

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ И ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Исследование поведения нелинейной системы на примере осциллятора
Ван-дер-Поля

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 03.03.02 Физика
очной формы обучения, группы 12001515
Болотова Егора Владимировича

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент
Тарновский А. И.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1.	6
§1.1. Уравнение Ван-дер-Поля.....	6
§1.2. Численное интегрирование дифференциальных уравнений	12
Глава 2.	16
§2.1 Программа математического решения уравнения Ван-дер-Поля.....	16
Заключение	28
Список литературы.....	29

ВВЕДЕНИЕ

Помимо экспериментов над физическими системами методом воздействия на них различными силами и наблюдением за динамикой движения различных их элементов, в математической физике так же используются методы математического анализа, которые способны, в силу предсказательной природы физики, рассказать нам об изучаемой системе весьма достаточно. Помимо анализа самих формул, выведенных для описания динамики систем, можно непосредственно посмотреть, что из себя представляет данное движение, а также визуализировать все эти процессы для подробного изучения.

В нашем случае мы именно так и будем изучать систему, основанную на генераторе Мейснера, поведение которой описывается уравнениями Рэля и Ван-дер-Поля [1]. Эта система из себя представляет весьма замысловатый транзисторный или ламповый ключ с подключенной базой (соответственно сеткой) к трансформатору, откуда команды на прохождения тока поступают напрямиком из колебательного контура. Такая простая, но усложнённая именно связью контура с пропускным механизмом через трансформатор, схема весьма сильно усложняется в своей работе, приобретая дополнительные коэффициенты нелинейности.

Для описания динамики тока на транзисторе или лампе используют уравнение Ван-дер-Поля или уравнение Рэля. Описывая систему теоретически можно заметить градацию, позволяющую разделить системы с малой нелинейностью $\alpha \ll 1$ и большой нелинейностью $\alpha \gg 1$. Для удобства описания больших нелинейностей обычно используют уравнение Рэля, но в данной работе будет использоваться только уравнение Ван-дер-Поля, для решения которого был избран метод Рунге-Куты третьего порядка.

Таким образом, целью данной работы является изучение математических методов описания осциллятора Ван-дер-Поля и разработка процедуры численного моделирования генератора незатухающих колебаний Ван-дер-Поля.

Разработка процедуры, позволяющей нам моделировать генератор незатухающих колебаний Ван-дер-Поля, будет происходить посредством языка программирования C++. Все результаты, полученные в виде двух столбцов таблиц значений, будут визуализироваться в виде графиков от задаваемых нами величин с помощью стороннего программного обеспечения OriginPro.

Как ни странно, такая достаточно теоретическая вещь, как осциллятор Ван-дер-Поля, может найти применение на практике. В некоторых источниках [1] предлагается использовать систему осцилляторов Ван-дер-Поля для моделирования бипедального опорно-двигательного аппарата, буквально в попытках воспроизвести двигательный аппарат прямоходящих млекопитающих. Помимо движения человека предлагается модель связанных осцилляторов Ван-дер-Поля использовать для моделирования возбуждающих и тормозящих нейронных взаимодействий [2]. Экспериментально подтвердилось, что находится связь между постсинаптическим потенциалом и электроэнцефалограммой, что в дальнейшем произвело толчок к созданию модели, способной описывать отдельные группы нейронов [3].

Подобные нелинейные системы так же способны моделировать работу некоторых других органов. В частности, осцилляции сердечных сокращений очень близки по своему характеру с осцилляциями системы Мейснера и подобных. Ван-дер-Полем и Ван-дер-Марком в 1928 году было высказано предположение, что работа сердца полностью описывается тремя связанным нелинейными осцилляторами [4], соответствующими синоартериальному узлу, предсердию и желудочку (рис. 1), которые имеют строгую связь в сокращении между собой.

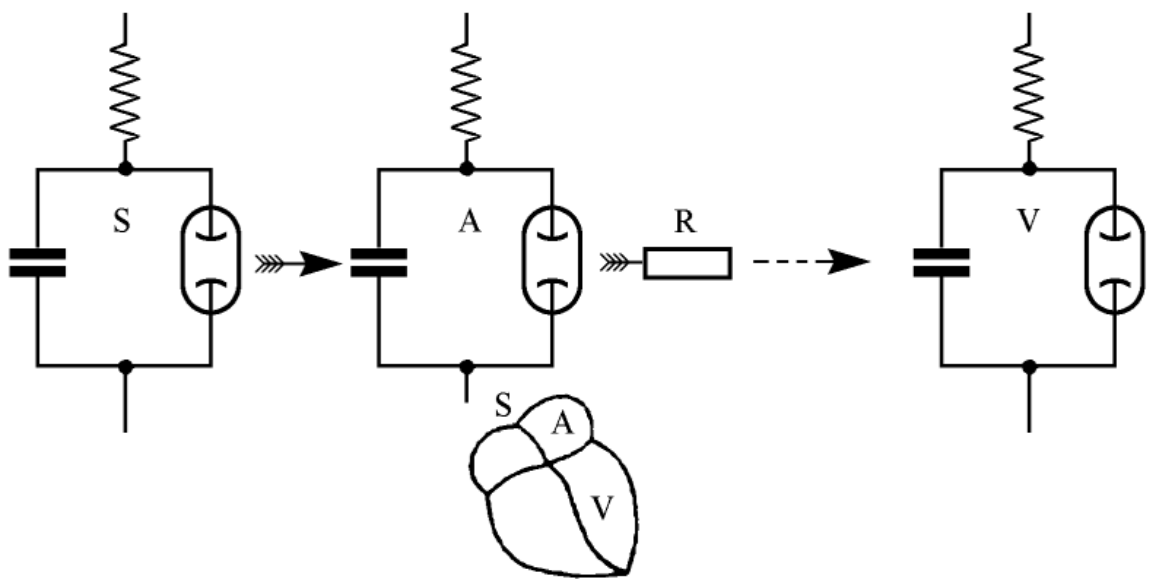


Рис. 1. Схематическое представление сердца тремя релаксационными системами на основе осциллятора Ван-дер-Поля. S — синусный узел, A — предсердие, V — желудочек, R — запаздывающая система, представленная в модели как конечное время, необходимое для прохождения стимула через AV узел.

ГЛАВА 1

1.1. Уравнение Ван-дер-Поля.

Уравнение Ван-дер-Поля описывает систему незатухающих колебаний, притом уравнение призвано описывать электронный генератор подобных незатухающих колебаний, называемый генератором Мейснера. Перед началом получения уравнения стоит более подробно затронуть модель этого генератора и его работу.

Идея о механическом незатухающем маятнике подобна идее создания электрического аналога генератора гармонических незатухающих колебаний. В цифровой технике подобное способен осуществлять простейший элемент системы, называемый колебательным контуром. По своей природе, колебательный контур является генератором затухающих колебаний, что не сильно подходит под нашу желаемую идею: такой генератор будет явно затухающим, теряя энергию на зарождения магнитного поля и на нагрев проводника от тока. В данном случае наш генератор станет, в действительности, генератором незатухающих гармонических колебаний только если будет питаться извне электрической энергией, что позволит поддерживать систему и заставить генерировать постоянные по периоду колебания.

Подобных генераторов и их модификаций может существовать большое множество, однако нас интересует именно генератор Мейснера, так же имеющий в своей конструкции колебательный контур. От тривиальной системы «генератор-источник питания» наша схема отличаться будет весьма сильно при рассмотрении её колебаний, а на деле конструктивно у нас есть дополнительная индукция в виде трансформатора, который соединяет колебательный контур с пропускной сеткой лампы или базой транзистора. В целом, генерируемые колебания этой системы не всегда можно назвать гармоническими, так как от синусоидального закона подобные колебания будут, при определённых условиях, сильно отклоняться, сохраняя только

периодичность, но не вид функции $f(x) = \sin(x)$. Особо большой разницы между ламповым и полупроводниковым транзистором в нашей системе не наблюдается, от чего пример работы можно приводить на схеме с транзистором (рис.2).

Как выше было отмечено, наш npn транзистор подключён на общий эмиттер, это значит, что входной сигнал подаётся на базу по отношению к эмиттеру, а выходной сигнал снимается с коллектора по отношению к эмиттеру. Такое подключение, кроме всего прочего, так же позволяет получить нам усиление по мощности.

Для построения рабочей формулы, которая будет описывать работу схемы Мейснера, воспользуемся правилами Кирхгофа. Обход по колебательному контуру будет давать:

$$IR + \frac{Q}{C} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (1.1)$$

где $dQ/dt = i$ – ничто иное, как ток в колебательном контуре с конденсатором C_2 . В правой части формулы (1.1) у нас записана электродвижущая сила самоиндукции катушки L_2 .

Вообще говоря, $i \neq I$ из-за разветвления цепи, что даёт нам возможность расписать I как сумму токов в контуре и тока исходящего из контура, обозначив его как i_a , тогда

$$\frac{dQ}{dt} = I - i_a. \quad (1.2)$$

Дифференцируя (1.1), получаем

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = -L \frac{d^2I}{dt^2},$$

откуда, подставив (1.2), мы получим

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{i_a}{C}. \quad (1.3)$$

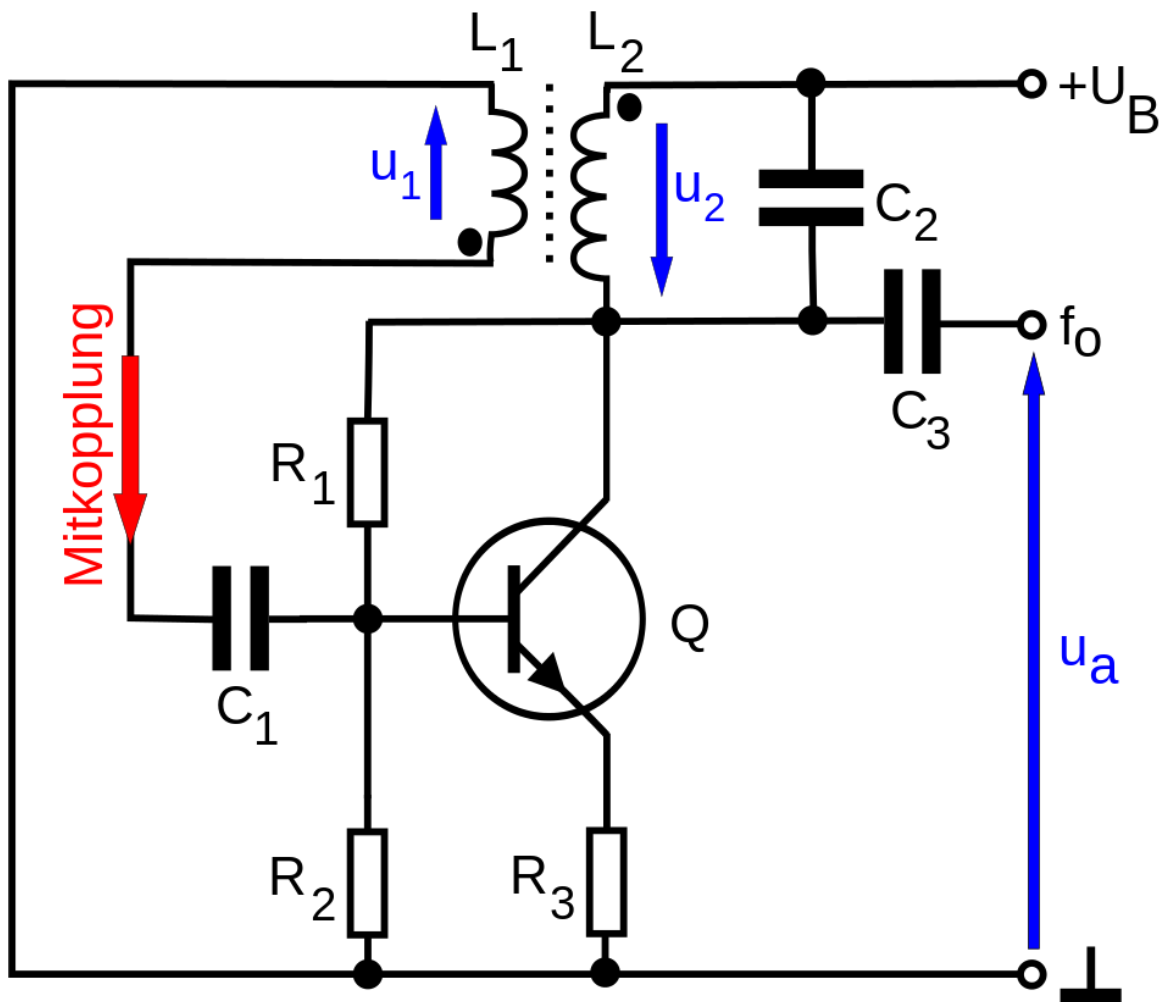


Рис. 2. Генератор Мейснера на каскаде с общим эмиттером на полупроводниковом транзисторе рпн-типа. База транзистора подключена к колебательному контуру через трансформатор L_1-L_2 , питание контура от $+U_B$ источника разности потенциала.

Немного преобразовав формулу и записав некоторые переменные под новые

$$\frac{R}{L} = 2\delta \quad \text{и} \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

мы получим

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 i_a. \quad (1.4)$$

Из этой формулы нам так до сих пор не получится ничего сделать. В схеме Мейснера анодный ток напрямую зависит от управляющего напряжения на сетке E_g . Отношение токов анода и сетки можно представить себе в виде

$$i_a = f(E_g + DE_a). \quad (1.5)$$

Тогда E_a — напряжение между катодом и анодом, а $D \ll 1$, что оказывается обычной проницаемостью

$$D = \frac{1}{\mu}.$$

Напряжение на аноде и сетке будут иметь электродвижущая сила. E_{a0} и, соответственно, E_{g0} . Напряжение анода суммируется из электродвижущей силы батареи и электродвижущей силы. колебательного контура $-L dl/dt$. Так же не стоит забывать про магнитное поле, зарождаемое в контуре. Наводка тока в катушке L_2 и э.д.с. его будет $-M dl/dt$, где M — коэффициент взаимной индукции. С учетом этого,

$$i_a = f\left(E_{g0} - M \frac{dI}{dt} + D\left(E_{a0} - L \frac{dI}{dt}\right)\right). \quad (1.6)$$

Знак при M может быть различным, однако это достаточно важно для получаемой системы.

Из (1.4) и (1.6) пренебрегая током сетки при оседании на ней электронов находим

$$\ddot{I} + 2\delta \dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 f\left(E_{g0} - M \dot{I} + D(E_{a0} - L \dot{I})\right). \quad (1.7)$$

Данное уравнение уже нелинейно, однако есть точки положения стабильного равновесия, откуда уравнение можно линеаризовать разложением функции f

в ряд по малым \dot{I} игнорируя члены высших порядков. С некоторыми дополнительными преобразованиями мы так же можем использовать частичную линейность уравнения с постоянными коэффициентами и постоянной правой частью, получая

$$\ddot{I} + (2\delta + \omega_0^2(M + DL)S)\dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 f(E_{g0} + DE_{a0}) \quad (1.8)$$

Где $S = f'(E_{g0} + DE_{a0})$ — крутизна анодно-сеточной характеристики лампы в данной рабочей точке.

Подбирая коэффициент в уравнении как положительный, мы получаем обыкновенные затухающие колебания в ходе решения уравнения. Однако, при избирании отрицательного коэффициента, уравнение преобразуется в нарастающую по колебаниям функцию. Можно выписать условие самовозбуждения генератора как

$$2\delta + \omega_0^2(M + DL)S < 0. \quad (1.9)$$

Изображая состояние системы на фазовой плоскости (I, \dot{I}) , условие самовозбуждения можно трактовать как условие неустойчивости в нулевой точке

$$R + \frac{(M + DL)S}{C} < 0. \quad (1.10)$$

Так как $L, C, D, S > 0$, то, очевидно, необходимо условие $M < 0$, что говорит о строго определённом положении катушек друг относительно друга, иначе колебания будут иметь затухающий характер.

По мере нарастания колебаний в системе линейная часть уравнения потеряет свою актуальность, приближая момент рассмотрения нелинейной части.

Выбрав на перегибе вольт-амперной характеристики рабочую точку так, чтобы вторая производная по функции f переходила в нуль в данной точке, выполним последующее разложение правой части (1.6) вплоть до третьего по порядку члена:

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I =$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_0^2 f(E_{g0} + DE_{a0}) + \omega_0^2 S(M + DL)\dot{I} - \\
&\quad - \frac{1}{6} \omega_0^2 f'''(E_{g0} + DE_{a0})(M + DL)^3 \dot{I}^3
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Полученное уравнение представляет из себя уравнение Рэлея. Из дальнейшего нам нужно найти напряжение на выходах конденсатора в контуре. Исходя из (1.1) мы имеем

$$U = \frac{Q}{C} = IR + L \frac{dI}{dt} \approx LI \tag{1.12}$$

Продифференцировав один раз по времени уравнение (1.8)

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 \alpha \dot{I} + \omega_0^2 \dot{I} + \omega_0^2 \gamma 3\dot{I}^2 \dot{I} = 0,$$

$$\ddot{I} + (2\delta + \omega_0^2 \alpha + \omega_0^2 \gamma 3\dot{I}^2)\dot{I} + \omega_0^2 \dot{I} = 0,$$

$$\dot{I} = U$$

Так же, выражая в электротехнических величинах

$$\ddot{U} + \left(\frac{R}{L} + \frac{(M + DL)S}{LC} + \frac{f'''(E_{g0} + DE_{a0})(M + DL)^3}{2CL^3} U^2 \right) \dot{U} + \frac{1}{LC} U = 0$$

Уравнение возможно для переписи в более элегантной форме при некоторых заменах, таких как $\tau = \omega_0 t$, тогда

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} - \varepsilon(X - U^2) \frac{dU}{d\tau} + U = 0, \tag{1.13}$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{LC} \frac{f'''(E_{g0} + DE_{a0})(M + DL)^3}{2CL^3} > 0,$$

$$X = - \frac{\frac{R}{L} + \frac{(M + DL)S}{LC}}{\frac{f'''(E_{g0} + DE_{a0})(M + DL)^3}{2CL^3}} > 0.$$

Уравнение (1.13) более известно под названием уравнение Ван-дер-Поля. Но для предания более стандартного вида мы сделаем ещё некоторые замены: $x = U/\sqrt{X}$, а $\alpha = \varepsilon X > 0$. В результате получим:

$$x'' - \alpha(1 - x^2)x' + x = 0. \tag{1.14}$$

В дальнейшем именно уравнение (1.14) мы будем использовать с математическими методами для исследования нелинейной системы.

1.2. Численное интегрирование дифференциальных уравнений.

Пожалуй, самый простой математический метод решения дифференциальных задач – метод Эйлера. Этот метод даёт отличный способ решения задачи Коши [5].

Зададим задачу Коши для некоторого уравнения первого порядка как

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.2.1)$$

с начальным условием $y(0) = y_0$.

Определяем функцию в окружении точки в некоторой области. Само решение будет располагаться в некотором интервале (x_0, a) , а сам интервал разбиваться на бесконечно малые отрезки, ограничиваемые так называемыми узлами (см. рис. 3), тогда

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq a. \quad (1.2.2)$$

В подобных приближениях можно расписать нахождение значения y_i , каждого следующего значения y по сетке x_n с помощью тривиальной рекуррентной формулы [5]

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Для более удобной формы, чтобы можно было проще пользоваться формулой с помощью вычислительной техники, положим значение $(x_i - x_{i-1}) = h$, тогда:

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}). \quad (1.2.3)$$

В таком случае начальные условия будут выглядеть как задание y_{i-1} и шага h по узлам, подставляя на место $f(x_{i-1}, y_{i-1})$ любую необходимую для исследования и решения функцию. Именно эту форму метода Эйлера мы и будем в дальнейшем использовать для работы над нелинейной системой.

Однако у такого простого математического метода есть очень коварная ошибка, заставляющая отказаться от использования этого метода в более серьёзных расчётах. Оценив погрешность метода можно получить достаточно интересные результаты.

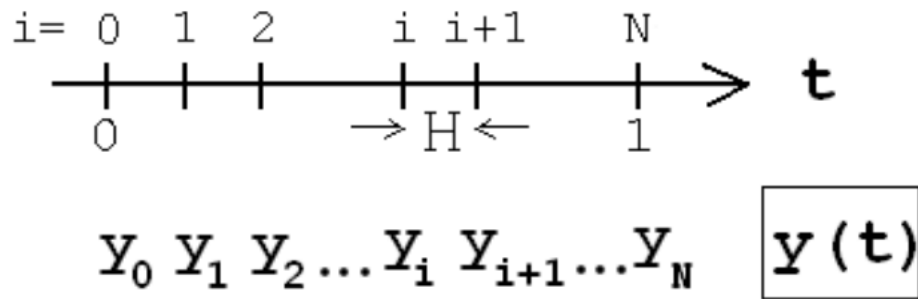


Рис. 3. Сетка по t , та же сетка, что и по x .

Погрешность метода будет пониматься как разность значений численного решения на одном шаге h и точным решением в x_{i-1} точке. Последняя полученная формула преобразуется в точное решение путём разложения в Тейлора ряд вида:

$$y(x_{i-1} + h) = y(x_{i-1}) + hy'(x_{i-1}) + O(h^2).$$

Тогда ошибка L в точке x_{i-1} будет выглядеть как

$$L = y(x_{i-1} + h) - y_i = O(h^2). \quad (1.2.4)$$

Как видно из уравнения, локальная ошибка в точке будет равна $O(h^2)$ и по всему промежутку $O(h)$. Мы видим так же, что метод Эйлера является методом первого порядка, то есть с достаточно большой погрешностью. В этом легко убедиться, применив его для решения дифференциального уравнения, допускающего аналитическое решение. Результат такого сравнения приведен на рисунке 4. В связи с этим часто применяют более точные методы, например, методы Рунге-Кутты.

Методы Рунге-Кутты являются классом множества численных методов для решения задачи Коши. Как и метод Эйлера, этот класс методов подходит для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Вообще говоря, метод Рунге-Кутты можно назвать модифицированным методом Эйлера, к самому классу можно так же отнести явный метод Эйлера и модифицированный метод Эйлера с пересчётом [5].

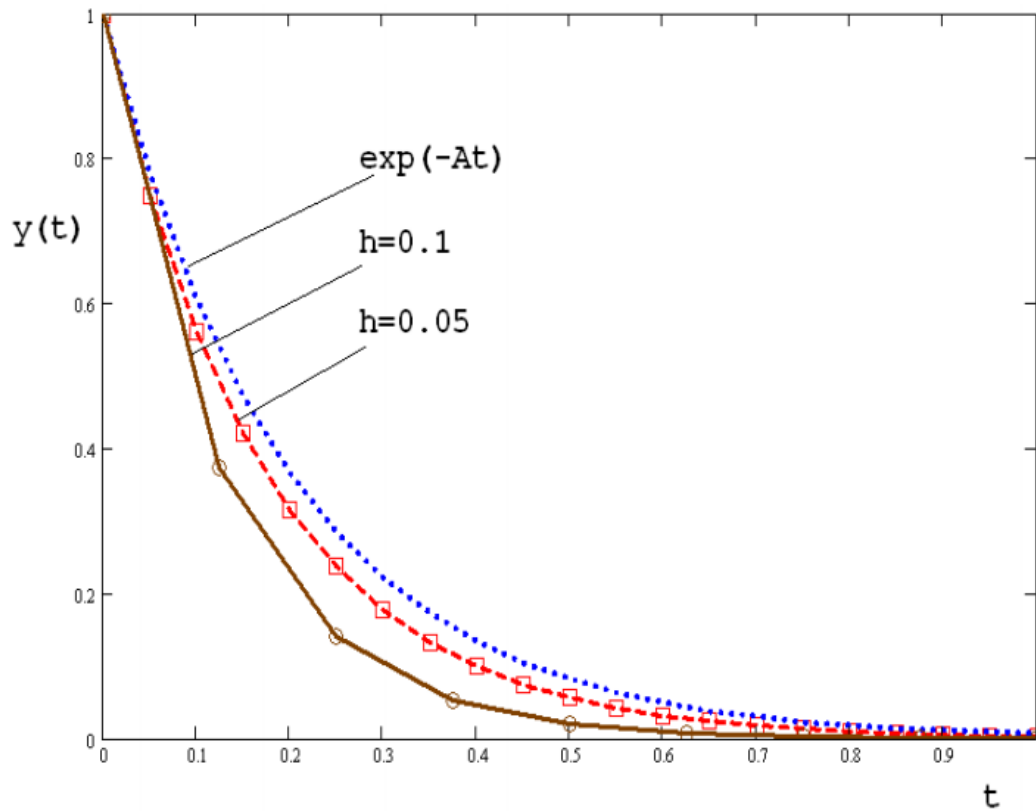


Рис. 4. Решение уравнения $\frac{dy}{dt} = -5y$ полученное аналитически (синяя кривая) и численно с помощью метода Эйлера (бурая и красная кривые). Отлично видно разницу между бурой линией и красной, для которых шаг составлял 0.05 и 0.1 соответственно.

Наиболее популярен метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Его используют в таких программных пакетах, как MathCAD, Maxima, Maple и других. Реже используются методы Рунге-Кутты пятого и шестого порядка точности. Они дают хорошие результаты, однако, это добавляет сложности в расчёте, и нагрузка на вычислительные мощности возрастает. На практике для простых систем достаточно метода четвертого порядка.

В данной работе мы не будем рассматривать полный вывод методов Рунге-Кутты, а только проведём краткий обзор его в угоду важности иных результатов.

Рассматривая задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (1.2.5)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0.$$

Приближенное решение, а точнее, значение следующих положений точки y будет выглядеть подобным образом [6]

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (1.2.6)$$

где промежуточные функции от k_1 до k_4 представляются в расписанном виде как

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3), \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

где, как и в методе Эйлера, h — шаг по сетке x_n .

ГЛАВА 2

2.1. Численное интегрирование уравнения Ван-дер-Поля.

Первым методом, который будет использоваться в нашем исследовании – это метод Эйлера. Однако, в дальнейшем, он в обязательном порядке заменяется на метод Рунге-Кутты, обеспечивающий более высокую точность результата.

Заметим, рассмотрение работы Ван-дер-Поля уравнения будет происходить в фазовом пространстве.

В первой программе мы будем использовать итерационную формулу (1.2.3)

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Шаг будет подбираться так же экспериментально из соображений быстрого, но относительно качественного расчёта. Количество узлов, что в программе будет названо количеством итераций цикла, так же подбирается экспериментально из тех же соображений. Начальные условия будем подбирать больше нуля для x и первой производной по t — y .

$$y = \dot{x}$$

Это так же будет условием, подходящим для фазового пространства.

Приведём уравнение Ван-дер-Поля к виду, пригодному для применения численных методов:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \alpha(x^2 - 1)y. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Теперь распишем систему уравнений (2.1) для метода Эйлера:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + hy_{i-1}, \\ y_i &= y_{i-1} + h(-x_{i-1} - \alpha(x_{i-1}^2 - 1)y_{i-1}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

Каждое следующее значение x и y будет считаться исходя из начальных условий, от чего каждая переменная данного типа в правых частях

должны иметь индексы, обозначающие их привязанность к начальным условиям.

Для полной гармонии физики с вычислительной математикой нам стоит соединить каждый узел расчётов переобозначением переменных

$$y_{i-1} = y_i$$

Так же и для значений x .

В качестве языка для реализации метода был выбран C++, и, в угоду лаконичности, окончательная программа не имеет иных библиотек, кроме основной библиотеки ввода-вывода. Графические библиотеки и функции прекрасно заменяются использованием стороннего программного обеспечения, такого как OriginPro.

Для применения метода Рунге-Кутты, по аналогии с Эйлером, нам необходимо воспользоваться системой уравнений, эквивалентной уравнению Ван-дер-Поля.

Изначально в ход пошел метод Рунге-Кутты второго порядка. Первый мы обошли стороной, так как ошибка там буквально равна ошибке метода Эйлера: у нас есть достаточно аккуратный метод для подобного решения, значит нам незачем использовать метод Рунге-Кутты первого порядка. Для решения этой системы воспользовались методом Рунге-Кутты второго порядка и получили следующие рекуррентные формулы [7]:

$$y_{n+1} = y_n + h(-x_n - \alpha(x_n^2 - 1)(y_n + \frac{-x_n - \alpha(x_n^2 - 1)y_n}{2}))$$
$$x_{i+1} = x_i + h\left(y_i + \frac{y_i}{2}\right) \quad (2.3)$$

По мере увеличения порядка мы будем получать всё большие и большие формулы, что в программном виде можно упростить до использования функций с передачей им параметров, нежели писать одну формулу, выверенную заранее на бумаге.

К слову, метод Рунге-Кутты второго порядка, хоть и имеет уже выше точность, чем метод Эйлера, в ходе экспериментирования с переменными дал некоторую оплошность при значениях $\alpha \geq 0.2$. Такой результат нас не особо

устраивает, от чего мы добавляем дополнительный порядок и используем метод Рунге-Кутты третьего порядка. Как позже окажется, этого будет достаточно для моделирования достаточно больших нелинейностей.

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + 2k_3) \\
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= f(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Результаты применения этого метода для решения рассматриваемой нами задачи приведены на рисунке 5. Несмотря на то, что точность результатов вполне устраивает, при достаточно больших значениях начинают вылезать ошибки с шагом (рис. 6), но это можно корректировать уменьшением шага h или новым повышением порядка метода.

Рассмотрим непосредственно разницу между методами в сравнении с аналитическим решением уравнения

$$x'' + x = 0,$$

которое является уравнением Ван-дер-Поля, но с нулевой нелинейностью. Решение этого уравнения может быть легко найдено аналитически:

$$\begin{aligned}
 x &= \sin(t) + \cos(t), \\
 x' &= \cos(t) + \sin(t).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Как мы с вами можем видеть, это обычный эллипс с центром в нуле. Предположительно, решение, полученное с помощью численных методов, должно прилегать близко к аналитическому решению, что можно наблюдать на рисунке 7. Однако, отличия в точности методов хорошо становятся заметны при увеличении шага. Как видно из рисунка 8, относительно синей линии красная, обозначающая метод Эйлера, ближе. Вероятно, это произошло по причине не самой большой точности метода третьего порядка, но по двум предыдущим рисункам точно можно судить, что решение в ограниченной области с помощью математических методов существует и применимо.

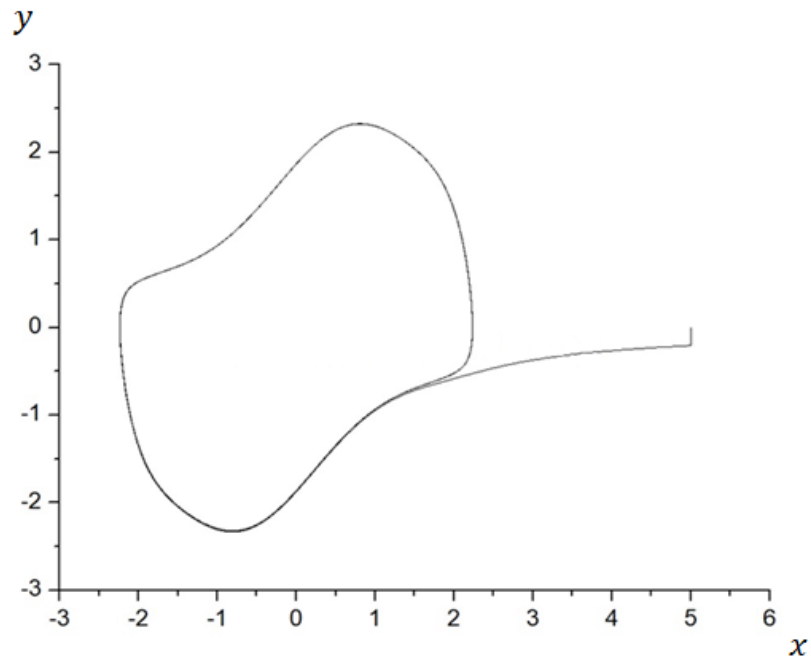


Рис. 5. Фазовая траектория для осциллятора Ван-дер-Поля, вычисленная с помощью метода Рунге-Кутты третьего порядка. Параметр $\alpha = 1$, начальные условия соответствуют $y = 0$ и $x = 5$, шаг равен 0.0001, количество итераций 1000000.

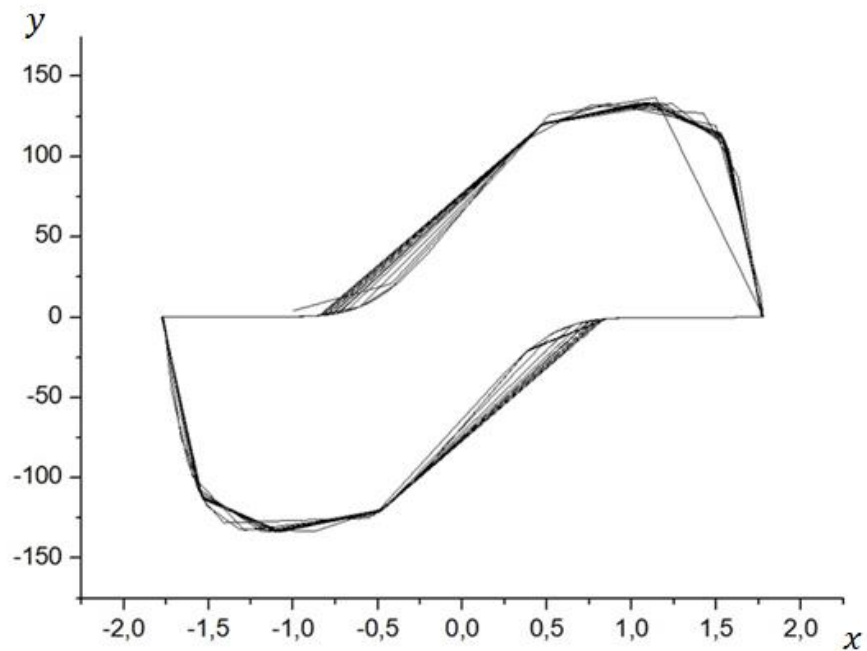


Рис. 6. То же, что и на рисунке 5 для $\alpha = 10$, $y = 4$ и $x = -1$, шаг 0.0001, итераций 1000000.

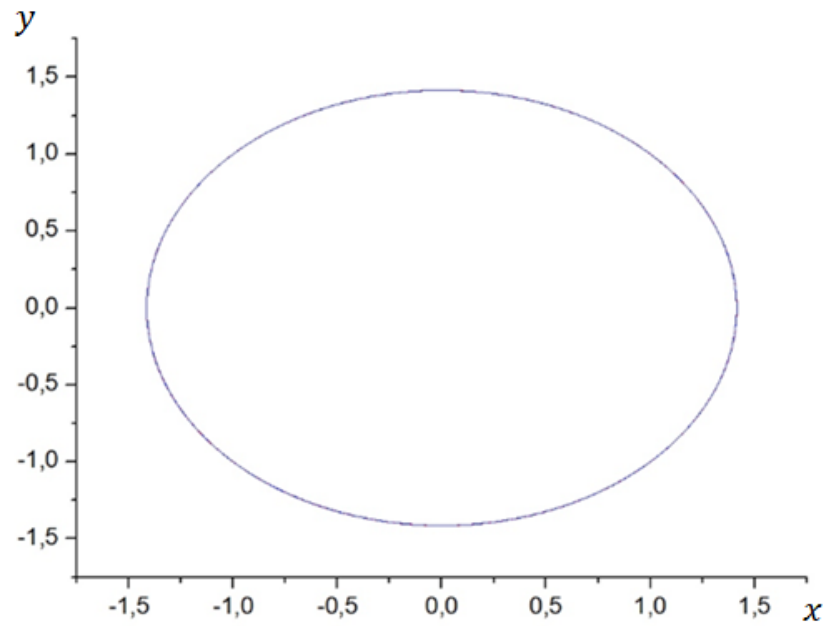


Рис. 7. Фазовая траектория осциллятора Ван-дер-Поля для случая $\alpha = 0$. На рисунке приведены результаты аналитического решения (синяя кривая) и решений, полученных методами Рунге-Кутты (черная кривая) и Эйлера (красная кривая). Все эллипсы накладываются друг на друга, от чего мы видим только один.

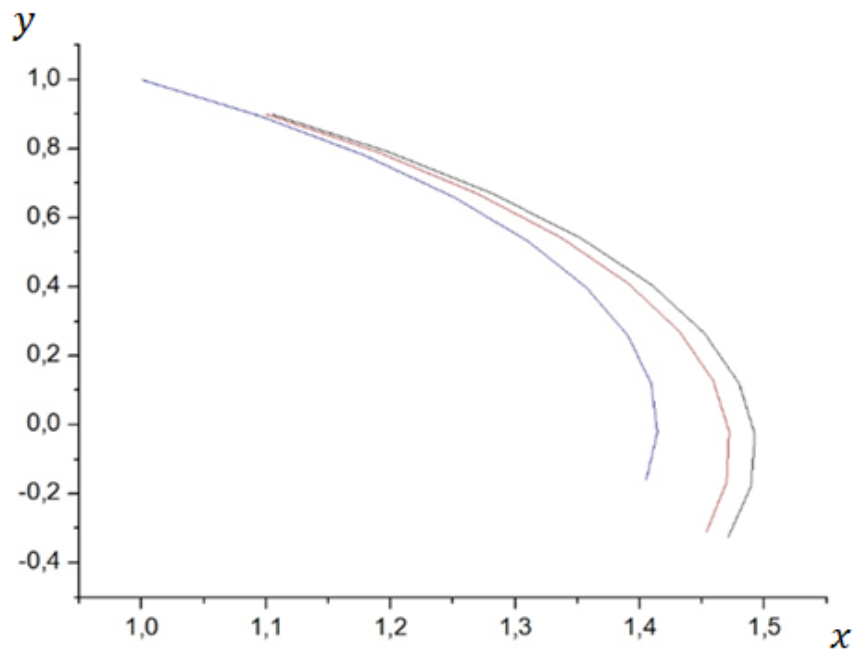


Рис. 8. То же, что и на рисунке 7, но $h = 0.1$, и количество итераций понижено до 10.

Помимо больших или умеренных нелинейностей стоит затронуть и малые, то есть такие, для которых коэффициент $\alpha \ll 1$. В этом случае фазовые траектории будут выглядеть так, как показано на рисунках 10 и 11, которые представляют нам отличные данные для разбора поведения системы с малой нелинейностью. Сравнивая рисунок 10 и 11 с рисунком 5 и 9 можно отметить одну особенность: несмотря на то, что шаг в каждой приведённой системе одинаковый, как и итераций в целом, мы видим различные не только по траектории движения, но также и по методу подхода к так называемому аттрактору. Стоит сразу добавить, что система уравнений (2.1) имеет устойчивое положение, к которому система стремится из любой начальной заданной точки, как бы далеко она не лежала от стабильной траектории. Точка на фазовой плоскости, каким бы начальным условием она не обладала, придёт к аттрактору. В случае больших нелинейностей мы видим с вами только аттрактор. Точка почти сразу выходит на равновесное положение и осциллирует по некоторой замкнутой кривой. При том, мы с вами можем наблюдать следующее: если начальная точка лежит вне аттрактора, то обязательно система начнёт стремиться к аттрактору, как бы падая на поверхность снаружи; в обратном случае, когда начальная точка лежит в окрестности кривой аттрактора, точка буквально начинает раскручиваться до положения аттрактора.

Такое же поведение мы можем с вами наблюдать и с малыми нелинейностями, однако, в отличии от своих высоконелинейных версий, решение с низкой нелинейностью обладают большей «инертностью». С одинаковыми условиями, кроме начальных и нелинейности, мы видим одно интересное проявление нелинейного члена в уравнении. Уравнения с малыми нелинейностями будто тянут с приходом к своему аттрактору, медленно к нему стремясь. Так же, как и с рисунками 5 и 9, на рисунках 10 и 11 показаны случаи с внешним начальным условием и внутренним. Ещё можно отметить, что во всех перечисленных случаях раскрутка до аттрактора происходит по часовой стрелке.

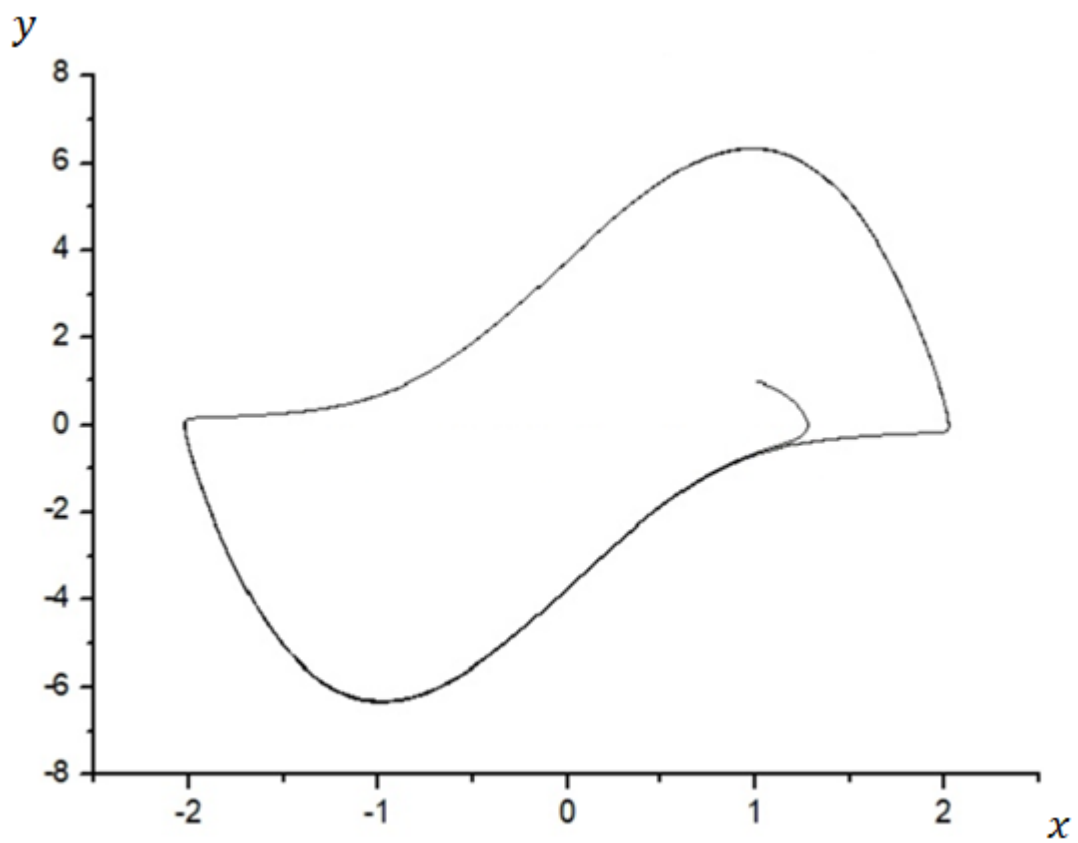


Рис. 9. Метод Рунге-Кутты, коэффициент нелинейности $\alpha = 4$, шаг 0.0001, итераций 1000000.

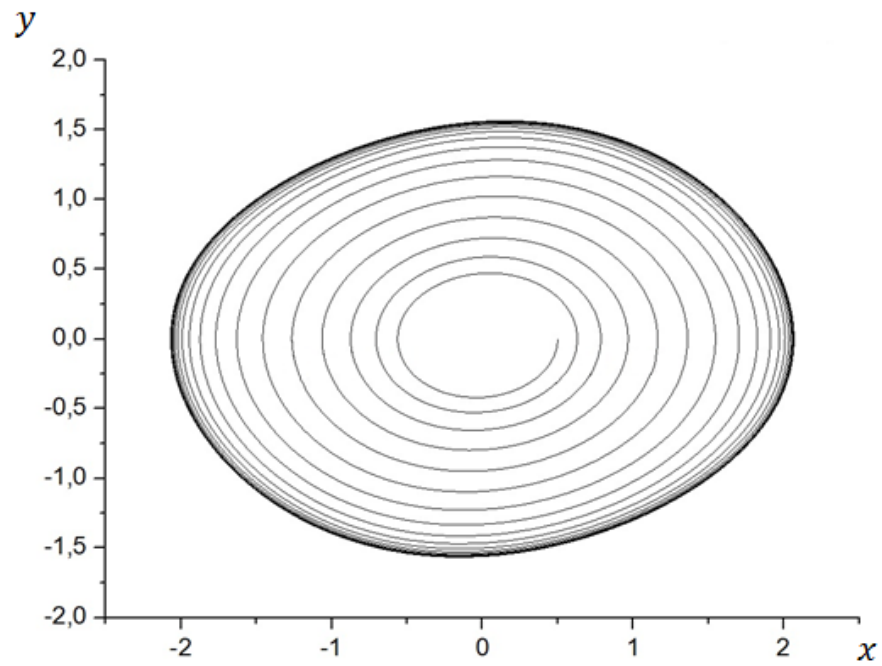


Рис. 10. Фазовая траектория осциллятора Ван-дер-Поля для случая малой нелинейности при $\alpha = 0.1$, с начальными условиями $y = 0$ и $x = 0.5$; шаг 0.0001, количество итераций равно 1000000.

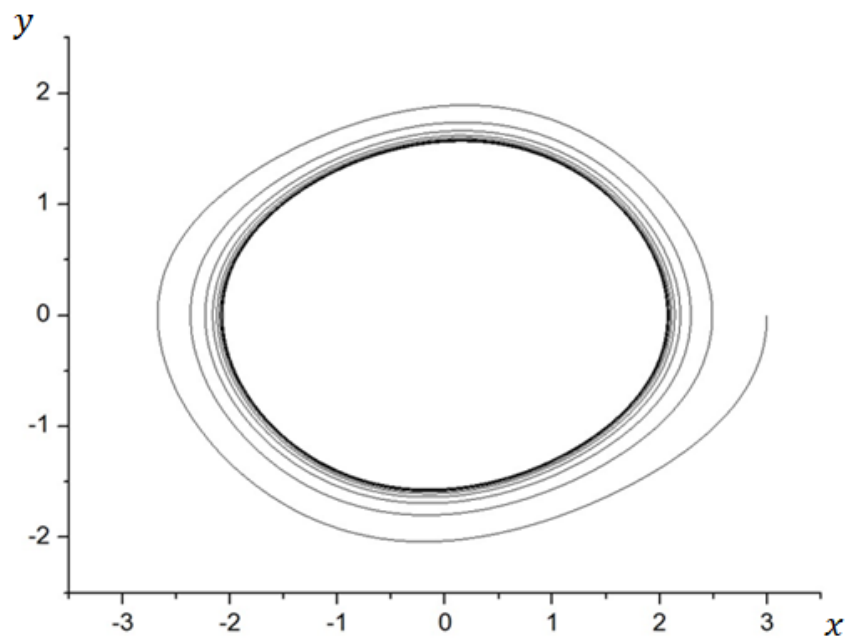


Рис. 11. То же, что и на рисунке 10, но для начальных условий $y = 0$ и $x = 3$

Мы можем наблюдать явно каждую степень приращения функции на фазовом пространстве с новым и новым шагом видя, как медленно стремится точка к аттрактору. Замечу, что решение, находясь между нулевой нелинейностью и нелинейностью равной единице можно выделить как достаточно особое. Если брать область $\alpha \gg 0$ и $\alpha \ll 1$, то отлично заметно, что именно на этой области мы можем наблюдать такую сильную инертность системы. В случаях $\alpha \gg 0$ мы наблюдаем эллиптическую кривую, схожую с $\alpha = 0$ и аналитическим решением (рисунок 7), в случае $\alpha \gg 1$ мы наблюдаем явное расхождение и отдаление от эллиптической кривой с намного меньшей инертностью системы.

Можно так же для анализа обратиться к сечению процесса по α от 0.0001 до 4 с некоторой градацией. Именно на рисунке 12 можно отметить существование такой инертной зоны. Решения от 1 и до 4 представляют из себя более чёткий вид аттрактора, нежели их наименьшие по нелинейности версии.

Кроме представления системы на фазовой плоскости так же можно представлять её непосредственно в виде временной зависимости $x(t)$ и, при необходимости, $y(t)$, сравнивая эти величины со случаем нулевой нелинейности. В частности, на рисунках 13 и 14, можно заметить рост амплитуды колебаний и увеличение их периода с увеличением вклада нелинейных слагаемых в уравнении (1.14).

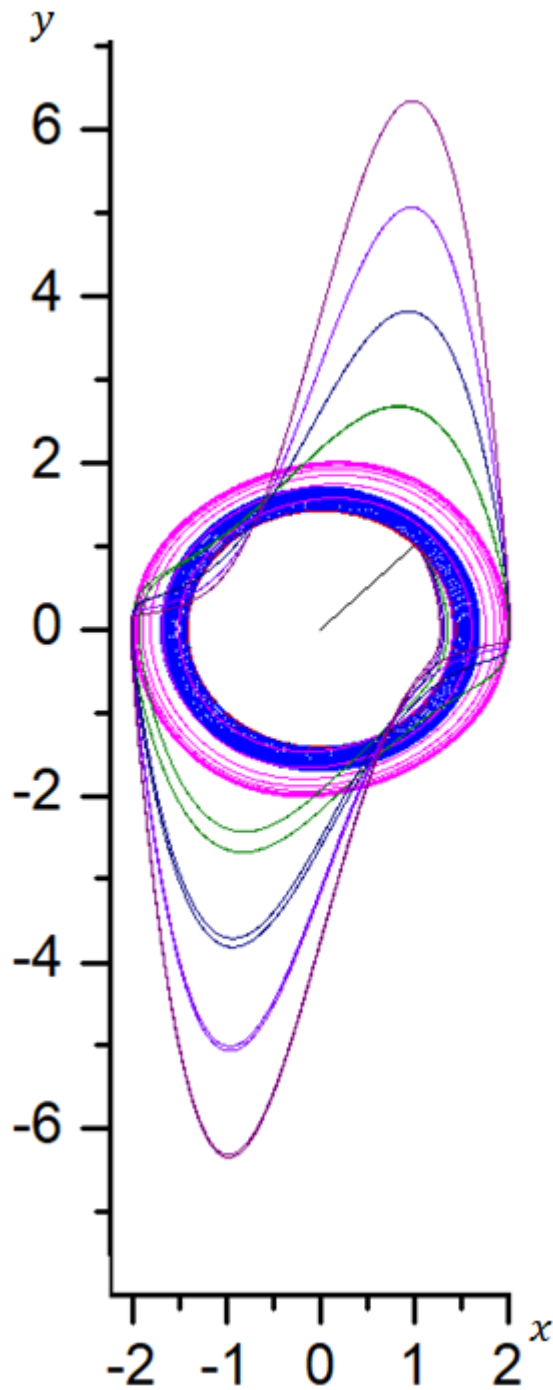


Рис. 12. Фазовое пространство с наложенными друг на друга решениями уравнения Ван-дер-Поля с начальными условиями $y = 1$ и $x = 1$. Соответственно увеличению нелинейности: красная кривая (скрыта за синей кривой) $\alpha = 0.001$, синяя кривая $\alpha = 0.01$, розовая кривая $\alpha = 0.1$ и так далее по нарастающей $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$. Установленный шаг 0.0001, итераций проведено 100000. Аналитическое решение обозначено чёрным цветом.

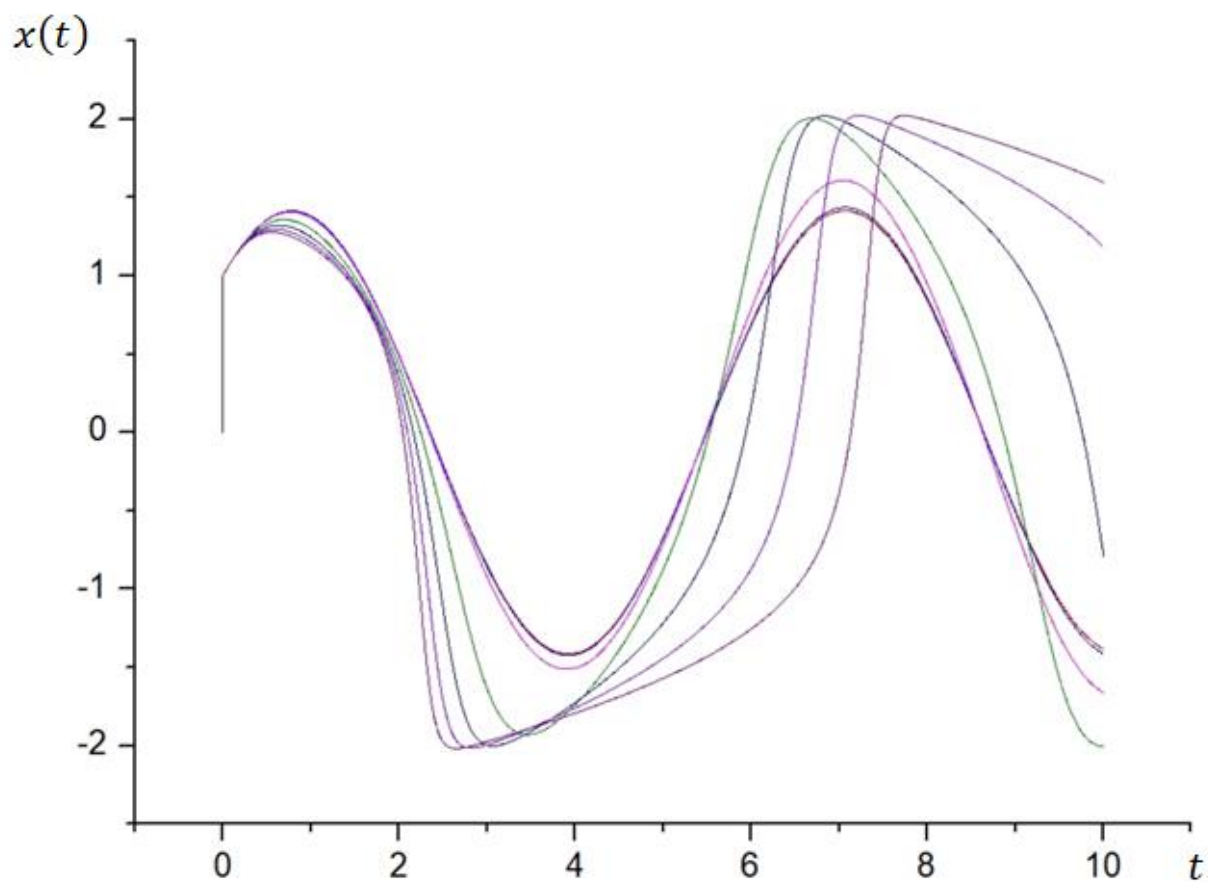


Рис. 13. Решение уравнения Ван-дер-Поля. В центре с одинаковой амплитудой и одинаковой длиной волны находится гармоническая осцилляция аналитического решения. Дальше, исходя от аналитического решения, с увеличением амплитуды и длины волны, по нарастающей располагаются решения уравнения с различными нелинейностями. $\alpha = 0.001$, $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$, начальные условия соответствуют рисунку 12.

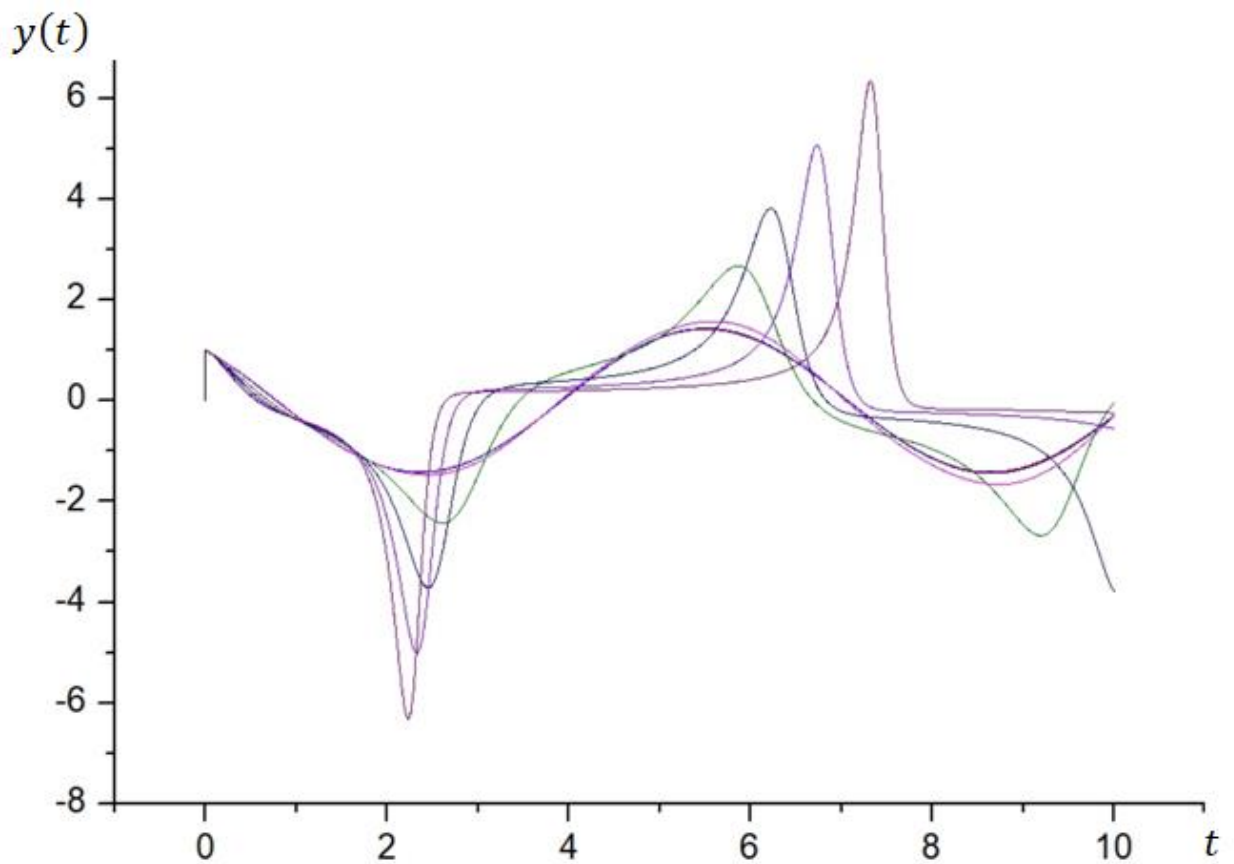


Рис. 14. Начальные условия и нелинейности повторяют рисунок 13. На графике показана зависимость $y(t)$ с различной нелинейностью. В центре, как и всегда, располагается аналитическое условие, соответствующее нелинейности $\alpha = 0$, далее, так же как и в рисунке 13, по возрастанию амплитуды и длины волны следуют графики с увеличением нелинейности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы было исследовано поведение нелинейной физической системы на примере осциллятора Ван-дер-Поля. Для этого был разработан пакет программ на языке программирования C++, осуществляющий численное интегрирование уравнения Ван-дер-Поля на базе методов Эйлера и Рунге-Кутты различных порядков, позволяющий моделировать поведение генератора для широкого интервала характеристик.

Разработанный пакет программ позволил провести анализ вида фазовых траекторий осциллятора и характера его колебаний в зависимости от величины вклада нелинейных слагаемых, входящих в уравнение. Кроме того, удалось сравнить результаты работы программного пакета с аналитическим решением задачи в нелинейном случае, и таким образом оценить эффективность работы выбранных для интегрирования уравнения Ван-дер-Поля численных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. П. Кузнецов, Е. С. Селиверстова и др. *Феномен уравнения Ван-дер-Поля*. // Изв. Вузов «ПНД». – Т. 22, № 4 – 2014.
2. FitzHugh, R. *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes* // Biophysics J – V. 1. – 1961. – P. 445-466.
3. Nagumo, J., Arimoto, S. and Yoshizawa, S. *An active pulse transmission line simulating nerve axon* // Proc. IRE. – V. 50. – 1962. – P. 2061-2070
4. van der Pol B., van der Mark J. *The Heartbeat considered as a Relaxation oscillation, and an Electrical Model of the Heart* // Phil. Mag. Suppl. – No. 6. – 1928. – P. 763—775.
5. Steven E. Koonin *Computational physics*. – Addison-Wesley Publishing Company, 1986. – 409 p.
6. В. В. Демченко *Метод Рунге-Кутты решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*. / М.: МФТИ, 2004. – 20с.
7. Д. В. Кирьянов, Е.Н. Кирьянова *Вычислительная физика*. – М.: Полибук Мультимедиа, 2006. – 352 с.