ЭКЗОГЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Н.В. Есин, В.М. Московкин

Математическое моделирование экзогенных процессов началось с решения простых задач, в которых интенсивность процесса оценивалась по значению вертикальной скорости изменения рельефа. А.Е. Шайдеггер (1964) установил, что кинематической характеристикой является не вертикальная скорость, а скорость, направленная по нормали к поверхности склона. Мы предложили назвать эту скорость нормальной (Есин, 1964, 1968).

По общему подходу к решаемой задаче математические модели можно разделить на следующие группы: физические, термодинамические, кибернетические, стохастические, кинематические.

Отличительной чертой физических моделей является то, что в них максимально полно описывается механизм воздействия экзогенных сил на поверхность Земли, причем, для этого во многих случаях применяются методы механики сплошной среды. Таких моделей предложено относительно немного (Ананян, 1962; Есин, Скоркин, 1970; Есин, Савин, 1971, 1977; Трофимов, Московкин, 1977 и др.). Неполное описание механизма процесса приводит к двум разновидностям физических моделей: диффузионным (Каллинг, 1960, 1963; Девдариани, 1963, 1967; Карсон, Киркби, 1972; Анерт, 1973; Трофимов, Московкин, 1976 и др.) и вариационным (Ибад-Заде, 1966; Кучмент, Мотовилов, 1973; Казанский, 1975; Трофимов, Московкин, 1976 и др.) моделям.

В основу термодинамических моделей положена качественная аналогия между развитием рельефа и процессами протекающими в теплоизолированных системах. Первыми на эту аналогию указали Леопольд и Лангбейн (1967). Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах А.Е. Шайдеггера (1967), В.А. Робсмана (1972), Ю.Г. Симонова (1972), Б.А. Казанского (1975) и др.

Кибернетические модели можно разделить на собственно кибернетические (Девдариани, 1969; Сергин, 1972) и на модели взаимодействия (Анерт, 1967; Симонов, 1976; Московкин, 1977 и др.). Рельефообразующие процессы здесь абстрагируются до уровня кибернетических.

Стохастические модели описывают интенсивные процессы изменения рельефа, имеющие случайный характер. Здесь широко применяется теория случайных функций (Трикарт, 1974).

Кинематические модели исторически были первыми, положившими начало математической теории развития рельефа (Леманн, 1933; Шайдеггер, 1964; Есин, 1966 и др.). В основу этих моделей положены кинематические соображения о характере изменения земной поверхности.

1. Физические модели

Рассмотрим несколько примеров физических моделей. Для составления физической модели абразионного процесса или процесса эрозии необходимо изучить 1) зависимость нормальной скорости разрушения породы от скорости движения воды; 2) распределение придонных волновых скоростей в береговой зоне; 3) перераспределение придонных скоростей по мере эволюции берегового склона и изменения уровня моря.

Натурными исследованиями (Григорьева, 1959; Есин, 1965; Бастраков, 1977 и др.) установлено следующее соотношение, справедливое для достаточно большого числа различных пород:

$$V_n = \mathscr{E}(U^2 - U_н^2), \qquad (1)$$

где V_n – нормальная скорость разрушения породы; U – скорость потока воды в придонном слое; $U_н$ – так называемая критическая неразмывающая скорость потока, т.е. скорость, промежуточная между разрушающей и неразрушающей. Применительно к волновому воздействию на береговой склон эта зависимость имеет вид

$$V_n = \mathscr{b}(U_{max}^2 - U_н^2) \tag{2}$$

где U_{max} – максимальное значение придонной скорости, развивающееся при прохождении волны, причем U_{max} зависит от глубины перед клифом $H_{кл.}$.

Если профиль дна в приурезовой зоне моря аппроксимировать прямой $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \mathscr{b}$ наклон которой не зависит от времени, а $b = b(t)$, то математическую модель отступания берега можно построить в виде системы двух уравнений с учетом изменения уровня моря.

$$\frac{dx_{кл.}}{dt} = k_1 H_{кл.}$$

$$\frac{db}{dt} = k_2 \tag{3}$$

где $\frac{dx_{кл.}}{dt}$ – скорость отступания клифа (в соответствии с теорией ударов мы считаем, что сила удара волны пропорциональна ее высоте); $\frac{db}{dt}$ – скорость углубления приурезовой отмели; k_1 и k_2 – коэффициенты.

В дальнейшем М.Т. Савин (1978) усовершенствовал эту модель и с ее помощью сделал расчет перемещения участка побережья Черного моря в голоцене и плейстоцене. В несколько измененной и уточненной форме эта модель записывается так:

$$\frac{dx_{кл}}{dt} = k_1\left[1{,}5\rho\left(H_{ур} + H_0 - x_{кл.}\mathrm{tg}\,\alpha - \mathscr{b}\right) - P_н\right]\Pi,$$

$$\frac{db}{dt} = \left\{k_2\left[\tau_0 \frac{a_2^2(\eta - 1)}{a_2^2 + \left(\frac{x_{кл.} + H_{ур.} + H_0 - 0{,}5h - b}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^2} + 1\right] - \tau_н\right\}\Pi,$$

$$\Pi = \frac{L_{пр.} - \left[x_{кл} - (0{,}5\lambda - b - H_{ур.}\right]\mathrm{ctg}\,\alpha}{L_{пр.}}, \quad a_2 = \frac{1}{3}(H_з + 0{,}5h)\mathrm{ctg}\,\alpha \tag{4}$$

Здесь ρ – удельный вес воды; $H_{ур}$ – ход уровня моря во времени; H_0 – величина штормового вагона; $P_н$ – критическое неразрушающее значение удара волны; τ_0 – напряжение в приурезовой зоне при условии отсутствия клифа; $\tau_н$ – критическое неразрушающее напряжение у дна; h – высота волны; λ – длина волны; $L_{пр}$ – предельно возможная ширина береговой зоны, соответствующая профилю равновесия; $\eta = 2 \div 3$; $H_з$ – высота заплеска.

Система уравнений (4) получена из (3) с учетом меняющейся геометрии склона. Коэффициенты k_1 и k_2 имеют размерность $\frac{м^3}{кг \cdot с}$ и могут быть рассчитаны для различных участков берега по значениям современных скоростей их разрушения. По расчетам за каждый цикл (трансгрессия-регрессия) берег в районе г. Геленджика отступает примерно на 30 м, что в целом согласуется с данными геофизических исследований. Аналогичные расчеты выполнены и для Азовского моря (Савин, Есин, 1977).

Несколько физических моделей составлено для описания эрозионных процессов. А.К. Ананяном (1962) была предложена математическая модель развития русла реки в условиях понижения базиса эрозии. Для описания движения воды он применял уравнения гидравлики, дно реки полагал сложенным несвязным грунтом. В 1970 г. в ЮО была построена модель плоскостной эрозии при вязком, безинерционном движении воды с переменным расходом (Есин, Скоркин, 1970) и поверхности склона, сложенной связным грунтом, размыв которого происходит по закону (1). Для описания движения воды использовались уравнения Навье-Стокса. В такой постановке задача свелась к решению шести дифференциальных уравнений при изменяющихся во времени граничных условиях.

Плоскостной смыв не может по своей природе выровнить рельеф до горизонтальной плоскости. Предельными формами эрозионного рельефа являются пологие холмы, причем, чем больше значение $u_н$ для данной породы, тем больше их уклоны. В целом форма и закономерности развития склонов под воздействием эрозии определяются характером течения воды: если оно инерционное, то уклоны рельефа с течением времени возрастают и плоскостная эрозия может выродиться в регрессивную. При вязком безинерционном движении воды все участки склона разрушаются более равномерно (Есин, Скоркин, 1970). Дальнейшее понижение предельного эрозионного рельефа может происходить под воздействием других факторов денудации. Относительно существенным может быть разрушение поверхности склона каплями дождя. Частички грунта в среднем перемещаются вниз, их расход пропорционален уклону (Есин, Дмитриев, 1975). Рельеф в пределе выравнивается до горизонтальной поверхности. Качественная модель совместного воздействия на поверхность склона потока воды и капель дождя рассмотрена Н.В. Есиным (1968).

Г.Т. Читишвили (1974) предложил для описания эрозионного процесса систему из пяти уравнений, состоящей из уравнения неразрывности с учетом интенсивности дождя и инфильтрации, уравнения разрушения коренной поверхности, формул Шези и Маннинга и соотношения между донной неразрушающей скоростью (аналог $u_н$) и средней скоростью течения воды. Данная система может решаться приближенно и справедлива на эрозионном участке склона. Сведение этой системы к двум уравнениям (относительно отметки высоты склона y и мощности движущейся воды Н) и решение их в стационарном случае показало на вогнутый неэродируемый устойчивый профиль (Ногуманов и др., 1977).

Достаточно точные физические модели составлены для описания эволюции склона в результате криосолифлюкционных процессов. Движение оттаявшего грунта может быть описано теми же уравнениями, что и движение вязкопластичной среды (Савельев, 1967). Используя уравнение движения грунта, уравнение теплопроводности (для расчета толщины слоя h оттаявшего грунта) и уравнение неразрывности движения в виде (Есин, 1968)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial (y+h)}{\partial t} \qquad (5)$$

(Q - расход грунта; y - отметка высоты склона; h - толщина слоя движущегося грунта), можно получить приближенное решение задачи при произвольном начальном очертании склона (Есин, Скоркин, 1970).

Несколько другая задача (о развитии склона под действием медленного течения материала) решена А.М. Трофимовым и В.М. Московкиным (1977). Используя уравнение неразрывности в виде (5) и уравнение течения грунта по поверхности склона, они свели ее к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial(y+h)}{\partial t}=\frac{\rho g}{3\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

$$-\frac{\partial y}{\partial t}=E\left(\rho g h\frac{\partial y}{\partial_{\iota}}-\tau_{пр}\right) \qquad (6)$$

где $\tau_{пр}$ -предельное напряжение трения, при котором начинается вовлечение в поток материала коренной поверхности; E - коэффициент эродируемости склона; ρ,η - соответственно плотность и вязкость грунта.

В отличие от модели Н.В. Есина и Н.А. Скоркина здесь полагается, что вовлечение подстилающей коренной породы происходит в результате действия силы трения на контакте движущегося слоя с коренной поверхностью склона. Система уравнений (6) решалась при начальных условиях $y(x,0)=y_0(x)$, $h(x,0)=h(x)$ и справедлива только при условии $\tau>\tau_{пр}$ (что соответствует участку склона, где происходит денудация коренной поверхности при движении по ней грунта).

Приближенное решение для условий, близких к начальным, было найдено в виде

$$y=y_0\left[\Phi^{-1}\int\frac{dx}{d_0(x)}+E\rho g t\right]+E\tau_{пр}\cdot t \qquad (7)$$

где $\Phi(x)=\int\frac{dx}{h_0(x)}$, а минус над Φ означает знак обратной функции.

В случае прямолинейного начального профиля $y(x,0)=-ax+b$ и постоянной начальной мощности потока h (x, 0) = H = $const$, как и следовало ожидать, из уравнения (7) была получена система уравнений, описывающая процесс параллельного отступания коренного склона (при $\tau>\tau_{пр}=H\rho g a$)

$$y(x,t)=-ax+b-E(H\rho g a-\tau_{пр})t,$$

$$h(x,t)=H+E(H\rho g a+\tau_{пр})t \qquad (8)$$

Было найдено также точное решение для участка склона, не подверженного денудации, ($\frac{\partial y}{\partial t}=0$).

Внезапные подвижки вязких переувлажненных грунтовых масс по прямолинейному склону описываются моделью (Трофимов и др., 1976)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+g\cdot\sin\alpha,$$

$$u(z,0)=0,$$

$$u(0,t)=0,$$

$$k\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h}=0, \qquad (9)$$

где u - скорость; h - мощность движущегося слоя; k - коэффициент кинетической вязкости; α - угол наклона склона; z - координата, нормальная к склону.

Анализ решения модели (9) показывает, что нестационарное движение быстро переходит в стационарное

$$\bar{u} = \frac{g \cdot \sin\alpha}{2k}(2k - z) \cdot z \qquad (10)$$

Аналогичная модель по уравнениям реологии может быть построена и для внезапных подвижек суспензионных потоков на дне океанов.

2. Вариационные модели

Попытка применить вариационный принцип для определения устойчивого продольного профиля реки была предпринята Б.А. Казанским (1975 а). На основании того, что выработанные профили рек хорошо аппроксимируются модифицированной функцией Бесселя, для нее строится лангранжиан таким образом, чтобы подстановка его в уравнение Эйлера приводила к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, для которого функция Бесселя является решением. Затем дается физическая интерпретация этого лагранжиана.

Как правило, лагранжиан строят, исходя из физических посылок. Этот метод был применен в задачах нахождения устойчивых поперечных профилей русел (Ибад-Заде, 1966; Кучмент, Мотовилов, 1973). Принцип минимума диссипации энергии (Ведиканов, 1958) может быть применен также к случаям развития склонов под действием медленного течения материала и водного потока.

Выражение для работы сил трения для всего склона имеет вид

$$A = \int_0^x \tau_y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx \qquad (11)$$

где $\tau_y = \rho g H \sin\alpha$ - напряжение трения.

Учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{y'_x}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}$, получаем функционал

$$\Phi[y(x)] = \int_0^{x_1} y'_x \rho g H\, dx \qquad (12)$$

Для случая медленного течения материала и постоянного расхода

$$Q = \frac{\rho g H^3}{3\eta} \cdot \sin\alpha \qquad \text{и пологого склона } (\sin\alpha \approx -y'_x)$$

получаем

$$\Phi[y(x)] = \int_0^{x_1} (\rho g)^{\frac{2}{3}} (3Q\eta)^{\frac{1}{3}} (-y'_x)^{\frac{2}{3}}\, dx \qquad (13)$$

Подставляя (13) в уравнение Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Phi = 0 \qquad (14)$$

придем к выражению, соответствующему прямолинейному устойчивому профилю,

$$-\frac{\eta}{3} (\rho g)^{\frac{2}{3}} (3Q\eta)^{\frac{1}{3}} (-y'_x)^{-\frac{1}{3}} = C_1 \qquad (15)$$

В случае ламинарного течения воды с возрастающим расходом

$$\frac{\rho g H^3}{3\eta} \cdot \sin\alpha = ax \tag{16}$$

получается выпуклый параболический профиль

$$-y = \left(\frac{C_1}{A}\right)^{-3} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \ , \tag{17}$$

где $A = (\rho g)^{\frac{2}{3}} \cdot (3\eta a)^{\frac{1}{3}}$; C_1, C_2 - постоянные интегрирования.

В случае $\tau = \tau_{пр}$ получим устойчивый вогнутый профиль. Для связных грунтов вариационный метод неприменим.

Для рельефа, подверженного действию экзогенных факторов, можно считать, что потенциальная энергия текущего грунта стремится к минимуму. В таком случае вариационный принцип дает полное выравнивание рельефа (Трофимов, Московкин, 1976 а).

Аналогичная задача на условный минимум (объем рельефа V принимается постоянным на некоторой ограниченной площади S) дает также полное выравнивание рельефа (стадия пенеплена) с постоянной высотой $z = \frac{V}{S}$.

Потенциальная энергия процесса при этой минимизации записывается в виде $u = k \iint\limits_S \frac{z^2}{2} \cdot dx \cdot dy$ Таким образом, выравнивание рельефа аналогично стремлению к минимуму потенциальной энергии частиц слагающих его пород.

Применение вариационных принципов может быть полезным и при решении некоторых прикладных вопросов, например, в проектировании склонов, подверженных минимальной эрозии (Ногуманов и др., 1977).

3. Диффузионные модели

Диффузионные математические модели эволюции склонов представляют собой уравнения типа уравнения диффузии.

$$\frac{\partial y}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{18}$$

При этом расход грунта считается пропорциональным уклону ($Q = -k\frac{\partial y}{\partial x}$) и используется упрощенный вариант уравнения баланса (5): $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial t}$ (при постоянной величине h). М.А. Великанов получил соотношение (18) (1958) для русловых процессов, А.С. Девдариани (1967) - для эволюции склонов в результате дефлюкции. К такому же выражению (18) пришел Каллинг (Culling, 1960, 1963) для процессов эрозии и крипа, и, кроме того, получил его двумерный аналог, анализируя случайные движения частиц несвязного грунта. В некоторых случаях (например, для процесса солифлюкции) расход грунта действительно пропорционален уклону (Девдариани, 1967).

Уравнение (18) описывает результирующее движение частиц несвязного грунта. Если такого материала на склоне нет, тогда уравнение диффузии неприменимо.

Рассмотрим несколько типов диффузионных моделей.

Квазилинейная модель. Все решения, приведенные выше, относились к случаю, когда коэффициент k в уравнении (18) величина постоянная. Точное решение уравнения (18) при переменном получено в двух случаях (Трофимов, Московкин, 1976 а):

1. $\quad k = ax, \quad y(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l$

Задача соответствует развитию делювиального склона, на котором расход воды линейно возрастает во время дождя. Решение представлено в виде ряда Фурье-Бесселя и соответствует постепенному выполаживанию склона.

2. $\quad k = ax^2 + bx + c, \quad a \leqslant 0, \; x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y(x,0) = f(x)$

Квадратный трехчлен аппроксимирует постепенное нарастание расхода воды до максимума в верхней части склона и спад его за счет инфильтрации. Модель описывает развитие системы двух симметричных сопряженных выпукло-вогнутых склонов. Общее решение получено в виде ряда Фурье-Лежандра и в пределе дает полное выравнивание склонов. Заметим, что все предельные ($\lim\limits_{t \to \infty} y(x,t)$) решения уравнения (18) дают полное выравнивание склонов, кроме случаев, когда $k(x,t)$ затухает со временем.

Карсон и Киркби (Carson, Kirkby, 1972) берут наиболее общий вид уравнения для расхода материала (или твердого стока в случае воздействия на склон водного потока)

$$q = ax^m\left(-\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n \tag{19}$$

и рассматривают "характеристическое решение" уравнения

$$-\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[ax^m\left(-\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n\right], \tag{20}$$

при граничных условиях $y(0,t) = y_0$, $y(l,t) = 0$. Под характеристическим авторы понимают предельное решение $\lim\limits_{t \to \infty} y(x,t)$

Авторы не учитывают решения уравнения, зависящего от X. В результате, по их мнению, получается приближенное решение задачи. Предельное решение как стационарное правильнее находить из уравнения (20), положив $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$. Тогда получим

$$y = y_0\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{n-m}{n}}\right] \tag{21}$$

В работе Карсона и Киркби решение было аналогичным, но с показателем степени $\frac{1-m+n}{n}$

При $m = 0$, $n = 1$ уравнение (20) переходит в линейную модель диффузии (Culling, 1963), а (21) дает решение

$$y = y_0\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \tag{22}$$,

которое совпадает с предельным решением Каллинга, полученного при переходе к пределу при $t \to \infty$ в общем решении задачи.

Анализ зависимости (21) дает следующие результаты.

1. Линейные профили развиваются при $m = 0$ и любом n (по физическим соображениям $n > 0$).

2. Выпуклый профиль создается при $\frac{n-m}{n} > 1$ или $m < 0$, что может соответствовать убыванию расхода воды вниз по склону (мало реальный случай).

3. Вогнутый профиль формируется, если $\frac{n-m}{n} < 1$ или $m > 0$. При этом надо иметь ввиду, что уравнение (21) справедливо только, когда $n > m$

При n = 1 это решение не охватывает реальных случаев (m > 1), так как y (x, t) = 0 не удовлетворяет граничному условию.

Вполне возможно, что в пределе $\lim\limits_{t\to\infty} y(x,t)$ = 0 везде на отрезке $[0, X_0]$, кроме точки x = 0.

Модель подрезаемого у основания склона. Такая модель была предложена Каллингом (Culling, 1963):

$$k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - C\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \tag{23}$$

Решение этого уравнения приводилось им для конечной области $0 < x < l$, движущейся с постоянной скоростьюС, при краевых условиях

$$\begin{aligned} &y(0,t) = 0 \\ &y(l,t) = h \\ &y(x,0) = f(x) \end{aligned} \tag{24}$$

Правильнее учитывать только подрезание основания склона, через нулевое граничное условие на подвижной границе. Тогда придем к следующей краевой задаче (Trofimov, Moskovkin, 1976):

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t} \qquad bt \leqslant x \leqslant +\infty \\ &y(bt,t) = 0 \qquad y(x,0) = f(x) \end{aligned} \tag{25}$$

где b - постоянная скорость отступания точки основания склона. Ее решение имеет вид

$$y = \frac{exp\left(\frac{b^2}{4k}t - \frac{b}{2k}x\right)}{2\sqrt{k\pi t}} \int_0^\infty f(z)\, exp\left(\frac{bz}{2k}\right)\left\{exp\left[-\frac{(z-x+bt)^2}{4kt}\right] - exp\left[-\frac{(z+x-bt)^2}{4kt}\right]\right\} dz \tag{26}$$

Пусть имеется первоначально прямолинейный склон y = (x, 0) $=\alpha x$, тогда (26) дает следующее решение:

$$\begin{aligned} y = \frac{a}{2}\Bigg\{ & 2\frac{kt}{\pi} exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) + x\left[1+\theta\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right] - exp\left[-\frac{b}{k}(x-bt)\right]\left[2\sqrt{\frac{kt}{\pi}}\, exp\frac{(2bt-x)^2}{-4k}\right] \\ & + (2bt-x)\left[1-\theta\left(\frac{x-2bt}{2\sqrt{kt}}\right)\right]\Bigg\} , \end{aligned} \tag{27}$$

где $\theta(S) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^S l^{-z^2} dz$

Асимптотическое решение (при больших x) имеет вид y = (x, t) $\approx ax$
Уклон профиля в основании (в точке x $= bt$) равен

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=bt} = \frac{a}{2}\left\{\frac{b^2}{k}t\left[1+\theta\left(\frac{b}{2}\sqrt{\frac{t}{k}}\right)\right] + \frac{bt}{\sqrt{\pi k t}}\, exp\left(-\frac{b^2 t}{4k}\right)\right\} , \tag{28}$$

т.е. образуется выпуклость у основания склона и

$$\lim_{t\to\infty} \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=bt} = \infty$$

Таким образом, развитие склона идет с нарастанием уклона у его основания и со временем склон теряет устойчивость в своей нижней части.

Частного решения задачи (25) типа $y = a(x - bt)$ (автомодельное решение), соответствующего устойчивой стадии параллельного отступания прямолинейного склона, нет.

Модель с вертикально изменяющимися базисами денудации. Каллинг (Culling, 1963) привел решение следующей задачи:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \quad y(l,t) = \Phi(t); \quad y(x,0) = f(x) \qquad (29)$$

На частный случай стационарного решения при эрозионном врезе с постоянной скоростью в первоначально горизонтальную поверхность y (x, 0) = 0, указывают Карсон и Киркби (Carson, Kirkby, 1972):

$$y = -\beta t + \frac{\beta(x^2 - l^2)}{2k} \qquad (30)$$

Анерт (Ahnert, 1973) при машинном моделировании этого процесса, исходя из своей комплексной модели для случая вязкопластичного течения, тоже приходит к установившемуся выпуклому профилю. Эти авторы полемизируют с В. Пенком (1961), который предполагал, что в случае понижения базиса денудации с постоянной скоростью образуется прямолинейный профиль склона. Но положение Пенка вполне реально, например, при образовании и развитии осыпного склона.

Рассмотрим наиболее общую задачу понижения двух базисов денудации с разными скоростями:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad y(0,t) = -\beta t; \quad y(l,t) = -\gamma t; \quad y(x,0) = 0 \qquad (31)$$

Возьмем случай $\beta > \gamma$ (скорость понижения левого базиса денудации больше, чем правого).

Делая серию замен, решение получим в виде

$$y = \frac{(\beta-\gamma)tx}{l} + \frac{(\beta-\gamma)x(x^2-l^2)}{6kl} + \frac{\beta l x}{2k} - \frac{\beta x^2}{2k} - \beta t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 k}{l^2}t\right)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$a_n = \int_0^l \left[\frac{\beta}{kl}\,\xi(\xi - l) - \frac{(\beta-\gamma)\xi(\xi^2 - l^2)}{3kl^2}\right]\sin\frac{\pi n \xi}{l}\,d\xi \qquad (32)$$

Установившееся решение имеет вид

$$y = \frac{(\beta-\gamma)tx}{l} + \frac{(\beta-\gamma)(x^2-l^2)x}{6kl} + \frac{\beta l x}{2k} - \frac{\beta x^2}{2k} - \beta t \qquad (33)$$

При $\gamma = \beta$

$$y = \frac{\beta x}{2k}(l - x) - \beta t \qquad (34)$$

В этом случае образуется склон выпуклый параболической формы высотой

$$h = \frac{\beta l^2}{8k}$$

В случае $\beta > \gamma$ водораздел перемещается вправо, пока не достигнет точки $x = l$ (при $\beta < \gamma$ водораздел движется влево).

Найдем закон перемещения точки водораздела ($\frac{\partial y}{\partial x}$ = 0):

$$x_{1,2} = \frac{l\beta}{\beta-\gamma} \pm \sqrt{\frac{\gamma\beta l^2}{(\beta-\gamma)^2} + \frac{l^2}{3} - 2kt} \tag{35}$$

Исчезновение локального максимума функции (33) при $x = l$ (на отрезке (0, l) произойдет при

$$t^* = \frac{l^2}{6k}\left(\frac{2\gamma+\beta}{\beta-\gamma}\right), \tag{36}$$

Анализ показывает, что профиль все время остается выпуклым, так как на отрезке $[0, l]$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} = \frac{2x(\beta-\gamma)}{6kl} + \frac{2x(\beta-\gamma)}{3kl} - \frac{\beta}{k} < 0$$

Аналогичное перемещение водораздела вправо получил Анерт (1973) при машинном моделировании в случае сложного смыва

$$R = k \sin\alpha (1 + d^m) \qquad \text{при } m < 1 \tag{37}$$

где d - расстояние от водораздела вниз по склону.

По модели (37) устанавливается слабовогнутый профиль с резким переломом водораздела.

Рассмотрим теперь задачу с понижающимся базисом денудации для полубесконечной области

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad y(0,t) = -\beta t; \quad y = (x,0) = 0; \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{38}$$

Решение (38) имеет вид (Будак и др., 1972)

$$y = -\frac{\beta x}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t \frac{\tau \exp\left[-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau \tag{39}$$

Разбивая этот интеграл на два и определяя их с помощью замены

$$u = \frac{x}{2\sqrt{k(t-\tau)}}, \tag{40}$$

получим

$$y = \frac{\beta x}{2k}\sqrt{\frac{4kt}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) - \left[1 - \theta\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)\right]\left(\beta t + \frac{\beta x^2}{2k}\right) \tag{41}$$

Крутизна в основании склона возрастает во времени

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta\sqrt{\frac{t}{k}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \tag{42}$$

Профиль, соответствующий уравнению (41), выпуклый, стремящийся к нулю при $x \to \infty$

М о д е л ь п о д р е з а е м о г о с к л о н а с о д н о в р е м е н н ы м п о н и ж е н и е м б а з и с а д е н у д а ц и и. Эта модель является обобщением моделей (25) и (38)

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\mathrm{k}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2};\quad y(bt,t)=-\beta t;\quad y(x,0)=0 \tag{43}$$

Наиболее общее решение при произвольном начальном условии и произвольных горизонтальной и вертикальной скоростях перемещения базиса денудации, приведено Будаком с соавторами (Будак и др., 1972). Из него следует, что

$$y=-\frac{exp\left[-\frac{b}{2\mathrm{k}}(x-bt)-\frac{b^2t}{4\mathrm{k}}\right](x-bt)}{2\sqrt{\mathrm{k}\pi}}\int_0^t\frac{\beta t\,exp\left(\frac{b^2\tau}{4\mathrm{k}t}\right)exp\left[\frac{(x-bt)^2}{4\mathrm{k}(\tau-t)}\right]}{(t-\tau)^{3/2}}d\tau \tag{44}$$

Решение (44) указывает на выпуклый профиль развивающегося склона.

Пространственная модель. Уравнение (18) для пространственного случая переходит в двумерное уравнение диффузии. Каллинг (Culling, 1963) выводит его, анализируя случайные движения частичек грунта и записывает в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{45}$$

где u - высота точек на склоне.

Это уравнение может быть получено аналогично одномерному уравнению (18) через уравнение баланса.

Вектор потока расхода материала, по аналогии с плоской задачей, запишем в виде

$$\vec{Q}=-\mathrm{k}\,grad\,u \tag{46}$$

тогда уравнение баланса примет вид

$$div\,\vec{Q}=-\frac{\partial u}{\partial t} \tag{47}$$

Подставляя (46) в (47), придем к пространственному уравнению диффузии в операторной форме

$$div(\mathrm{k}\,grad\,u)=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{48}$$

При k = const оно перейдет в уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$, совпадающее с уравнением (45), где $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ - лапласиан.

Уравнение (45) с учетом эндогенного фактора допускает решение задачи Коши (с начальным условием в бесконечной области). В стационарном случае решение может быть получено при нулевом граничном условии. Если граница является окружностью радиуса r, то стационарное решение получим в виде

$$u=\frac{v}{4\mathrm{k}}\left(R^2-x^2-y^2\right), \tag{49}$$

где v - постоянная скорость тектонического поднятия.

Решение (49) аналогично плоскому решению стационарной задачи (Девдариани, 1967)

$$u=\frac{v}{2\mathrm{k}}\left(l^2-x^2\right)$$

Склон, описываемый уравнением (49) имеет куполообразный вид с максимальной высотой в начале координат. Стационарное решение уравнения (45) с нулевым граничным условием является тривиальным u = 0.

Нетривиальные решения существуют для многосвязных областей и находятся аналоговым моделированием (Ягодина, 1973; Сергеева, Девдариани, 1976). Аналитические решения могут быть получены только для простейших типов многосвязных областей.

Перейдем к рассмотрению нестационарных решений уравнения (45) Каллингом (Culling, 1963) такое решение было дано при произвольном начальном условии и при нулевых граничных условиях первого рода на сторонах прямоугольника. Приведем решение другой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u; \quad u(x,y,0) = \varphi(x,y); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=a} = 0;$$
$$u(0,y,t) = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=b} = 0, \tag{50}$$

которая соответствует эволюции геоморфологической формы (в плане-прямоугольник), ограниченной с двух сторон водоразделом и водоемом, а с других сторон - днищами оврагов (или долин).

Решение задачи (50) методом Фурье получим в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{n,m}\exp\left[-k\pi^2 t\left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2}\right)\right]\sin\frac{\pi}{b}\left(\frac{1}{2}+n\right)x\cdot\cos\frac{\pi}{a}\cdot my,$$
$$C_{n,m} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \varphi(\xi,\eta)\sin\frac{\pi}{b}\left(\frac{1}{2}+n\right)\xi\cdot\cos\frac{\pi}{a}m\eta\, d\xi\, d\eta. \tag{51}$$

В стадии регулярного режима решение примет вид

$$u = C_{0,0}\exp\left(-\frac{k\pi^2 t}{4b^2}\right)\sin\frac{\pi}{2b}x,$$
$$C_{0,0_F} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \varphi(\xi,\eta)\sin\frac{\pi}{2b}\xi\, d\xi\, d\eta. \tag{52}$$

Таким образом, решение со временем перестает зависеть от y и поверхность склона приобретает цилиндрическую форму.

Методы определения коэффициента денудации. Трудности практического приложения рассмотренных моделей обусловлены отсутствием методов оценки коэффициента денудации k. Здесь могут быть использованы следующие возможности:

1. Определять k из физической формулы для расхода материала $Q = \frac{\rho g}{3\eta} h^3 \sin\alpha$ (Souchez, 1964) или взвешенного стока $Q = \rho_м q$, где q - расход воды; $\rho_м$ - мутность.
2. Определять k, с помощью стационарных измерений, используя уравнение теплопроводности (диффузии). Оценка k в первом случае может быть произведена следующим образом (для крипа):

$$Q = k\sin\alpha,$$
$$Q = \bar{w}h, \tag{53}$$

откуда $$k = \frac{\bar{w}h}{\sin\alpha} \tag{54}$$

По данным А.П. Дедкова и В.А. Дуглава (Дедков, Дуглав, 1967), для коного склона северной экспозиции $w = 1{,}73$ мм/год $= 1{,}73 \cdot 10^{-3}$ м/год; $h = 0{,}38$ м; $\alpha = 22^{\circ}$, что дает $k_{с} = 1{,}76 \cdot 10^{-3}$ м^2/год, для склона южной экспозиции $w = 0{,}62 \cdot 10^{-3}$ м/год; $h = 0{,}845$ м; $\alpha = 22^{\circ}$, откуда $k_{ю} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^2/год. Как видим, $k_{с} > k_{ю}$, так как процессы денудации интенсивнее протекают на более затененных и увлажненных склонах северной экспозиции. Большие скорости крипа в гранитах и песчаниках получены Койяном (Kojan, 1967): $w = (10 \div 50)$ мм/год; $h \approx 0{,}2$ м; $\alpha = 19^{\circ}$, что соответствует коэффициенту k на два порядка выше предыдущих k 0,1 м^2/год.

В обзорной работе Янга (Young, 1974) приведены данные 21 измерения скоростей крипа в различных климатических условиях, породах и при разных уклонах склонов, позволяющие заключить, что k находится в пределах $0{,}001 \div 0{,}1$ м^2/год. Предельные значения соответствуют предыдущим расчетам.

Определяя k вторым способом, исходя из разностного аналога уравнения (18), находим

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x}{(\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_1)} \qquad (55),$$

где $\mathrm{tg}\,\alpha_1$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2$ – уклоны в двух избранных близколежащих точках (на расстоянии Δx по горизонтали); Δy находится за время Δt по понижению первой точки склона.

Можно вычислить ряд значений k по профилю склона. Если они мало отличаются одно от другого, то это говорит о развитии склона по линейной модели Каллинга.

4. Кинематические модели

Это были первые модели экзогенных процессов. При их составлении механизм поверхностных процессов не рассматривался и не описывался, а само уравнение получалось при определенных предположениях о характере распределения на склоне вертикальной или нормальной скорости его изменения. Примером может служить модель Лемана (Lehmann, 1933) для развития осыпного склона. Этот процесс выражается в параллельном отступании осыпающегося откоса и надвигании на него формирующейся у его основания осыпи с образованием выпуклого цоколя коренных пород. Наиболее характерен он для песчаников, в которых силы сцепления обусловлены присутствием цементирующего материала и выветривание происходит путем постепенного освобождения (осыпания) индивидуальных обломков с поверхности откоса. Основным действующим фактором здесь является морозное выветривание. Это типично для юго-запада США; примером могут служить клифообразующие песчаники на плато Колорадо (Carson, Kirkby, 1972). Зная уравнение выпуклого цоколя коренных пород (Lehman, 1933; Девдариани, 1967) и скорость отступания откоса, можно определить время полного цикла развития осыпного склона (время с момента образования до полного перекрытия крутого откоса осыпью), возраст осыпи и ее объем (Московкин, Трофимов, 1978). Ниже приведено несколько формул, пригодных для практических расчетов.

Для времени полного цикла имеем

$$T = \frac{H(\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta)}{2\delta k_p}, \qquad (56)$$

где H – высота осыпного склона (первоначального откоса); α – угол наклона осыпи; β – угол наклона откоса; k_p – коэффициент разрыхления (отношение объема рыхлой породы к объему той же массы материала в плотном состоянии; δ – скорость отступания откоса по горизонтали.

Из (56) следует, что чем больше высота осыпного склона и его уклон, а также чем меньше скорость его отступания, угол наклона осыпи и коэффициент разрыхления, тем больше время полного цикла развития осыпного склона.

Формула для возраста осыпи имеет вид

$$T^{*} = \frac{h^2(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)}{2\delta k_p H} \qquad (57),$$

где h – высота точки пересечения осыпи с откосом.

Связь δ с нормальной скоростью денудации V_n, которую обычно находят путем натурных измерений, имеет вид

$$\delta = \frac{V_n}{\sin\beta} \qquad (58).$$

Определение δ является самостоятельной проблемой, пока еще не решенной. Решение ее позволит определять возраст геоморфологических форм, прогнозировать развитие рельефа, реконструировать его состояние в прошлом. В последних двух случаях необходимо знать протяженность эпох стабильного климата, в течение которых скорость денудации была постоянной. Данные денудации следует брать, исходя из аналогичных современных климатических условий. Поэтому необходимы сравнимые измерения средних современных скоростей денудации во всех климатических зонах земного шара.

В работе Янга (Young, 1974) приведено шесть методов нахождения средних скоростей денудации. Наиболее прост и перспективен из них дендрохронологический метод, позволяющий получать средние скорости денудации за срок от нескольких десятков лет до нескольких тысячелетий. У нас в стране данный метод успешно применяется для условий осыпных склонов Крыма (Клюкин, 1977).

Для решения вопроса, связанного с определением скоростей денудации, наряду с традиционными методами следует построить и развить физическую теорию денудации, так как все традиционные методы только фиксируют скорость денудации, но не выясняют ее физической сущности в связи с литологией и климатом. Для построения такой теории следует привлечь аппарат механики разрушений, а на первых этапах целесообразен поиск корреляционных связей между денудацией и метеорологическими характеристиками (например, переход температуры через ноль, циклы увлажнения и усушки, колебания температур), а также проведение физического моделирования с использованием методов теории подобия.

Возвращаясь к кинематическим моделем, следует указать на модели А.Е. Шайдеггера (1964), построенные для нормальной скорости

$$V_n = -\frac{\partial y}{\partial t}\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (59).$$

Рассмотрены случаи $V_n = 1$, $V_n = y$, $V_n = \frac{\partial y}{\partial x}$. Получены приближенные решения для прямолинейного начального профиля склона. Несколько позже А.В. Митин и А.М. Трофимов (1964) нашли точные решения этих уравнений и показали, что первоначально прямолинейный склон во времени остается прямолинейным. Они также предложили брать функцию V_n в виде суперпозиции трех функций: $V_n = a + by + c\frac{\partial y}{\partial x}$ где a, b, c – const Нетрудно показать, что и в этом случае прямолинейный склон во времени сохраняет прямолинейность.

Для описания эволюции склонов под воздействием экзогенных и эндогенных факторов А.Е. Шайдеггер (1964) предложил уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + cy \tag{60}$$

и нашел приближенное решение для случая первоначально прямолинейного склона. Точное решение этого уравнения имеет вид

$$y = ax\exp(ct) + B(t) , \tag{61}$$

где $B(t)$ является решением уравнения

$$\frac{dB}{dt} + B = -\sqrt{1+a^2\exp(2ct)} \cdot a\exp(ct) . \tag{62}$$

Прямолинейность склона и в этом случае сохраняется во времени, но вряд ли можно считать скорость вертикального движения земной коры линейной функцией. Заметим, что второй и третий типы нелинейных моделей Шайдеггера не совсем удачны, а первый (V_n = const) соответствует случаю, когда весь выветриваемый материал сразу сносится (крутые осыпные склоны). Третья модель при вертикальном уступе становится нереальной, так как нормальная скорость отсутпания становится бесконечной. Здесь более оправдано вместо $V_n = \frac{\partial y}{\partial x}$ ввести функцию $V_n = A(y)\sin\alpha$, что приводит к квазилинейной модели (Московкин, Трофимов, 1978)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A(y)\frac{\partial y}{\partial x} \tag{63}$$

где функция $A(y)$ равносильна горизонтальной скорости отступания точек склона. Только при линейном виде функции $A(y)$ первоначально прямолинейный склон будет сохранять прямолинейные очертания (Московкин, Трофимов, 1978).

Говорить о переходе кинематических моделей развития рельефа в физические можно после построения физической теории процесса денудации, т.е. после установления точного вида функции V_n в модели (59).

5. Стохастические модели

Основанием для применения стохастических моделей является то обстоятельство, что основные изменения в рельефе вызывают интенсивные явления, которые носят случайный по времени характер (паводки, штормы редкой силы и др.).

Внешний воздействующий на склон фактор (смыв) можно описать случайной функцией. Пусть количество смытого со всего склона материала во время одной фазы воздействия потока на склон равен $\varphi(t_i)$. Оно случайным образом зависит от климатического фактора (расхода воды) и не случайным – от профиля склона до момента действия паводка

$$y(t_{i+1}) = \Psi\left[y(t_i), f(t_i)\right] \tag{64}$$

Уравнение (64) показывает, что состояние склона в момент времени t_{i+1} зависит от предыдущего состояния склона и интенсивности воздействующего на склон фактора. Можно считать, что основные изменения в профиле склона происходят в конечные промежутки времени Δt_i, приуроченные к дискретным моментам времени t_i . Вне этих промежутков эволюция склона незначительная. В виду выполаживания склона смыв затухает

$$f(t_i) = Q(t_i)\rho(t_i)\Delta t_i \to 0 \qquad \text{при } t_i \to \infty \qquad (65),$$

где Q, ρ - расход и мутность потока воды. Таким образом, случайная функция $f(t_i)$ обладает затухающим трендом. Предыдущее соотношение показывает, что склон адаптируется к внешнему воздействию таким образом, чтобы уменьшился его размыв (отрицательная обратная связь). Зависимость (64) можно представить в детерминированном виде, считая, что изменение профиля склона происходит непрерывно, и из нее получить предельное соотношение (65). Будем характеризовать состояние склона его средним уклоном i , Тогда вполне оправданы следующие утверждения:

1. Чем больше смыв, тем быстрее идет выполаживание склона;
2. Чем больше уклон, тем больше смыв.

Математически это пишется системой уравнений

$$\frac{di}{dt} = -k_1 f, \qquad f = k_2 i \qquad (66)$$

Решая ее, получим

$$i = i_0 \exp(-k_1 k_2 t) \qquad (67).$$

Это состношение хорошо описывает реальный процесс затухающего выполаживания делювиального склона. Оно согласуется с аналогичным характером выполаживания, получаемого из модели Каллинга (18). Подставляя (67) во второе уравнение системы (66) и переходя к пределу при $t \to \infty$, придем к выражению (65). На желательность статистических исследований интенсивности и повторяемости процессов смыва указывал недавно Трикар (Tricart, 1974).

В заключение отметим, что, дополняя диффузионные модели, которые описывают процесс постепенной эволюции рельефа, стохастическими, можно получить математические модели, достаточно точно отражающие реальные процессы.

6. Термодинамические модели

В основу термодинамических моделей положена косвенная аналогия между развитием рельефа и процессами, протекающими в теплоизолированных системах. Леопольд и Лангбейн (Leopold, Langbein, 1963) обратили внимание на существование качественной аналогии между эволюцией склонов и процессами, описываемыми вторым законом термодинамики. В дальнейшем А.Е. Шайдеггер (Scheidegger, 1967,а) распространил эту аналогию и на первый закон термодинамики. В многочисленных работах (Scheidegger, 1967,б; Tomkoria, Scheidegger, 1967 и др.) были рассмотрены такие вопросы, как образование речных меандров, перенос обломочного материала, формирование речной сети и др.

Формально модели строятся таким образом. Термодинамическая система характеризуется температурой Т и количеством тепла Q , а рельеф - высотой Н и массой M . Между этими величинами устанавливается аналогия: $T \leftrightarrow H, dQ \leftrightarrow dM,$ а затем для Н и М как аналогов температуры и количества тепла записываются первый и второй законы термодинамики

$$dV = dM + dw, \qquad dS = \frac{dM}{H}, \qquad (68)$$

где dV – некоторый потенциал (в термодинамике – внутренняя энергия); w – некоторая воображаемая работа; S – аналог энтропии.

Конкретно аналогия устанавливается с термодинамикой идеального газа, соотношения которой (передача тепла, цикл Карно) записываются в терминах, характеризующих эволюцию рельефа.

Выражения (68) согласуются с достаточно общими законами эволюции рельефа. В целом термодинамические модели, как и диффузионные, описывают общую тенденцию рельефа к выполаживанию (математически – это увеличение во времени энтропии S), но целесообразность их применения для решения конкретных задач все еще проблематична.

Вопрос о применимости концепции термодинамической энтропии в географии (геоморфологии) обсуждался и в отечественной литературе (Робсман, 1972; Симонов, 1972), Б.А. Казанский (Казанский, 1975б) дает энергетическую энтропийную меру процессов развития рельефа при помощи статистического определения энтропии. Для этого он рассматривает нормированную гипсографическую функцию $\Pi(y)$, значения которой пропорциональны площади горизонтального сечения рельефа на высоте y и записывает энтропию в виде

$$S = -\int_0^\infty \Pi(y)\ln\Pi(y)\,dy \qquad (69).$$

Так как развитие рельефа направлено в сторону его выравнивания, т.е. к уменьшению дисперсности высот, статистическое уравнение (69) естественно дает уменьшение энтропии по мере выполаживания рельефа, что автор объясняет неизолированностью системы. Запись энтропии в виде (69) позволила Б.А. Казанскому описать развитие рельефа континентов и дна океанов уравнением

$$\frac{d\Pi}{dS} = \frac{d^2E}{dy^2}, \qquad (70),$$

где $E = k\int_y^\infty y\Pi(y)\,dy$ представляет собой потенциальную энергию масс пород, расположенных выше уровня ν . Решения уравнения (70) определяют два начальных энергетических уровня рельефа (0,1 и 6 км ниже современного уровня моря). Приращение энтропии в уравнении (70) играет роль временной координаты, а сама энтропия рассматривается как показатель возраста рельефа.

7. Кибернетические модели

В настоящее время имеется несколько предложений по применению методов кибернетики для описания некоторых процессов изменения рельефа. А.С. Девдариани (1969), используя основные выводы теории конечных вероятностных автоматов, построил модель взаимных переходов четырех форм эрозии: водороины, промоины, овраги и логи. Он показал, что, зная статистические характеристики реальных эрозионных процессов, можно делать прогноз их эволюции. Есть также попытки применения кибернетических методов к описанию природных процессов (Сергин, 1972).

8. Динамические модели (модели взаимодействия)

К моделям взаимодействия можно отнести те, которые построены с помощью теории динамических систем. Качественная теория динамических систем позволяет выяснять вопрос о степени и типе их устойчивости. На перспективность построения моделей географического взаимодействия в целях прогноза эволюции окружающей среды указывает Ю.Г. Симонов (Симонов, 1976).

К другой динамической системе можно прийти, рассматривая развитие крутого подмываемого склона, исходя из гипотез (Московкин, 1977): 1) чем сильнее подмыв ($V_{подм.}$; тем быстрее идет нарастание крутизны склона i; 2) чем больше крутизна, тем больше сносится материала сверху q и тем меньше подмыв; 3) чем больше крутизна, тем быстрее происходит выполаживание; 4) энергия водного потока $E_{подм.}$ идет на переработку $V_{пер.}$ скапливающегося материала m.

$$
\begin{aligned}
&\frac{di}{dt} = C_1 V_{подм.} - C_2 i, \\
&\frac{dm}{dt} = V_{подм.} + q - V_{пер.}, \\
&V_{подм.} d = V\left(1 - \frac{m}{m_0}\right), \\
&q + V_{подм.} d = V = const, \\
&q = ki
\end{aligned}
\qquad (71)
$$

Третье уравнение системы (71) показывает, что при $m = 0$ интенсивность подмыва максимальна и существует $m = m_0$, когда она равна нулю.

Эта система была сведена к динамической системе второго порядка, анализ которой показал, что со временем устанавливается определенное соотношение между интенсивностью подмыва и поступлением сверху материала, а m стремится к постоянной

$$m^* = m_0 \left[\frac{C_1 K + C_2}{C_1 K + (d+1) C_2}\right] \qquad (72)$$

Особая точка в зависимости от параметров системы имеет вид устойчивого узла или устойчивого фокуса. Дальнейший анализ показал, что введение в систему (71) эффекта запаздывания не приводит к появлению неустойчивости решений. Таким образом, при постоянном воздействующем факторе не может возникнуть неустойчивость решений, а значит и неустойчивость самой склоновой системы. В природе подмываемые склоны становятся неустойчивыми только при резком увеличении воздействующего фактора. Прогресса в области развития динамических систем можно достигнуть введением в них фактора управления, тогда открывается возможность оптимального управления геоморфологическими (экзогенными) процессами (Московкин, 1977).

К более простым относятся модели взаимодействия, состоящие из одного обыкновенного дифференциального и нескольких алгебраических уравнений. Такая смешанная система сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. Простейшей моделью такого типа является система (66).

К модели взаимодействия можно отнести комплексную модель Анерта (Ahnert, 1967), учитывающую эрозию, вязко пластичное течение, изменение базиса денудации склона, физическое и химическое выветривание и др. Автор пришел к ней, рассматривая изменение выветрилого материала на конкретном участке склона вследствие приноса его из вышележащих областей, выветривания и выноса. Получено несколько численных решений уравнений с помощью ЭВМ.

Заключение

Как видно, прямой метод исследования тех или иных экзогенных процессов приводит к физическим моделям. Теоретически точность таких моделей может все время повышаться, так как имеется реальная возможность учитывать все новые и новые действующие факторы и обстоятельства. Сложность некоторых из них состоит в том, что получается система дифференциальных уравнений в частных производных, которые нужно решать при изменяющихся во времени граничных условиях. Это, как правило, порождает значительные трудности. Однако, как показал опыт. приближенные решения, полученные с помощью ЦЭВМ, по своей точности могут быть приемлемыми для практических расчетов.

Вариационные, динамические и диффузионные модели по подходу к изучению поверхностных процессов приближаются к физическим, однако нужно всегда помнить о тех допущениях и упрощениях, которые делаются при их составлении. Задача, как правило, сводится к решению одного уравнения. Применительно к диффузионным моделям это значит, что ряд факторов не учитывается. Иначе получилась бы физическая модель.

В отличие от остальных моделей, описывающих эволюцию рельефа, вариационные, основанные на вариационных принципах минимума работы или минимума диссипации энергии, позволяют пока определять только устойчивые очертания склонов.

К консервативным системам, когда нет притока энергии извне, применим вариационный принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона), но он, как известно, позволяет получить полную систему уравнений движения среды. Иначе говоря, если бы существовала геоморфологическая система, к которой можно было применить вариационный принцип Гамильтона, то вариационная модель, основанная на этом принципе, просто бы совпала бы с ее физической моделью.

Кинематические модели представляют собой первые попытки создания математической теории склоновых процессов. После появления физических моделей они начали утрачивать свое значение, но при должном усовершенствовании их можно преобразовать в последние.

Термодинамические, стохастические и кибернетические модели в целом построены достаточно формально, и их можно рассматривать как качественные.

Диффузионные модели хороши в плане описания долговременной общей эволюции рельефа, в отличие от физических, направленных на решение частных, конкретных задач.

Термодинамические модели сходны с диффузионными в том плане, что те и другие показывают на выполаживание рельефа во времени. Сходство кибернетических и динамических моделей в том, что они включаются в так называемый системный подход.

Динамические модели, в отличие от остальных, позволяют изучить взаимодействие между различными частями геоморфологической системы, выявить стационарно-динамические режимы развития и характер их устойчивости и, что самое главное, дают путь к управлению экзогенными процессами.

При изучении геоморфологических процессов, рассмотренные модели иногда могут применяться в некотором сочетании одна с другой. Недавно Гренандер (Grenander, 1975) предположил, что эндогенный фактор действует импульсивно, в дискретные моменты времени, стационарен относительно пространства и описывается распределением Пауссона $V=V_n(x)\,\delta(t-t_n)$, где δ – дельта – функция. Рассматривая наряду со случайным эндогенным фактором детерминированный процесс экзогенного рельефообразования, он пришел к стохастической диффузионной модели развития рельефа. Это пример синтеза стохастической и диффузионной модели.

Наконец, следует указать на необходимость дальнейшего проникновения в физическую сущность экзогенных процессов и развития физических методов их исследования. Трудно представить себе, что удастся перехитрить природу, изучая процессы одни и применяя полученные результаты для описания других, гораздо более сложных. В таком аспекте физическим методам исследования, под которыми следует понимать методы, направленные на наиболее глубокое изучение физической сущности реальных экзогенных процессов, должно быть уделено основное внимание исследователей.

В заключение авторы благодарят А.С. Девдариани за ряд ценных замечений, высказанных при обсуждении статьи.

Литература

Ананян А.К. О моделировании русловых процессов при непрерывном понижении отметки базиса эрозии реки. - Гидротехническое строительство, № 11, 1962.

Бастраков Г.В. Эрозионная прочность горных пород. - Геоморфология, № 2, 1977.

Будак В.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. - Наука, М., 1972.

Великанов М.А. Русловой процесс. - Физматгиз, М., 1958.

Григорьева О.Г. Сопротивляемость берегов, сложенных связными и полускальными породами, волновому воздействию. - Труды Гос.гидролог. ин-та, вып. 69, 1959.

Девдариани А.С. Математический анализ в геоморфологии. - Недра, М., 1967.

Девдариани А.С. Моделирование развития рельефа методами теории конечных автоматов и математической физики. - Зап. Забайкальского фил. ГО СССР, вып. 30, 1969.

Дедков А.П., Дуглав В.А. Медленные движения почвенно-грунтовых масс на задернованных склонах. - Изв. АН СССР, сер. геогр., № 4, 1967.

Есин Н.В. К вопросу о кинематике формирования морских абразионных террас. - Океанология, т. 4, вып. 2, 1964.

Есин Н.В. Прогнозирование кратковременных размывов абразионного подводного склона. - В кн. Экспериментальные и теоретические исследования процессов береговой зоны. Наука, М., 1965.

Есин Н.В. Общие принципы составления динамических уравнений развития рельефа. - Изв. АН СССР, сер. геогр., № 3, 1968.

Есин Н.В., Дмитриев В.Д. Эрозионное воздействие капель дождя и некоторые закономерности эволюции склонов. - Геоморфология, № 4, 1975.

Есин Н.В., Савин М.Т. О динамике приурезовой зоны моря. - Вестник МГУ, сер. геогр., № 3, 1971.

Есин Н.В., Скоркин Н.А. Применение уравнений гидромеханики к некоторым задачам о развитии рельефа. - Вестник МГУ, сер. геогр., № 3, 1970.

Ибад-Заде Ю.А. Применение вариационного метода к расчету речных русел. - Изв. АН Азерб.ССР, серия наук о Земле, № 6, 1966.

Казанский Б.А. К анализу продолных профилей рек с помощью вариационных принципов. - В кн.: Структурно-геоморфологические исследования в Сибири и на Дальнем Востоке. Наука, М., 1975 а.

Казанский Б.А. О применимости концепции энтропии в геоморфологии. - В кн.: Вопросы геоморфологии и четвертичной геологии юга Дальнего Востока СССР, Владивосток, 1975 б.

Клюкин А.А. Применение фитоиндикационного метода для определения современной денудации склонов куэст Крыма. - В кн.: Физическая география и геоморфология, вып. 17, Киев, 1977.

Кучмент Л.С., Мотовилов Л.Г. О форме поперечного сечения речных русел. – Метеорология и гидрология, № 3, 1973.
Московкин В.М. Теоретические основы оптимального управления склоновых систем. – Тезисы докл. и сообщ. конф. "Охрана природы и рациональное использование природных ресурсов Юга Украины", Симферополь, 1977.
Московкин В.М., Трофимов А.М. Некоторые вопросы теории развития осыпных склонов. – В кн.: Физическая география и геоморфология, вып. 20, Киев, 1978.
Митин А.В., Трофимов А.М. Об одном обобщении теорий Беккера и Шайдеггера. – Уч. зап. Казанского ун-та, т. 124, кн. 4, 1964.
Ногуманов М.Г., Московкин В.М., Трофимов А.М. Аналитические подходы в вопросах склоновой эрозии. – Тезисы докл. У делегатского съезда ВОП, Комиссия У, Минск, 1977.
Пенк В. Морфологический анализ. – М., 1961.
Робсман В.А. Проблемы математического моделирования географических систем. – Вестник МГУ, серия геогр., № 6, 1972.
Савельев В.С. Элементы расчета криосолифлюкционных процессов. – В кн.: Рельеф Земли и математика. Мысль, М., 1967.
Савин М.Т. Развитие абразионного берега в условиях относительного изменения уровня. – В кн.: Гидрофизические и гидрохимические исследования Черного и Средиземного морей. М., 1979.
Савин М.Т., Есин Н.В. О влиянии тектонического опускания побережья на закономерности абразионного процесса. – Геоморфология, № 3, 1977.
Сергеева Л.Л., Девдариани А.С. Рельеф Земли как потенциальное поле, описываемое уравнением Лапласа.– В кн.: Количественные методы в географии, М., 1976.
Сергин В.Я. Кибернетическое моделирование физико-географических систем. – Изв. АН СССР, сер. геогр., № 1, 1972.
Симонов Ю.Г. Региональный геоморфологический анализ. Изд-во МГУ, М., 1972.
Симонов Ю.Г. Модели географического взаимодействия для прогнозирования эволюции окружающей среды. – Вестник МГУ, серия геогр., № 4, 1976.
Трофимов А.М., Московкин В.М. Основные пути использования математических методов при анализе развития малых геосистем (склонов). – В кн.: Количественные методы в географии. М., 1976 а.
Трофимов А.М., Московкин В.М. Аналитические аспекты развития выпукло-вогнутых делювиальных склонов. – Деп. ВИНИТИ, № 3940-1976 б.
Трофимов А.М., Переведенцев Ю.П., Московкин В.М. К проблеме смещения рыхлого чехла обломочного материала на склоне. – В кн.: Проблемы отраслевой и комплексной географии, Изд-во КГУ, Казань, 1976.
Читишвили Г.Ш. Расчет скорости эрозии с учетом влияния кривизны склона. – Сб. науч. трудов ВНИИ гидротехники и мелиорации, вып. 3, М., 1974.
Шайдеггер А.Е. Теоретическая геоморфология. – Прогресс, М., 1964.
Ягодина Л.Л. Математические модели рельефа. – Автореф. канд. диссертации, Л., 1973.
Ahnert F. The role of the equilibrim concept in the interpritation of landform of eluviol and deposition - L'Evolution des versants. v. 40, Univ de Liege, 1967.
Ahnert F. COSLOP-2. A comprehensive model program for simulating slope profile development. - Leocom Programs, v. 8, 1973.
Carson M.A., Kirkby M.I. Hillslope form and process.- Cambridge University Press, 1972.
Culling W.E.H. Analytical theory of erosion. I. Geol., v. 68, N 3, 1960.
Culling W.E.H. Soil creep and the development of hillside slopes.

I. Geol., v. 71, N 2, 1963.
L r e n a n d e r U. Dinamic models of geomorphological Patterns. - I. Int. Assoc. Math. Leol., v. 7, N 3, 1975.
K o j a n E. Mechanics and rates of natural soil creep Proceedings fifth Annual Engineering Leology and Soil Engineering Simposium, Pocaleto, Idaho, 1970.
L e h m a n n O. Morpologische Theorie der Vermitterung von Steinschlangwander. Vier. Natur., Ges. Zurich, Bd. 78, H 3-4, 1933.
L e o p o l d L.B., L a n g b e i n W.B. The concept of entropy in land scape evolution. - Geol. Surv. Profess Paper. N 500-A, 1963.
S c h e i d e g g e r A.E. A complete thermodynamic analogy for landscape evolution. - Reprints of Bull. of the I.A.S.H. XII^{e}, Annee N 4, 1967a.
S c h e i d e g g e r A.E. A thermodynamic analogy for meander system. - Watter Resources Research. v. 3, N 4, 1967b.
S o u c h e z R. Viscosite, plasticite et rupture dans l'evolution des versants. Ciel et terre, v. 8, N 11-12, 1967.
T o m k o r i a B., S c h e i d e g g e r A.E. A complete thernodynamic analogy for transport processes. Canad. J. Phys. v. 45, 1967.
T r i c a r t J. Phenomenes demesures et regime dans des bassins montagnards. Rev. geomorpholog. gyn., v. 23, N. 3, 1974.
T r o f i m o v A.M., Moskovkin V.M. On the problem of stable profils of deluvial slopes. Z. Geomorphol., Bd. 25, B-St., 1976.
Y o u n g A. The rate of slope retreat. - Inst. Brit. Geogr. Spec. Publ., N 7, 1974.