) = -U_\infty sin\theta \, g(y) \tag{10}$$

Здесь $G(y)$ и $g(y)$ - произвольные функции, зависящие от координаты $y = r/R$.

В обезразмеренном виде уравнения тепло-и массопереноса принимают следующий вид:

$$\varepsilon P_r(\mathbf{V_e}\nabla)t_e = \Delta t_e, \quad \varepsilon\beta_1(\mathbf{V_e}\nabla)C_1 = \Delta C_1, \tag{11}$$

$$\varepsilon\beta_0(\mathbf{V_i}\nabla)t_i = \Delta t_i + \beta_3 q_i, \tag{12}$$

Здесь $\beta_1 = \dfrac{\mu_e}{D_{12}\rho_e}$, $\beta_0 = \dfrac{\rho_i c_{pi}\mu_e}{\lambda_e\rho_e}$, $\beta_3 = \dfrac{R^2}{\lambda_i T_\infty}$.

Поскольку капля движется в бинарной вязкой газообразной среде равномерно, то приравнивая полную силу к нулю мы получаем выражения для силы и скорости диффузио-и фотофореза Таким образом, чтобы найти выражения для общей силы, действующей со стороны вязкой бинарной газовой смеси на каплю и выражений для силы и скорости диффузио-и фотофореза необходимо решить систему газодинамических уравнений (1)-(4) с граничными условиями (6) - (8).

Глава II. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления вне и внутри слабо испаряющейся капли

Стационарные уравнения гидродинамики, описывающие течение газа в окрестности крупной слабо испаряющейся капли (уравнение Навье-Стокса и непрерывности) имеют вид [9,10]:

$$\rho_e(\mathbf{U}_e\nabla)\mathbf{U}_e = -\nabla P_e + \mu_e\Delta\mathbf{U}_e,\ \operatorname{div}\mathbf{U}_e = 0 \text{ при } r > R, \tag{13}$$

$$\rho_i(\mathbf{U}_i\nabla)\mathbf{U}_i = -\nabla P_i + \mu_i\Delta\mathbf{U}_i,\ \operatorname{div}\mathbf{U}_i = 0 \text{ при } r < R, \tag{14}$$

и представляют собой нелинейные дифференциальный уравнения второго порядка в частных производных. Нелинейность обусловлена наличием в этих уравнениях нелинейного (конвективного) члена $(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U}$, что представляет большие математические трудности при решении этих уравнений.

Заметим, что если число Рейнольдса много меньше единицы (ламинарные течения), то этот конвективный член квадратичен по скорости и тогда в наших уравнениях (13) - (14) мы можем им пренебречь. Такой способ решения уравнения Навье-Стокса в литературе получил название линеаризованные по скорости уравнения Навье-Стокса, который впервые применил Стокс в 1827 году. С учетом выше сказанного имеем следующую систему гидродинамических уравнений, описывающих стационарные поля скорости и давления в окрестности крупной слабо испаряющейся капли:

$$\nabla P_e = \mu_e\Delta\mathbf{U_e},\ \operatorname{div}\mathbf{U_e} = 0 \text{ при } r > R, \tag{15}$$

$$\nabla P_i = \mu_i\Delta\mathbf{U_i},\ \operatorname{div}\mathbf{U_i} = 0 \text{ при } r < R. \tag{16}$$

Найдем сначала решение уравнения (15). В сферической системе координат уравнение непрерывности и линеаризованного по скорости уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат имеют вид [9,10]:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{rr} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r}\sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \tag{17}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{3}{r}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r}\Big(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}\Big) \tag{18}$$

$$\frac{\partial U_r^e}{\partial r} + \frac{2}{r}U_r^e + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r}U_\theta^e = 0, \tag{19}$$

где компоненты тензора вязких напряжений имеют следующий вид [9]:

$$\sigma_{rr} = 2\mu_e\frac{\partial U_r^e}{\partial r},\;\; \sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{r}\mu_e\Bigg(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + U_r^e\Bigg),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2}{r}\mu_e\Bigg(U_r^e + ctg\theta U_\theta^e\Bigg),$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu_e\Bigg(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r}\Bigg).$$

Заметим, что аналогичным образом запишутся уравнения и для полей скорости и давления внутри слабо испаряющейся капли (16).

Исходя из граничных условий вдали от крупной слабо испаряющейся капли, будем искать решения системы уравнений (17)—(19) в виде (10):

$$U_r^e(y,\theta) = U_\infty cos\theta\, G(y),\;\; U_\theta^e(y,\theta) = -U_\infty sin\theta\, g(y). \tag{20}$$

Здесь $G(y)$, $g(y)$– произвольные функции, зависящие от радиальной координаты $y = r|R$.

Связь между функциями $G(y)$, $g(y)$ находим из уравнения непрерывности. Подставляя (20) в (19), получаем:

$$\frac{1}{y^2}cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2G(y)\right)-\frac{1}{ysin\theta}g(y)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin^2\theta\right)=0,$$

$$g(y)=\frac{1}{2}y\frac{dG}{dy}+G(y). \tag{21}$$

Подставляя (20), (21) в уравнения (17)–(18), имеем:

$$\frac{dP_e}{dy}=\mu_eU_\infty cos\theta\left(\frac{d^2G}{dy^2}+\frac{4}{y}\frac{dG}{dy}\right), \tag{22}$$

$$\frac{dP_e}{d\theta}=-\mu_eU_\infty sin\theta\left(\frac{y^2}{2}\frac{d^3G}{dy^3}+3y\frac{d^2G}{dy^2}+2\frac{dG}{dy}\right). \tag{23}$$

Уравнение (22) продифференцируем по θ, а уравнение (23) по y и, вычитая, из первого второго получаем обыкновенное дифференциальное четвертого порядка для нахождения функции $G(y)$:

$$y^3\frac{d^4G}{dy^4}+8y^2\frac{d^3G}{dy^3}+8y\frac{d^2G}{dy^2}-8\frac{dG}{dy}=0 \tag{24}$$

Решение этого уравнения ищем в виде постановки Эйлера [12,13,14] и, в результате, окончательно имеем следующее выражение для функции G(y):

$$G(y)=\left(A_0+A_1y^2+\frac{A_2}{y}+\frac{A_3}{y^3}\right), \tag{25}$$

и, учитывая связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ находим выражение для функции $g(y)$:

$$g(y) = \left(A_0 + 2A_1 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_3}{2y^3} \right). \tag{26}$$

Таким образом, имеем следующие выражения для компонент массовой скорости $\mathbf{V_e}$:

$$\mathbf{U}_e = U_r \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta \tag{27}$$

$$U_r^e(y,\theta) = U_\infty cos\theta \left(A_0 + A_1 y^2 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{y^3} \right), \tag{28}$$

$$U_\theta^e(y,\theta) = -U_\infty sin\theta \left(A_0 + 2A_1 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_3}{2y^3} \right). \tag{29}$$

Подставляя (21) в (19), после интегрирования получаем следующее выражение для поля давления:

$$P_e = P_0 + \mu_e cos\theta \frac{U_\infty}{Ry^2} \left(10yA_1 + \frac{A_2}{y^2} \right). \tag{30}$$

Таким образом, общим решением системы уравнений Стокса в области $0 \le y < \infty$

$$\mu \Delta \mathbf{U} = \nabla P, \;\; \mathrm{div} \mathbf{U} = 0 \tag{31}$$

в сферической системе координат являются следующие функции:

$$U_r(y,\theta) = U_\infty\, cos\theta \left(A_0 + A_1 y^2 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{y^3} \right), \tag{32}$$

$$U_\theta(y,\theta) = -U_\infty\, sin\theta \left(A_0 + 2A_1 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_3}{2y^3} \right), \tag{33}$$

$$P = P_0 + \frac{U_\infty}{R}\, \mu\, cos\theta \left(10yA_1 + \frac{A_2}{y^2} \right). \tag{34}$$

Как выше мы отмечали, что при плоско-параллельном обтекании крупной слабо испаряющейся капли сферической формы вся наша область от 0 до ∞ разбивается на две:

I. Область внутри капли, т.е. $0 \le r \le R$, где R - радиус крупной слабо испаряющейся капли; имеем следующие выражения для компонент массовой скорости и давления:

$$U_r^{(i)} = U_\infty\, cos\theta \left(A_3 + A_4 y^2 \right),$$

$$U_\theta^{(i)} = -U_\infty\, sin\theta \left(A_3 + 2A_4 y^2 \right),$$

$$P_i = P_{0i} + \frac{U_\infty}{R}\, \mu_i\, cos\theta\, 10yA_4.$$

II. Область вне слабо испаряющейся капли, т.е. $1 \leq r < \infty$:

$$U_r^{(e)} = U_\infty cos\theta \left(1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3}\right),$$

$$U_\theta^{(e)} = -U_\infty \, sin\theta \left(1 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3}\right),$$

$$P_e = P_{0e} + \frac{U_\infty}{R^2} \frac{\mu_e \, cos\theta}{y^2} A_2.$$

Неизвестные постоянные интегрирования, входящие в эти выражения определяются из граничных условий.

Глава III. Распределения температур и относительной концентрации первого компонента в окрестности крупной слабо испаряющейся капли

Во второй главе получены выражения для полей скорости и давлений вне и внутри слабо испаряющейся капли. В третьей главе найдем распределения температур и концентрации первого компонента в окрестности крупной слабо испаряющейся капли. Будем рассматривать диффузио-и фотофорез в системе координат в мгновенном положении центра масс частицы. В этом случае газ на бесконечности покоится, а сама частица движется с характерной скоростью $\mathbf{U} = -\mathbf{U}_\infty(|\mathbf{U}| = |\mathbf{U}_\infty|)$. С учетом этого, выражения для обезразмеренных компонент массовой $\mathbf{V_e} = \mathbf{U_e}/U$, где $U = |\mathbf{U}|$ имеем:

$$V_r^{(e)}(y,\theta) = cos\theta\left(\frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y}\right),\ \ V_\theta^{(e)}(y,\theta) = -sin\theta\left(-\frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y}\right), \tag{35}$$

$$V_r^{(i)}(y,\theta) = cos\theta\left(A_3 + A_4 y^2\right),\ \ V_\theta^{(i)}(y,\theta) = -sin\theta\left(A_3 + 2A_4 y^2\right). \tag{36}$$

Таким образом, нам необходимо решить следующие уравнения:

$$\varepsilon P_r(\mathbf{V_e}\nabla)t_e = \Delta t_e,\quad \varepsilon\beta_1(\mathbf{V_e}\nabla)C_1 = \Delta C_1, \tag{37}$$

$$\varepsilon\beta_0(\mathbf{V_i}\nabla)t_i = \Delta t_i + \beta_3 q_i, \tag{38}$$

Здесь $\beta_1 = \dfrac{\mu_e}{D_{12}\rho_e}$, $\beta_0 = \dfrac{\rho_i c_{pi}\mu_e}{\lambda_e\rho_e}$, $\beta_3 = \dfrac{R^2}{\lambda_i T_{e\infty}}$.

Найдем сначала решение уравнения, которое описывает распределение температуры в окрестности слабо испаряющейся капли

$$\varepsilon P_r(\mathbf{V_e}\nabla)t_e = \Delta t_e. \tag{39}$$

С учетом выше сказанного, его решение будем искать в виде:

$$t_e(y,\theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y,\theta). \tag{40}$$

Подставляя (40) в (39) и, оставляя члены $\sim \varepsilon$, получаем следующие два уравнения

$$\Delta t_{eo}(y) = 0, \tag{41}$$

$$P_r \left(V_r^{(e)}(y,\theta) \cdot \nabla \right) t_{eo}(y) = \triangle t_{e1}(y,\theta). \tag{42}$$

Найдем сначала решение уравнения (41). В сферической системе координат оно имеет вид:

$$\frac{1}{y^2}\frac{d}{dy}\left(y^2 \frac{dt_{e0}(y)}{dy} \right) = 0. \tag{43}$$

Интегрируя уравнение (43) два раза, получаем:

$$t_{e0}(y) = N_0 + \frac{\Gamma_0}{y}. \tag{44}$$

Постоянная интегрирования N_0 определяется из граничного условия вдали от капли (см. (7)): $N_0 = 1$. Таким образом,

$$t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}. \tag{45}$$

Подставляя (45) в (42), имеем следующее уравнения для нахождения $t_{e1}(y,\theta)$:

$$\Delta t_{e1}(y,\theta) = -\omega \cos\theta \left(\frac{A_1}{y^5} + \frac{A_2}{y^3} \right), \tag{46}$$

где $\omega = P_r \Gamma_0$.

Решение уравнения (46) будем искать в виде:

$$t_{e1}(y,\theta) = \tau_e(y)\cos\theta. \tag{47}$$

После подстановки (47) в (46), получаем следующее уравнение для нахождения функции $\tau_e(y)$:

$$\frac{d^2\tau_e}{dy^2} + \frac{2}{y}\frac{d\tau_e}{dy} - \frac{2}{y^2}\tau_e = -\omega \cos\theta \left(\frac{A_1}{y^5} + \frac{A_2}{y^3} \right). \tag{48}$$

Из общей теории решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка известно [12,13,14]. Пусть нам дано неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = h(x),$$

где $p(x)$, $g(x)$, $h(x)$– непрерывные функции на отрезке $[a, b]$ и x_0– любая точка из этого отрезка. Тогда общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \varphi_2(x)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(x)h(x)}{W(x)}dx - \varphi_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi_2(x)h(x)}{W(x)}dx,$$

где $W(x) = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)$– определитель Вронского, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$– фундаментальная система решений однородного уравнения.

В нашем случае $\varphi_1(y) = y$, $\varphi_2(y) = 1/y^2$, $W(y) = -3/y^2$, имеем:

$$\tau_e(y) = N_1 y + \frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{A_2}{y} - \frac{A_1}{2y^3}\right). \tag{49}$$

Постоянная интегрирования N_1 определяется из граничного условия вдали от капли (см. (7)): $N_1 = 0$. Таким образом, имеем следующее выражение, описывающее распределение температуры в бинарной газовой смеси в окрестности крупной слабо испаряющейся капли:

$$t_e(y,\theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon\, t_{e1}(y,\theta), \tag{50}$$

$$t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y},\;\; t_{e1}(y,\theta) = \tau_e(y)\cos\theta,\;\; \tau_e(y) = \frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{A_2}{y} - \frac{A_1}{2y^3}\right).$$

Найдем решение уравнения, которое описывает распределение концентрации в окрестности крупной слабо испаряющейся капли

$$\varepsilon\beta_1(\mathbf{V_e}\nabla)C_1 = \Delta C_1. \tag{51}$$

С учетом выше сказанного, его решение будем искать в виде:

$$C_1(y,\theta) = C_{10}(y) + \varepsilon C_{11}(y,\theta). \tag{52}$$

Подставляя (52) в (51) и, оставляя члены $\sim \varepsilon$, получаем следующие два уравнения

$$\Delta C_{10}(y) = 0, \tag{53}$$

$$\beta_1 \left(V_r^{(e)}(y,\theta) \cdot \nabla \right) C_{10}(y) = \triangle C_{11}(y,\theta). \tag{54}$$

Найдем сначала решение уравнения (53). В сферической системе координат оно имеет вид:

$$\frac{1}{y^2}\frac{d}{dy}\left(y^2 \frac{dC_{10}(y)}{dy} \right) = 0. \tag{55}$$

Интегрируя уравнение (55) два раза, получаем:

$$C_{10}(y) = D_0 + \frac{M_0}{y}. \tag{56}$$

Постоянная интегрирования D_0 определяется из граничного условия вдали от капли (см. (7)): $D_0 = C_{1\infty}$. Следовательно,

$$C_{10}(y) = C_{1\infty} + \frac{M_0}{y}.$$

С учетом граничного условия на поверхности слабо испаряющейся капли $(y = 1)$

$$\frac{\partial C_{10}}{\partial y} = 0,$$

имеем $M_0 = 0$.

Таким образом, для нулевого приближения имеем следующее выражения для функции $C_{10}(y)$:

$$C_{10}(y) = C_{1\infty}. \tag{57}$$

Подставляя (57) в (54), имеем следующее уравнения для нахождения $C_{11}(y,\theta)$:

$$\Delta C_{11}(y,\theta) = 0, \tag{58}$$

Решение уравнения (58) будем искать в виде:

$$C_{11}(y,\theta) = \tau(y)\cos\theta. \tag{59}$$

После подстановки (59) в (58), получаем следующее уравнение для нахождения функции $\tau(y)$:

$$y^2\frac{d^2\tau}{dy^2} + 2y\frac{d\tau}{dy} - 2\tau = 0. \tag{60}$$

Мы получили уравнение типа Эйлера и следовательно:

$$\tau(y) = y^{\lambda},$$

где λ определяется из характеристического уравнения: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, корни которого равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Следовательно:

$$\tau(y) = D_1 y + \frac{M_1}{y^2}. \tag{61}$$

Постоянная интегрирования D_1 и M_1 определяется из граничного условия вдали от капли и на ее поверхности: $D_1 = 1$, $M_1 = 1/2$. Таким образом, имеем следующее выражение, описывающее распределение концентрации в бинарной газовой смеси в окрестности крупной слабо испаряющейся капли:

$$C_1(y,\theta) = \cos\theta\left(y + \frac{1}{2y^2}\right). \tag{62}$$

Найдем решение уравнения, которое описывает распределение температуры внутри слабо испаряющейся капли

$$\varepsilon\beta_0(\mathbf{V_i}\nabla)t_i = \Delta t_i + \beta_3 q_i. \tag{63}$$

Здесь $\beta_0 = \dfrac{\rho_i c_{pi}\mu_e}{\lambda_e\rho_e}$, $\beta_3 = \dfrac{R^2}{\lambda_i T_\infty}$.

Решение этого уравнения будем искать в аналогичном виде:

$$t_i(y,\theta) = t_{io}(y) + \varepsilon t_{i1}(y,\theta). \tag{64}$$

Учитывая, что поле температуры внутри частицы мы ищем в виде разложения по полиномам Лежандра, то функция $q_i(r,\theta)$ тоже должна раскладываться в ряд по полиномам Лежандра, т.е.

$$-\frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{in}(y)\, P_n(x), \tag{65}$$

где функция $q_{in}(y)$ определяется, если воспользоваться свойством полиномов Лежандра [12,13,14]. Имеем:

$$q_{in}(y) = -\frac{R^2}{\lambda_i T_\infty}\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} q_i\, P_n(x)\, dx, \tag{66}$$

Полиномы Лежандра ($P_n(x), x = \cos\theta$) определяются следующим образом

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right],$$

которое называется формулой Родрига [12,13,14]. В частности: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2-1)$,.... В дальнейшем нам потребуется следующие свойства полиномов Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d\,P_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)\,P_n(x) = 0 \;\; (n = 0, 1, 2, ...),$$

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } \; m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{если } \; m = n. \end{cases}$$

В дальнейшем нам потребуются q_{i0} и q_{i1}:

$$q_{i0}(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1} q_i\, dx, \;\; q_{i1}(y) = -\frac{3R^2}{2\lambda_i T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1} q_i\, x\, dx.$$

Подставляя полученные выше выражения в (63) и, оставляя члены $\sim \varepsilon$, получаем следующие два уравнения

$$\Delta t_{io}(y) = q_{i0}(y), \tag{67}$$

$$\beta_0 V_r^{(i)}(y,\theta)\frac{dt_{io}}{dy} + q_{i1}\cos\theta = \triangle t_{i1}(y,\theta). \tag{68}$$

Найдем сначала решение уравнения (67). В сферической системе координат оно имеет вид:

$$\frac{1}{y^2}\frac{d}{dy}\left(y^2\frac{dt_{io}}{dy}\right) = q_{i0}. \tag{69}$$

Мы получили неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение ищем методом описанным выше. Учитывая, что в нашем случае $\varphi_1(y) = 1$, $\varphi_2(y) = 1/y$, $W(y) = -1/y^2$, имеем:

$$t_{i0}(y) = B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y}\int\limits_1^y \psi_0 dy + \int\limits_1^y \frac{\psi_0}{y}dy, \;\; \psi_0 = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}}y^2\int\limits_{-1}^{+1} q_i(r,\theta)dx, \tag{70}$$

где постоянная интегрирования H_0 определяется из граничного условия (8): $H_0 = \int\limits_1^0 \psi_0 dy = \frac{1}{4\pi R\lambda_i T_\infty}\int\limits_V q_i dV$. Здесь интегрирование ведется по всему объему крупной слабо испаряющейся капли.

Найдем решение уравнения

$$\beta_0 V_r^{(i)}(y,\theta)\frac{dt_{io}}{dy} + q_{i1}\cos\theta = \triangle t_{i1}(y,\theta). \tag{71}$$

Решение уравнения (71) будем искать в виде:

$$t_{i1}(y,\theta) = \tau_i(y)\cos\theta. \tag{72}$$

Подставляя (72) и учитывая, что

$$V_r^{(i)} = \cos\theta\left(A_3 + A_4 y^2\right), \;\; \frac{dt_{i0}}{dy} = -\frac{1}{y^2}\left(H_0 - \int\limits_1^y \psi_0(y)dy\right),$$

$\varphi_1(y) = y$, $\varphi_2(y) = 1/y^2$, $W(y) = -3/y^2$, получаем

$$t_{i1}(y,\theta) = cos\theta\Bigg[B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3}\Bigg(y\int\limits_1^y \frac{\psi_1}{y^2}dy - \frac{1}{y^2}\int\limits_1^y \psi_1 y dy -$$

$$-\frac{\beta_0}{y^2}\int\limits_1^y \Big(A_3 y + A_4 y^3\Big)\Omega_0 dy + \beta_0 y\int\limits_1^y \Big(\frac{A_3}{y^2} + A_4\Big)\Omega_0 dy\Bigg)\Bigg],$$

$$\psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int\limits_{-1}^{+1} q_i(r,\theta) x dx, \;\; \Omega_0(y) = \int\limits_0^y \psi_0 dy,$$

$$H_1 = \frac{1}{3}\Bigg[\int\limits_1^0 y\psi_1 dy + \beta_0\int\limits_1^0 \Big(A_3 y + A_4 y^3\Big)\Omega_0 dy\Bigg],$$

$z = r\cos\theta$, $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$, , $x = \cos\theta$, $\int\limits_V q_i z dV -$ дипольный момент плотности тепловых источников [6,11].

Таким образом, в третьей главе получены выражения для полей температур (вне и внутри капли) и относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси в окрестности крупной слабо испаряющейся капли и они имеют следующий вид:

$$t_e(y,\theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y,\theta), \tag{73}$$

$$t_i(y,\theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y,\theta), \tag{74}$$

$$C_1(y,\theta) = C_{1\infty}(y) + \varepsilon C_{11}(y,\theta). \tag{75}$$

Здесь

$$t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \;\; t_{i0}(y) = B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y}\int\limits_1^y \psi_0 dy + \int\limits_1^y \frac{\psi_0}{y} dy,$$

$$\omega_0 = Pr\Gamma_0, \;\; H_0 = \frac{1}{4\pi R\lambda_i T_\infty}\int\limits_V q_i dV, \;\; \Omega_0(y) = \int\limits_0^y \psi_0 dy,$$

$$t_{e1}(y,\theta) = cos\theta\left[\frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{A_2}{y} - \frac{A_1}{2y^3}\right)\right],\ \psi_0 = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int\limits_{-1}^{+1} q_i(r,\theta)dx,$$

$$H_1 = \frac{1}{3}\left[\int\limits_1^0 y\psi_1 dy + \beta_0 \int\limits_1^0 \left(A_3 y + A_4 y^3\right)\Omega_0 dy\right],\ \int\limits_1^0 y\psi_1 dy = \frac{3}{4\pi R^2 \lambda_i T_{e\infty}} \int\limits_V q_i z dV,$$

$$t_{i1}(y,\theta) = cos\theta\left[B_1 y + \frac{C_1}{y^2} + \frac{1}{3}\left(y\int\limits_1^y \frac{\psi_1}{y^2}dy - \frac{1}{y^2}\int\limits_1^y \psi_1 y dy - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\beta_0}{y^2}\int\limits_1^y \left(A_3 y + A_4 y^3\right)\Omega_0 dy + \beta_0 y \int\limits_1^y \left(\frac{A_3}{y^2} + A_4\right)\Omega_0 dy\right)\right],$$

$$\psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int\limits_{-1}^{+1} q_i(r,\theta) x dx, C_{11}(y,\theta) = cos\theta\left(y + \frac{1}{2y^2}\right),$$

$z = r\cos\theta$, $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$, $x = \cos\theta$. Интеграл $\int\limits_V q_i z dV$ в научной литературе называют дипольным моментом плотности тепловых источников [6,11].

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур определяются из граничных условий на поверхности частицы. В дальнейшем нам потребуется коэффициенты Γ_0, Γ_1, которые имеют следующий вид:

$$\Gamma = \frac{3}{4\pi R^2 \lambda_{iS} \delta T_{e\infty}} \int\limits_V q_i z dV + \frac{\beta_0}{\delta} \int\limits_1^0 \left(A_3 y + A_4 y^3\right)\Omega_0 dy - \frac{\omega_0}{2\delta}\left[A_2\left(\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_1\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{A_1}{2}\left(3\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_1\right)\right], \quad \Gamma_0 = t_{eS} - 1. \qquad (76)$$

Здесь $\delta = 2\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_1, \quad \omega_1 = 1 + 4\frac{\sigma_0 \sigma_1 R}{\lambda_{iS}} T_{e\infty}^3 t_{eS}^3.$

Индексом "S" обозначены физические величины, взятые при средней температуре поверхности $T_{iS} = T_\infty t_{iS}$ крупной слабо испаряющейся капли.

Средняя температура поверхности слабо испаряющейся капли T_{iS}, определяется из граничных условий на поверхности и она связана со средней относительной температурой $T_{eS} = T_\infty t_{eS}$ следующим соотношением:

$$\begin{cases} t_{eS} = t_{iS} \\ t_{eS} - 1 = \dfrac{1}{4\pi R \lambda_{eS} T_{e\infty}} \displaystyle\int\limits_V q_i dV - \sigma_0 \sigma_1 \dfrac{R T_{e\infty}^3}{\lambda_{eS}} (t_{iS}^4 - 1), \end{cases} \tag{77}$$

где $t_{iS} = t_{i0}(y = 1), t_{eS} = t_{e0}(y = 1)$, $\lambda_{eS} = \lambda_e(t_{eS})$.

Глава IV. Вывод выражений для силы и скорости диффузио-и фотофореза крупной слабо испаряющейся капли сферической формы. Анализ полученных результатов

Как выше мы отмечали, для нахождения выражений силы и скорости диффузио-и фотофореза крупной слабо испаряющейся капли нам необходимо знать выражение для полной силы, действующей на нее. Эта сила, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности крупной слабо испаряющейся капли и имеет вид [9]:

$$F_z = \int\limits_{(S)} \Big(-P_e cos\theta + \sigma_{rr} cos\theta - \sigma_{r\theta} sin\theta \Big) r^2 sin\theta d\theta d\varphi \Big|_{r=R} \tag{78}$$

Здесь σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, $U_r^{(e)}$ и $U_\theta^{(e)}$- компоненты тензора напряжений, радиальная и касательная компоненты массовой скорости, $\sigma_{rr} = \mu_e \Big(2\dfrac{\partial U_r^{(e)}}{\partial y} - \dfrac{2}{3} div U_e \Big)$, $\sigma_{r\theta} = \mu_e \Big(\dfrac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial y} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \dfrac{U_\theta^{(e)}}{y} \Big)$.

Подставляя в (78) полученные выше выражения, после интегрирования по поверхности капли, имеем следующее выражение для общей силы, действующей на крупную слабо испаряющуюся каплю:

$$F_z = -4\pi R \mu_e U_\infty A_2. \tag{79}$$

Таким образом, для нахождения общей силы, действующей со стороны бинарной газовой смеси на крупную слабо испаряющуюся каплю, нужно найти коэффициент A_2. Коэффициент A_2 определяется из граничных условий на поверхности капли $(y = 1)$, а именно:

из граничного условия

$$U_r^{(e)}(y = 1) = 0,$$

имеем: $A_1 = -1 - A_2$;

из граничного условия

$$U_r^{(i)}(y = 1) = 0,$$

имеем: $A_3 = -A_4$;

из граничного условия

$$U_\theta^{(e)} - U_\theta^{(i)} = K_{TS}\frac{\nu_e}{RT_e}\frac{\partial T_e}{\partial\theta} + K_{DS}\frac{D_{12}}{R}\frac{\partial C_1}{\partial\theta},$$

имеем:

$$A_4 = \frac{3}{2} - K_{TS}\frac{\nu_e}{RU_\infty t_{eS}}\left(a_1 - \frac{\omega_0}{4\delta}\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \frac{3}{2}a_2\right) - \\ -\varepsilon K_{DS}\frac{D_{12}^{(S)}}{RU_\infty}\frac{3}{2} - A_2\left(1 + K_{TS}\frac{\nu_e}{RU_\infty t_{eS}}\frac{\omega_0}{4\delta}\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}}\right).$$

из граничного условия

$$\mu_e\left(\frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial\theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{r}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial T_i}\frac{\partial T_i}{\partial\theta} = \mu_i\left(\frac{\partial U_\theta^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^{(i)}}{\partial\theta} - \frac{U_\theta^{(i)}}{r}\right),$$

имеем:

$$A_2 = -\frac{3}{2}\frac{1 + \dfrac{2\mu_{eS}}{3\mu_{eS}}}{1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}} + K_{DS}\frac{3}{2}\frac{D_{12}^{(S)}}{U_\infty\left(1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)}|\nabla C_{1\infty}| + \\ + \frac{3}{4\pi R^3\lambda_{iS}\delta T_\infty}\frac{1}{U_\infty\left(1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)}\int\limits_V q_i dV\left(K_{TS}\frac{\nu_{eS}}{t_{eS}} + \frac{R}{3\mu_{iS}}\frac{\partial\sigma}{\partial t_i}\right) + \\ + \frac{\omega_0}{4\delta}\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}RU_\infty}\frac{1}{\left(1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)}\left(K_{TS}\frac{\nu_{eS}}{t_{eS}} + \frac{R}{3\mu_{iS}}\frac{\partial\sigma}{\partial t_i}\right)\left(1 + \frac{3}{2}\frac{1 + \dfrac{2\mu_{eS}}{3\mu_{eS}}}{1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}}\right) + \\ + \frac{3}{2}\frac{a_2}{RU_\infty\left(1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)}\left[K_{TS}\frac{\nu_{eS}}{t_{eS}} - \frac{R}{3\mu_{iS}}\frac{\partial\sigma}{\partial t_i}\left(1 + \frac{1 + \dfrac{2\mu_{eS}}{3\mu_{eS}}}{1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}}\right)\right]. \tag{80}$$

Здесь

$$a_1 = \frac{3}{4\pi R^2\lambda_{iS}\delta T_{e\infty}}\int\limits_V q_i z dV, \quad a_2 = \frac{\beta_0}{\delta}\int\limits_1^0 (y^3 - y)\Omega_0 dy.$$

После подстановки коэффициента A_2 в (79) имеем, что общая сила, действующая на крупную слабо испаряющуюся каплю, складываться из силы вязкого сопротивления среды $\mathbf{F}_\mu$, диффузиофоретической силы $\mathbf{F_{Dh}}$, фотофоретической силы $\mathbf{F_{ph}}$, сил $\mathbf{F_{mh}^{(1)}}$ и $\mathbf{F_{mh}^{(2)}}$, обусловленных движением среды (т.е. учета конвективного члена в уравнениях теплопроводности вне и внутри слабо испаряющейся капли)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F_{Dh}} + \mathbf{F_{ph}} + \mathbf{F_{mh}^{(1)}} + \mathbf{F_{mh}^{(2)}}, \tag{81}$$

где

$$\mathbf{F}_\mu = 6\pi R\mu_{eS} f_\mu U_\infty \mathbf{n_z}, \tag{82}$$

$$\mathbf{F_{Dh}} = -6\pi R\mu_{eS} f_{Dh} |\nabla C_{1\infty}| \mathbf{n}_z, \tag{83}$$

$$\mathbf{F_{ph}} = -6\pi R\mu_{eS} f_{ph} \int\limits_{(V)} q_i z dV \mathbf{n_z}, \tag{84}$$

$$\mathbf{F_{mh}^{(1)}} = -6\pi R\mu_{eS} f_{mh}^{(1)} \mathbf{n_z}, \tag{85}$$

$$\mathbf{F_{mh}^{(2)}} = -6\pi R\mu_{eS} f_{mh}^{(2)} \mathbf{n_z}. \tag{86}$$

Здесь коэффициенты f_μ, f_{Dh}, f_{ph}, $f_{mh}^{(1)}$, $f_{mh}^{(2)}$ могут быть оценены из следующих выражений:

$$f_\mu = \frac{1 + \dfrac{2\mu_{eS}}{3\mu_{eS}}}{1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}}, f_{Dh} = K_{DS} \frac{D_{12}^{(S)}}{1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}},$$

$$f_{ph} = \frac{1}{2\pi R^3 \lambda_{iS} \delta T_e \infty \left(1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)} \left(K_{TS} \frac{\nu_{eS}}{t_{eS}} + \frac{R}{3\mu_{iS}} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i}\right),$$

$$f_{mh}^{(1)} = -\frac{\omega_0}{6R} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \frac{1}{\delta\left(1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)} \left(K_{TS} \frac{\nu_{eS}}{t_{eS}} + \frac{R}{3\mu_{iS}} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i}\right) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1 + \dfrac{2\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}}{1 + \dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}}\right),$$

$$f_{mh}^{(2)} = \frac{\beta_0}{\delta R\left(1+\dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)}\left(K_{TS}\frac{\nu_{eS}}{t_{eS}} - \frac{R}{3\mu_{iS}}\frac{\partial\sigma}{\partial t_i}\right)\left(1+\frac{2}{3}\frac{1+\dfrac{2\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}}{1+\dfrac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}}\right)\Omega_1,$$

$$\omega_0 = Pr\Gamma_0, \;\; \Omega_0(y) = \int\limits_0^y \psi_0 dy, \quad \Omega_1 = \int\limits_0^1 (y^3-y)\Omega_0 dy, \;\; \beta_0 = \frac{\rho_i c_{pi}\mu_e}{\lambda_i\rho_e}.$$

Приравнивая полную силу к нулю (капля движется равномерно), получаем общее выражение для скорости упорядоченного движения крупной слабо испаряющейся капли, которая будет складываться из диффузиофоретической, фотофоретической скоростей и скоростей, обусловленных движением среды (т.е. учета конвективного члена в уравнениях теплопроводности вне и нутрии слабо испаряющейся капли):

$$\mathbf{U_p} = -\left(h_{Dh}|\nabla C_{1\infty}| + h_{ph}\int\limits_V q_i z dV + h_{mh}^{(1)} + h_{mh}^{(2)}\right)\mathbf{n_z}, \tag{87}$$

Здесь $h_{Dh} = \dfrac{f_{Dh}}{f_\mu}$, $h_{ph} = \dfrac{f_{ph}}{f_\mu}$, $h_{mh}^{(1)} = \dfrac{f_{mh}^{(1)}}{f_\mu}$, $h_{mh}^{(2)} = \dfrac{f_{mh}^{(2)}}{f_\mu}$.

Полученные выше формулы (81), (87)позволяют оценивать влияние движения среды и нагрева поверхности частицы на величину силы и скорости крупной слабо испаряющейся капли.

Из формул (81), (87) видно, что вклад движения среды пропорционален коэффициентам $\omega = Pr\Gamma_0$ и β_0 соответственно. Причем их вклады в общую силу, действующей на слабо испаряющуюся каплю и скорости ее упорядоченного движения разные по знаку: первый вклад отрицательный, а второй - положительный. Учитывая, что для большинства газов число Прандтля порядка единицы, то вклад пропорциональный коэффициенту определяется значением коэффициента $\Gamma_0 = t_{eS} - 1$. Коэффициент Γ_0 определяется из решения системы уравнений (77). Для решения этой системы уравнений необходимо задать явный вид распределения плотности тепловых источников внутри частицы. Таким образом, на величину силы и скорости капли движение среды (учет конвективного члена в уравнении теплопроводности) оказывает через нагрев поверхности частицы. Это позволяет использовать полученные формулы при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц и т.д.

Рассмотрим коэффициент β_0, т.е. оценим какой вклад он дает в силу и скорость диффузио-и фотофореза. Коэффициент β_0 (учитывающий внутренние течения в слабо испаряющейся капле), зависит от значения выражения $\Omega_0(y) = \int\limits_0^y \psi_0 dy$ $(\psi_0 = -\dfrac{R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int\limits_{-1}^{+1} q_i(r,\theta) dx)$. Для оценки его влияния на силу и скорость крупной слабо испаряющейся капли нам необходимо конкретизировать природу тепловых источников, которые неоднородно распределены внутри слабо испаряющейся капли. Обычно, в качестве оценок используют наиболее распространенный случай. Нагрев поверхности слабо испаряющейся капли происходит за счет поглощения электромагнитного излучения. В этом случае степень неоднородности распределения тепловой энергии в частице зависит от оптических констант материала частицы (m_S) и параметра дифракции (x_a) и выражение для плотности излучения в капле, трансформируемой в тепло, можно записать в следующем виде $q_i = 4\pi \dfrac{n_S a_S}{n_0} \lambda_0 I_0 B_S$, где $m_S = n_S + i a_S$, $x_a = 2\pi R/\lambda_0$, n_S- показатель преломления, a_S- показатель поглощения, n_0- показатель преломления среды, I_0, λ_0- интенсивность и длина волны изучения, B_S- функция координат, рассчитываемая по теории Ми [15,16].

В случае, когда частица поглощает излучение как черное тело выражения для силы и скорости диффузио-и фотофореза существенно упрощаются. Поглощение происходит в очень тонком слое толщиной $\delta R << R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности слабо испаряющейся капли. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется с помощью формулы [16]

$$
q_i = \begin{cases} -\dfrac{I_0}{\delta R} cos\theta, \ \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi, \quad R - \delta R \le r \le R \\ \\ 0, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}
$$

где I_0-интенсивность падающего излучения. С учетом этого имеем следующее выражение

$$
\frac{1}{4\pi R \lambda_i T_{e\infty}} \int\limits_V q_i dV = \pi R^2 I_0 \tag{88}
$$

Тогда среднее значение температуры поверхности частицы определяется из решения следующей системы уравнений ($T_{iS} = t_{iS} T_{e\infty}, T_{eS} = t_{eS} T_{e\infty}$)

$$
\begin{cases} t_{eS} = t_{iS} \\ t_{eS} = 1 + \dfrac{R}{4\lambda_e T_{e\infty}} I_0 - \sigma_0 \sigma_1 \dfrac{R T_{e\infty}^3}{\lambda_e} \left[t_{iS}^4 - 1 \right], \end{cases} \tag{89}
$$

Также из приведенных выше формул видно, что величина и направление силы и скорости фотофоретического движения крупной слабо испаряющейся капли определяется величиной и направлением дипольного момента плотности тепловых источников $\int\limits_V q_i z dV$. Этот момент мы обсуждали выше.

Плотность тепловых источников при увеличении интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. Это указывает на то, что фотофоретическая сила и скорость испаряющейся капли с увеличением интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. При постоянной величине дипольного момента, увеличение радиуса R испаряющейся капли приводит к уменьшению фотофоретической силы и скорости обратно пропорционально R^3.

Формулы также показывают, что фотофоретическая сила и скорость существенно зависят и от теплопроводности вещества частицы. При $\lambda_{iS} \to \infty$ (высоко теплопроводные частицы) сила и скорость фотофореза, при фиксированной величине дипольного момента, стремятся к нулю. Для абсолютно черного тела $\int\limits_V q_i z dV = -\frac{2}{3}\pi R^3 I_0$.

Вклад в силу и скорость упорядоченного движения слабо испаряющейся капли, как видно из формул оказывает зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Для большинства жидкостей величина $\frac{\partial\sigma}{\partial t_i} < 0$, т.е. поверхностное натяжение жидкости, уменьшается с температурой, а коэффициент K_{TS} имеет положительное значение. Как видно из формул в выражения, кроме диффузиофореза, входит множитель $\left(K_{TS}\frac{\nu_{eS}}{t_{eS}} + \frac{R}{3\mu_{iS}}\frac{\partial\sigma}{\partial t_i}\right)$. Это означает, что в случае крупных частиц существует некоторый критический радиус, при котором капля будет двигаться только за счет диффузиофоретической силы.

Полученные выражения для силы и скорости диффузиофореза слабо испаряющейся капли указывают на то, что движение среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности) не оказывают влияние на диффузиофорез. Аналогичный результат имеет место и для крупной нелетучей частицы сферической формы [2].

При $\omega = 0$ и $\beta_0 = 0$ мы получаем выражения для чистого диффузиофоретического и фотофоретического движения крупной слабо испаряющейся капли [2], а при $\mu_{iS} \to \infty$ и $\sigma \to 0$ полученные формулы переходят в соответствующие выражения для диффузиофореза и фотофореза крупной твердой частицы сферической формы [2,17,18].

Заключение

В квазистационарном приближении при числах Рейнольдса и Пекле много меньших единицы решена задача о влиянии движения среды (учет конвективных членов в уравнениях диффузии и теплопроводности) на диффузио-и фотофорез крупной слабо испаряющейся капли сферической формы, внутри которой действуют тепловые источники в бинарной вязкой газообразной среде. Получены аналитические формулы для силы и скорости упорядоченного движения капли, в которых учтено не только тепловое и диффузионное скольжение, но и зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры; внутренние течения; плотность тепловых источников и конвективные члена в уравнении теплопроводности как вне, так и внутри капли. Проведенные качественные оценки показали, что движение среды не влияет на диффузиофорез.

Список литературы

1. Яламов Ю.И., Галоян В.С. 1985. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван., Луйс, 205 с.

2. Яламов Ю.И., Обухов Б.А. 1972. К теории диффузиофореза крупных нелетучих аэрозольных частиц. Журнал технической физики. XLII(5). С. 1064-1068.

3. Preining O. 1966. Photophoresis. Aerosol Science. Ed. by C.N. Davies. London: Aca-demic Press. P. 111-153

4. Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, И.М. Зинькова, З.Л. Шулиманова Особенности диффузио-и фотофоретического движения слабо испаряющейся капли при малых относительных перепадах температуры //Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2019. Том 51, № 1. С. 104-114

5. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. 2008. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде. 2008. Прикладная механика и техническая физика. Т. 81 (5). С. 74-80.

6. Малай Н.В., Рязанов К.С., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. 2011. О силе, действующей на нагретую сферическую каплю, движущейся в газообразной среде. Прикладная механика и техническая физика. Т. 52(4). С. 63-71.

7. Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. 2012. Фотофорез нагре-тых крупных аэрозольных частиц сферической формы. Журнал технической физики. Т. 82(10). С. 42-49.

8. Малай Н.В., Лиманская А.В, Щукин Е.Р. 2016. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы.

Прикладная механика и техническая физика. Т. 57(2). С. 164-171.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. 1988. Теоретическая физика: учебное пособие. Т.6. Гид-родинамика. М., Наука. 736 с.

10. Хаппель Дж., Бреннер Г. 1976. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир. 630 с.

11. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. 1982. Теория термофореза умерен-но крупных аэрозольных частиц. Журнал технической физики. Т.52(11). С. 2253-2661.

12. Н.М. Матвеев Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1967. 409 с.

13. В.А. Шалдырван, В.С. Герасимчук Методы математической физики. М.: Вузовская книга. 2006. 511 с.

14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.

15. Береснев С.А., Кочнева Л.Б., Суетин П.Е. 203. Фотофорез аэрозолей в атмосфере Земли. Теплофизика и аэромеханика. №2. С.297-311.

16. Борен К., Хафмен Д. 1986. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., Мир, 660 с.

17. Кутуков В.Б., Щукин Е.Р. 1976. О фотофоретическом движении крупной аэрозольной частицы в поле оптического излучения. Журнал технической физики. Т.46(3). С.626-627.

18. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Плесканев А.А., Стукалов А.А. 2006. Особенности фотофоретического движения умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы. Оптика атмосферы и океана. Т.19(5). С. 413-418.