ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ И ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА ЯЧЕЙКЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика
очной формы обучения, группы 12001510
Некрасовой Наталии Николаевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., Некрасова И.В.

БЕЛГОРОД 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В данной работе изучается математическая модель, которая была получена в результате усреднения точной модели, обозначенной для удобства M_1, характеризующая распределение поля давления в грунте. А именно, рассмотрен упругий пористый скелет, занимающий ограниченную область – куб. Поры полностью насыщены несжимаемой жидкостью. Модель M_1 представлена уравнениями Стокса для скорости жидкости в порах грунта и уравнениями Ламе для колебаний твердого скелета грунта. На границе «твердый скелет – поровое пространство» выполнены условия непрерывности перемещений и нормальных напряжений.

Задача усреднения можно сказать невыполнима для произвольной области, поэтому для упрощения обычно вводится предположение относительно геометрии области. В данной задаче представлено предположение о периодичности порового пространства.

Математическую модель, основанную на строгом усреднении точных уравнений, описывающих на микроскопическом уровне совместное движение твердого скелета грунта и вязкой жидкости, заполняющей поры в грунте, далее мы будем называть моделью M_2. Полученные усредненные уравнения содержат коэффициент, определяемый решениями корректных периодических начально-краевых задач на ячейке.

Задачи усреднений с разнообразными краевыми условиями исследованы в монографии О.А. Олейник (19), А.С. Шамаева, а также имеется еще целый ряд монографий, посвященных усреднению многомерных сильно неоднородных сред В.А. Марченко, Е.Я. Хруслова (12), Э. Санчес-Паленсии (24), А.Л. Пятницкого, А.С. Шамаева. (22)

В данной работе используется метод двухмасштабной сходимости, который впервые был введен Г. Нгутсенгом (35) в 1989 году. На основе применения данного метода осуществлен вывод усредненных уравнений M_2.

Понятие двухмасштабной сходимости развивает понятие слабой сходимости. При этом двухмасштабный предел последовательности функций зависит от двух групп переменных: медленные и быстрые переменные. В дальнейшем эта идея развивалась в работах А.М. Мейрманова (34), Г. Аллэира, В.В. Жикова (5) и других авторов.

По данной тематике существует ряд большого количества работ, о проблемах усреднения, поскольку данная проблема стала очень актуальной. Каждое новое достижение в данном направлении способствует лучшему пониманию геофизических процессов.

Объектом исследования является модель среды, состоящая из деформируемого упругого тела, содержащего систему каналов – пор, и жидкости, заполняющей поры. Такие среды называются упругими пористыми средами и являются достаточно хорошим приближением реальных прочных, устойчивых грунтов. Твёрдая компонента такой среды называется скелетом грунта, а область занятая жидкостью – поровым пространством.

Целью работы является вывод априорных оценок периодической начально-краевой задачи на ячейке неоднородной среды.

Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд **задач**:

- изучить литературу по проблеме исследования;

- изучить аналитические методы исследования уравнений параболического и гиперболического типа;

- познакомиться со схемой применения метода двухмасштабной сходимости

- получить коэффициент усредненной модели M_2, как функцию решения периодической начально-краевой задачи на ячейке;

- дать определение обобщенного решения начально-краевой задачи для уравнений модели M_1.

Для поставленной задачи определяется понятие обобщенного решения. Полученные априорными оценками решения.

Выпускная квалификационная работа изложена на 56 страницах, а также состоит из введения, заключения, трех глав и списка использованных источников.

Введение включает в себя общий материал о работе, актуальность выбранной темы, объект, цель и задачи.

Первый раздел имеет вспомогательный характер. В нем присутствуют небольшая историческая справка, ряд используемых обозначений, используемых в формулах, изложен ряд теоретических предложений и понятий, используемых в основном тексте при исследовании краевых задач. А также вспомогательные теоремы, такие как теорема Нгуетсенга, уравнения Стокса, Ламэ и некоторые неравенства Фридрихса-Пуанкаре, Корна, Коши-Буняковского.

Во втором разделе приводится постановка исследуемой задачи.

В третьем разделе рассматривается периодическая начально – краевая задача, моделирующая движение вязкой жидкости в пористом скелете грунта. Приводится определение обобщенного решения задачи. Получены априорные оценки решения.

Заключение содержит общие выводы по работе, значимость исследования, достигнутые задачи.

Результат, несомненно, является значимым, поскольку на основе априорных оценок возможно получить утверждение о существовании обобщенного решения задачи.

1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Исторические сведения

В задачах динамики сплошных сред со свойствами быстрого колебания, а также термомеханическими свойствами присутствует основная трудность. Она заключсается в следующем. В такого родах задач присутствует малый параметр, допустим, ε, который и является характеристикой частоты колебаний сплошных сред.

Данные процессы являются очень сложными, поскольку происходят на микроскопическом масштабе, для определения каждого колебания в отдельности. В современном мире, даже с супер мощными ЭВМ данная задача невыполнима, поскольку разностный шаг дольжен быть меньше ε, а это приводит к огромнейшим объемам вычислений. Из этого следует, что для решения данной проблемы необходимо было построить математически корректную усредненную модель, несвязанную с ε.

Эту проблему поиска данной усредненной модели называли проблемой усреднения или гомогенизации. Формальные асимптотические разложения - классический метод теории усреднения для того, чтобы получить усредненные уравнения.

Развитием данного метода занимались: Н.С. Бахваловым и Г.П. Панасенко (1), А. Бенсуссаном, Ж.Л. Лионсом и Г. Папаниколау (28), Р. Барриджем и Дж.Б. Келлером (30). А систематическое применение метода компенсированной компактности, это другой вариант вычислений, который предложили Ф. Мюра (F. Murat) и Л. Тартаром (1978, 1983).

Работая таким методом, Ф. Мюра (F. Murat) и Л. Тартаром (1978, 1983) (4) достигли полных результатов по теории усреднения линейных эллиптических и параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами.

Требование условий на определенную упорядоченность рассматриваемой структуры, это то, что обобщает постановки задач усреднения. Одним из таких условий является предположение о среде, как периодическая или случайная однородная структура. В задачах усреднения в геофизике достаточно частое явление, это использование микроструктуры периодической геометрией. Большой пласт трудов по разработке процедур гомогенизации и результирующих усредненных моделей фильтрации в периодических пористых средах изложены в монографиях Н.С. Бахвалова и Г.П. Панасенко (1984), А. Бенсуссана, Ж.-Л. Лионса и Г. Папаниколау (1978), Э. Санчеса Паленсии (E.Sanchez-Palencia,1984) и статье Р.Барриджа и Дж.Б.Келлера (1981).

Первое строгое математическое доказательство метода гомогенизации принадлежит, Л. Тартару (1984, приложение в монографии Э. Санчеса-Паленсии).

В данной работе используется метод двухмасштабной сходимости, который впервые был введен Г. Нгутсенгом (35) в 1989 году. На основе открытия данного метода, был осуществлен новый способ реализации процедур усреднения. Этот метод обозначили как метод двухмасштабной сходимости Аллера-Нгуетсенга. Такой метод стал достаточно распространен при усреднении периодических структур, потому что двухмасштабная сходимость провоцирует установку предельных режимов последовательностей периодических функций при стремлении длинны периода к нулю, более точно относительно слабой сходимости.

В данной связи необходимо отметить работы Р.П. Джилберта, А. Микелича, Т. Клопо и Ж.Л. Феррэна (R.P. Gilbert, A. Mikeli´c, Th. Clopeau, J.L. Ferrin, 2000, 2001), метод двухмасштабной сходимости в данных трудах использовали при построении двух различных изотермических макроскопических моделей движения линейной сжимаемой вязкой жидкости в упругом пористом грунте. (2)

1.2 Общие сведения

1.2.1 Список обозначений

В данном разделе приводится ряд обозначений, который используется в выпускной квалификационной работе.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ два вектора, то матрица $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ определяется как

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

для произвольного вектора $\boldsymbol{c}$;

Если $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ две матрицы, то $\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}$ есть тензор четвертого ранга такой, что его свертка с произвольной матрицей $\boldsymbol{A}$ дается формулой (19,16)

$$(\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}) : \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} : \boldsymbol{A}).$$

Матрицу, у которой единственный отличный от нуля элемент, равный единице, стоит на пересечении -той строки и j-того столбца обозначим через $\mathbb{I}^{ij}$

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i\right),$$

где (e_1, e_2, e_3)ортонормированный базис.

$\boldsymbol{R}^n$ – евклидово пространства размерности n.

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ – точка $\boldsymbol{R}^n$.

Ω – область из $\boldsymbol{R}^n$,

$\partial\Omega = S$ – граница области Ω,

n– единичный вектор нормали к S, направленной вне Ω.

Пусть $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \boldsymbol{R}^n$. Через $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ обозначим скалярное произведение в $\boldsymbol{R}^n$:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}u_i v_i.$$

Если $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\big(u_1(\boldsymbol{x}),\dots,u_n(\boldsymbol{x})\big)$ – достаточно гладкая вектор-функция, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, тотензор второго ранга $\nabla\boldsymbol{u}$ определяется соотношением (12,30)

$$\nabla\boldsymbol{u}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j},(i,j=\overline{1,n}).$$

В частности

$$\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$
$$|\nabla\boldsymbol{u}|^2=\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{u}.$$

Для скалярных функций $\boldsymbol{u}(x),\boldsymbol{v}(x)$

$$\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}=\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j},$$

1.2.2 Основные теоретические сведения

Разложение векторного пространства $\boldsymbol{L_2(\Omega)}$ на ортогональные подпространства

Пусть $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ – гильбертово пространство вектор-функций

$$u(x)=\big(u_1(x),u_2(x),u_3(x)\big),x\in\Omega.$$

Обозначим через $\boldsymbol{j}(\Omega)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных векторов, а через $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(\Omega)$ его замыкание в норме $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Совокупность элементов $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, ортогональных $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(\Omega)$, образует подпространство, которое обозначим через $\boldsymbol{G}(\Omega)$, так что

$$\boldsymbol{L}_2(\Omega) = \boldsymbol{G}(\Omega) \oplus \overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(\Omega).$$

Теорема 1.1

$\boldsymbol{G}(\Omega)$ состоит из ∇_{φ}, где φ есть однозначная в Ω функция, локально квадратично суммируемая и имеющая первые производные из $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. [34, с.32].

Теорема 1.2 (Ф. Реллих)

Если Ω – ограниченная область, то $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$ вкладывается в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ компактно, т. е. множество $\{u_\alpha\}$ элементов $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$ с равномерно ограниченными нормами $\|u_\alpha\|_{2,\Omega}^{(1)}$ компактно в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Такое же утверждение справедливо и для пространства $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$, если граница Ω не слишком плоха(например, кусочно-гладкая).(9, 64).

Гильбертовы пространства

*Гильбертовым пространством*будем называть полное линейное пространство (полное предгильбертовое пространство) в котором определено скалярное произведение. То есть, в линейном пространстве H определена действительная функция двух аргументов (u, v), для u и v из H, называемая *скалярным произведением*, и такая, что:

$$(u, u) \geq 0, (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0, \tag{1.1}$$

$$(u, v) = (v, u), \ \ (u + v, w) = (u, v) + (u, w), \tag{1.2}$$

$$(\alpha u, v) = \alpha(u, v), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Для заданного таким образом скалярного произведения определяется норма как

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}. \tag{1.4}$$

В самом деле, легко видеть, что $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0, \Leftrightarrow u = 0$, $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$.

Наконец, неравенство треугольника $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Следует из неравенства Коши-Буняковского

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \tag{1.5}$$

Будем говорить, что последовательность $\{u_n\}, u_n \in H$, сходится к элементу $u \in H$:

$$u_n \to u, \text{при } n \to \infty,$$

Если

$$\|u - u_n\| \to 0 \text{ при } n \leftrightarrow \infty. \tag{1.6}$$

Сходимость (1.6) будем называть *сильной сходимостью*.

Последовательность $\{u_n\}$ называется *последовательностью Коши,* если $\|u_m - u_n\| \to 0$ при $m, n \to \infty$.

Полнота пространства H означает, что всякая последовательность Коши является сходящейся.

Элемент $u \in H$ называется *предельной точкой* множества $M \subset H$, если существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in M$, такая, что $u_n \to u,$ при $n \to \infty$.

Замыкание$\overline{M}$ множества M есть множество всех предельных точек множества M.

Множество M*замкнутое,* если $\overline{M} = M$.

Множество M является *плотным* в H, если $\overline{M} = H$.

Гильбертово пространство H называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное, всюду плотное в H множество.

Множество $L(M)$ всех конечных линейных комбинаций

$$\sum_{i=1}^{m} u_{a_i},$$

элементов множества $M = \{u_a\}$ называется *линейной оболочкой* множества M.

Будем говорить, что u и v *ортогональны*, если $(u, v) = 0$.

Множество M называется *ортонормальным*, если $\|u\| = 1\ \ \forall\ u \in M$ и $(u, v) = 0\ \ \forall\ u, v \in M, \quad u \neq v$.

Ортонормальное множество M называется *базисом,* если оно не содержится ни в каком большем ортонормальном множестве.

Лемма 1.1 *Во всяком сепарабельном Гильбертовом пространстве существует счетный базис.*

Пусть $M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ базис. Суммой ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

назовем элемент u такой, что

$$\sum_{n=1}^{m} c_n e_n \to u, \text{при } m \to \infty.$$

Лемма 1.2 *Пусть H сепарабельное Гильбертово пространство. Тогда для всякого базиса $M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и для любого элемента $u \in H$*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \, , \text{где } c_n = (u, e_n) \, . \tag{1.7}$$

Последовательность $\{u_n\}$, называется *слабо сходящейся* к элементу u, $u_n \to u$, если $\forall v \in H (u_n - u, v) \to 0$, при $n \to \infty$.

Наконец, множество K называется *слабо компактное,* если любая последовательность $\{u_n\}$, элементов $u_n \in K$, содержит слабо сходящююся подпоследовательность.

Теорема 1.3 *В сепарабельном Гильбертовом пространстве замкнутый ограниченный шар есть слабо компактное множество.*

Теорема 1.4. *В Гильбертовом пространстве существует хотя бы один базис.*

Теорема 1.5. *В Гильбертовом пространстве всякое замкнутое ограниченное множество является слабо компактным.*

Пространства Соболева действительных функций

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ограниченное множество с границей $S = \partial\Omega$ непрерывной по Липшицу. Тогда для любой функции $u \in \boldsymbol{C}^1(\overline{\Omega})$ и для любой функции $v \in \boldsymbol{C}^1(\overline{\Omega})$ справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx = 0, i = 1, \dots, n. \tag{1.8}$$

Будем говорить, что функция $u(x), x \in \Omega$ $(u(x,t), x \in \Omega, 0 < t < T)$ есть элемент Гильбертова пространства $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ (элемент Гильбертова пространства $\boldsymbol{L}^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \Omega \times (0, \mathrm{T})$, если

$$\|u\|_{2,\Omega} = \sqrt{\int_\Omega u^2(x)dx} < \infty,$$

$$\left(\|u\|_{2,\Omega_T} = \sqrt{\int_\Omega u^2(x,t)dxdt} < \infty\right)$$

Функция $v_i \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ называется обобщенной производной функции $u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ по переменной x_i, если

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx = 0,\ \forall \varphi \in C^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Как обычно, положим

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Пространство Соболева $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ скалярных функций $u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ обладающих обобщенными производными

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n,$$

определим, как предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} (u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) dx. \qquad (1.10)$$

и нормой

$$\|u\|_{(2)}^{(1)} = \sqrt{\int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx}, \qquad (1.11)$$

где

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

и

$$\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad |\nabla u|^2 = \nabla u \cdot \nabla v.$$

Существует другое, эквивалентное определение пространства Соболева $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ как замыкание предгильбертова пространства всех функций $u \in \boldsymbol{C}^1(\Omega)$со скалярным произведением (1.10). То есть, для всякой функции $u \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ существует последовательность функций $\{u_n\}$, $u \in \boldsymbol{C}^1(\Omega)$, такая, что $\|u - u_n\|_{(2)}^{(1)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, пространство Соболева $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ является полным предгильбертовым пространством, или, в силу определения, Гильбертовым пространством.

Лемма 1.3 *Для всех функций* $u \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ *ее след* $u_s(x) = u(x)$, $x \in S = \partial\Omega$*на границе* S*области* Ω *корректно определен и*

$$\sqrt{\int_{S} |u|^2 ds} \leq C\|u\|_{(2)}^{(1)}, \qquad (1.12)$$

где постоянная C *зависит только от геометрии области* Ω *и не зависит от функциии. Более того, если* $\boldsymbol{n}(x)$

внешняя единичная нормаль к границе S в точке $\boldsymbol{x} \in S$, то

$$\int_S |u_s(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}))|^2 ds \to 0, \qquad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Лемма 1.4 *Вложение $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega) \to \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ является вполне непрерывным. То есть, всякая слабо сходящаяся в $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ последовательность сходится сильно в$\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.*

Совершенно аналогично определяется Гильбертово пространство $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$ как замыкание предгильбертового пространства функций $u \in \overset{\circ}{\boldsymbol{C}}{}^{\boldsymbol{1}}(\Omega)$ со скалярным произведением (1.10). При этом для функций $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$ и $v \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$ остается справедливой формула интегрирования по частям (1.8).

Лемма 1.5 ***Неравенство Фридрихса-Пуанкаре***

Для всех $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |u|^2 dx \le C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{1.13}$$

где постоянная C зависит только от геометрии области Ω и не зависит от функциии. Более того, если $\boldsymbol{n}(x)$ внешняя единичная нормаль к границе S в точке $\boldsymbol{x} \in S$, то

$$\int_S |u(\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}))|^2 ds \to 0, \qquad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Пространства Соболева вектор-функций

По аналогии с пространством Соболева действительных функций определим пространство $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)(\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega))$ вектор-функций $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n).$$

Как замыкание пространства $\boldsymbol{C}^1(\Omega)(\overset{\circ}{\boldsymbol{C}}{}^{\boldsymbol{1}}(\Omega))$вектор-функций $\boldsymbol{u}$в норме

$$\|\boldsymbol{u}\|_{(2)}^{(1)} = \sqrt{\int_\Omega (|\boldsymbol{u}|^2 + |\nabla\boldsymbol{u}|^2)dx},$$

где

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i\,, \qquad |\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u},$$

тензор второго ранга $\nabla\boldsymbol{u}$ определен соотношением

$$\nabla\boldsymbol{u} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \qquad i, j = 1, \dots, n$$

и

$$\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \qquad |\nabla\boldsymbol{u}|^2 = \nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}.$$

Лемма 1.6 Н*еравенство Корна*

Для всех $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2 dx \le C \int_\Omega \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) dx, \tag{1.14}$$

где постоянная C зависит только от геометрии области Ω и не зависит от $\boldsymbol{u}$, а симметричный тензор второго ранга $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})$ определяется формулой

$$\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} + (\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}})^*\Big).$$

Для функций $u(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t))$, где $x \in \Omega,\ t \in (0,T)$, определим пространство $L_p\big((0,T);\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\big)$ (пространство$L_p\big((0,T);\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\big)$) при $1 \le p \le \infty$, как Банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega (u^2(\boldsymbol{x},t) + |\nabla u(\boldsymbol{x},t)|^2)dx\right)^{\frac{p}{2}} dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\boldsymbol{u}\| = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega (|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^{\mathbf{2}} + |\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^2)dx\right)^{\frac{p}{2}} dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

для$p < \infty$, и

$$\|u\| = \sup_{0<t<T}\left(\int_\Omega (u^2(\boldsymbol{x},t) + |\nabla u(\boldsymbol{x},t)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sup_{0<t<T}\left(\int_\Omega (|\boldsymbol{u}|^2(\boldsymbol{x},t) + |\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

для $p = \infty$.

Пространства Соболева для периодических структур

В настоящей работе используются свойства пространств Соболева в периодических областях Ω_f^ε и Ω_s^ε.

Напомним определение этих областей. Пусть $\Omega = (0,1) \times \ldots \times (0,1) = (0,1)^n$, есть единичный куб в $\mathbb{R}^n$ и $\Omega_f \subset \Omega$. Тогда для $\varepsilon = \frac{1}{N},\ N = 1,2,\ldots$ область $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega$ есть периодическое повторение в $\mathbb{R}^n$ области $\varepsilon\Omega_f$.

Аналогично определяется область $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega$ как периодическое повторение в $\mathbb{R}^n$ области $\varepsilon\Omega_s$, где $\Omega_s = \Omega \backslash \overline{\Omega}_f$.

Пусть выполнено следующее

Предположение 1.1 *Граница $\gamma = \overline{\Omega}_f \cap \overline{\Omega}_s$ есть непрерывная по Липшицу поверхность и "твердый скелет" Ω_s^ε есть связное множество, такое, что пересечение Ω_s^ε с любой плоскостью $\{x_i = constant, 0 < x_i < 1, i = 1,2,3\}$ есть открытое (в плоской топологии) множество.*

Лемма 1.7 *Пусть выполнено Предположение 1.1, и* $\boldsymbol{w}^\varepsilon \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_s^\varepsilon), \boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0, \boldsymbol{x} \in S_s^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega$.

Тогда существует функция $\boldsymbol{u}^\varepsilon \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ такая, что ее сужение на подобласти Ω_s^ε совпадает с $\boldsymbol{w}^\varepsilon$, то есть

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega_s^\varepsilon, \tag{1.15}$$

и справедливы оценки

$$\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega_s^\varepsilon}, \qquad \|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{2,\Omega} \leq C\|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)\|_{2,\Omega_s^\varepsilon}$$

с постоянной C, зависящей только от геометрии области Ω_f и не зависящей от ε.

Следующая лемма, уточняет неравенство Фридрихса – Пуанкаре для -периодических структур. Мы формулируем ее в общепринятой и в форме, уточняющей это неравенство для -слоя Q^ε границы S области Ω. Эта область

Q^{ε} состоит из всех элементарных ячеек $\varepsilon\Omega$ касающихся границы $\partial\Omega$. Мы рассмотрим специальный класс функций u^{ε}, которые являются продолжениями функций, $\boldsymbol{w}^{\varepsilon} \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_s^{\varepsilon})$ из области Ω_s^{ε} на область Ω и обращающихся на части $S_s^{\varepsilon} = \partial\Omega_s^{\varepsilon} \cap \partial\Omega$ границы $S = \partial\Omega$ (см. Лемму 1.7).

Согласно предположению о структуре области Ω_s, пересечение границы $\partial\Omega_s^{\varepsilon}$ «твердого скелета» Ω_s^{ε} с границей S есть множество с непустой внутренностью и строго положительной меры. Следовательно, на каждой грани границы S функция u^{ε} обращается в ноль на некотором периодическом множестве строго положителной меры, независящей от малого параметра ε.

Лемма 1.8 *Пусть выполнены все предположения о геометрии области Ω_f^{ε}. Тогда для всякой фунции $u^{\varepsilon} \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ такой, что $u^{\varepsilon} = 0$ на части $S_s^{\varepsilon} = \partial\Omega_s^{\varepsilon} \cap S$ границы S и для всякой функции $v^{\varepsilon} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega_f^{\varepsilon})$ выполнены следующие неравенства*

$$\int_{Q^{\varepsilon}} |u^{\varepsilon}|^2 dx \leq C\varepsilon^2 \int_{Q^{\varepsilon}} |\nabla u^{\varepsilon}|^2 dx \tag{1.16}$$

и

$$\int_{\Omega_f^{\varepsilon}} |v^{\varepsilon}|^2 dx \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} |\nabla v^{\varepsilon}|^2 dx \tag{1.17}$$

с постоянной C не зависящей от малого параметра ε.

Лемма 1.9 *Пусть выполнены все предположения о геометрии области Ω_f^{ε}. Тогда для всякой фунции $u^{\varepsilon} \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ такой, что $u^{\varepsilon} = 0$ на части $S_s^{\varepsilon} = \partial\Omega_s^{\varepsilon} \cap S$ границы S выполнено неравенство*

$$\int_{\Omega} |u^{\varepsilon}|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u^{\varepsilon}|^2 dx \tag{1.18}$$

с постоянной C не зависящей от малого параметра ε.

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся неравенством Фридрихса-Пуанкаре в форме (1.16). Действительно, стандартное представление

$$u^2(x_1,\boldsymbol{x}') = u^2(x_1^0,\boldsymbol{x}') + 2\int_{x_1^0}^{x_1} u(y_1,\boldsymbol{x}')\frac{\partial u}{\partial y_1}(y_1,\boldsymbol{x}')\partial y_1,$$

где $\boldsymbol{x}' = (x_2, \dots, x_n)$, и $(x_1^0,\boldsymbol{x}') \in Q^\varepsilon$, и интегрирование по переменной $x_1 \in (0,1)$ дают

$$\int_0^1 u^2(x_1,\boldsymbol{x}')dx_1 \le u^2(x_1^0,\boldsymbol{x}') + 2\left(\int_0^1 u^2(x_1,\boldsymbol{x}')dx_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\boldsymbol{x}')\right|^2 dx_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее мы проинтегрируем полученное неравенство еще раз по переменной x_1 так, что $(x_1^0,\boldsymbol{x}') \in Q^\varepsilon$ и результат проинтегрируем по переменной $x' \in (0,1) \times \dots \times (0,1) = (0,1)^{n-1}$:

$$2\varepsilon\int_\Omega u^2 dx \le \int_{Q^\varepsilon} u^2 dx + 4\varepsilon\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись неравенством (1.15) получим

$$2\varepsilon\int_\Omega u^2 dx \le C\varepsilon^2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 4\varepsilon\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

что очевидным образом эквивалентно (1.18).

Лемма 1.10 *Пусть выполнены предположения о геометрии областей Ω_f^ε и Ω_s^ε и пусть*

$$\int_{\Omega_T}\left(\left|\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\right|^2+\left|\nabla\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\right|^2\right)dxdt\le C_0 \tag{1.19}$$

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega\left(|v^\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})|^2+|\nabla v^\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})|^2\right)dx\le C_0, \tag{1.20}$$

где C_0 не зависит от малого параметраε, и $v^\varepsilon=0$ на части $S_s^\varepsilon=\partial\Omega_s^\varepsilon\cap S$ границы $S=\partial\Omega$.
Тогда существует подпоследовательность из $\{\varepsilon>0\}$ и функция $v\in L^\infty\big(0,T;\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\big)$ такая, что

1) $v(,t)\rightharpoonup v(,t)$ *слабо в* $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ *при* $\varepsilon\to 0$ *для всех* $t\in[0,T]$,
2) $v(,t)\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$ *для всех* $t\in[0,T]$.

В силу слабой компактности пространства $L^p\big((0,T);\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\big)$ (Теорема 1.4) найдется подпоследовательность из $\{\varepsilon>0\}$ и функция v, такая, что $v,\frac{\partial v}{\partial t}\in\boldsymbol{L}^2\big((0,T);\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\big)$ и $v^\varepsilon(,t)$ сходится к $v(,t)$ слабо в $\boldsymbol{L}^2\big((0,T);\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\big)$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть теперь $\varphi(x)$ есть произвольная гладкая функция и

$$J_\varphi^\varepsilon(t)(t)=\int_\Omega\Big(\big(v^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)-v(\boldsymbol{x},t)\big)\cdot\varphi(\boldsymbol{x})+\nabla\big(v^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)-v(\boldsymbol{x},t)\big)\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{x})\Big)dx.$$

По построению

$$\int_0^T J_\varphi^\varepsilon(t)\psi(t)dt\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0 \text{ для всех } \psi\in L^2(0,T).$$

Первое утверждение леммы означает, что $J_{\varphi}^{\varepsilon}(t) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для всех $t \in (0, T)$.

Оценки (1.19) и (1.20) влекут неравенство

$$\int_0^T \left| \frac{dJ_{\varphi}^{\varepsilon}}{dt}(t) \right|^2 dt \leq C_0^2.$$

Используя это последнее неравенство, начальное условие $J_{\varphi}^{\varepsilon}(0) = 0$ и слабую сходимость в $\boldsymbol{L}^2(0, T)$ последовательности $\{J_{\varphi}^{\varepsilon}\}$ к нулю легко показать, что $J_{\varphi}^{\varepsilon}(t) \to 0$ что доказывает первую часть леммы.

Для доказательства второй части леммы заметим, что $v^{\varepsilon}(,t) \to v(,t)$ сильно в $\boldsymbol{L}^2(S)$ при $\varepsilon \to 0$ для всех $t \in [0, T]$.

Это следует из Леммы 1.4, которая утверждает, что всякая слабо сходящаяся в $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ последовательность сходится сильно в $\boldsymbol{L}^2(S)$.

Теперь мы воспользуемся Леммой 1.8 и оценкой (1.16) чтобы вывести оценку

$$\max_{0<t<T} \|v^{\varepsilon}(t)\|_{2,S}^2 \leq \varepsilon C_0. \tag{1.21}$$

Действительно, мы докажем это неравенство для каждой из сторон. Рассмотрим, например, грань

$$S_{1,0} = \{\boldsymbol{x} \in S,\ \ x_1 = 0\}.$$

Имеем,

$$|v^{\varepsilon}(0, \boldsymbol{x}', t)|^2 = |v^{\varepsilon}(x_1, \boldsymbol{x}', t)|^2 + 2\int_0^{x_1} v^{\varepsilon}(y_1, \boldsymbol{x}', t) \frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial y_1}(y_1, \boldsymbol{x}', t) dy_1 \leq$$

$$\leq |v^\varepsilon(x_1,\boldsymbol{x}',t)|^2 + 2\left(\int_0^\varepsilon |v^\varepsilon(y_1,\boldsymbol{x}',t)|^2\,dy_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial y_1}(y_1,\boldsymbol{x}',t)\right|^2 dy_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

или, после интегрирования по грани $S_{1,0}$ и интервалу $x_1 \in (0,\varepsilon)$,

$$\varepsilon\int_{S_{1,0}} |v^\varepsilon|^2\,dx' \leq \int_{Q^\varepsilon}|v^\varepsilon|^2\,dx + 2\varepsilon\left(\int_{Q^\varepsilon}|v^\varepsilon|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla v^\varepsilon|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись далее оценками (1.16) и (1.20) получим желаемую оценку (1.21), которая означает, что $v^\varepsilon(,t) \to 0$ сильно в $\boldsymbol{L}^2(S)$ при $\varepsilon \to 0$ для всех $t \in [0,T]$. Следовательно, $v(\boldsymbol{x},t) = 0, \boldsymbol{x} \in S$.

Двухмасштабная сходимость

Метод двухмасштабной сходимости был предложен Г. Нгуетсенгом (35) и получил широкое распространение в теории усреднения (см., например, обзор (33)).

Определение 1. *Последовательность* $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\} \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega_T)$ *называтся двухмасштабно сходящейся к 1-периодической по переменной* $\boldsymbol{y}$ *функции* $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \in L^2(\Omega_T \times Y)$*, если для всякой 1- периодической по переменной* $\boldsymbol{y}$ *функции* $\sigma = \sigma(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$,

$$\int_{\Omega_T} w^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\sigma(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\,dxdt \to \int_{\Omega_T}\int_Y W(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\sigma(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,dydxdt \quad (1.22)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Существование и свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей устанавливаются в следующей фундаментальной теореме (15).

Теорема 1.6 ***(Теорема Нгуетсенга)***

1. Всякая ограниченная в $\boldsymbol{L}^2(\Omega_T)$ последовательность $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$содержит подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторой 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_T \times Y)$.

2. Пусть последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ равномерно по параметру εограничены в $\boldsymbol{L}^2(\Omega_T)$. Тогда существуют 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ функция $W = W(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и подпоследовательность $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ такая, что $W, \nabla_y W \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_T \times Y)$, и подпоследовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходятся к Wи $\nabla_y W$ соответственно.

3. Пусть последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ равномерно по параметру ε ограничены в $\boldsymbol{L}^2(\Omega_T)$. Тогда существуют функции $w \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_T)$ и $W \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_T \times Y)$ и подпоследовательность из $\{\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ такие, что функция W 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$, $\nabla_x w \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_T)$, $\nabla_y W \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_T \times Y)$и подпоследовательность $\{\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится к функции $(\nabla_x w(\boldsymbol{x},t) + \nabla_y W(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))$.

Следствие 1. 1. *Пусть $\sigma \in \boldsymbol{L}^2(Y)$ и $\sigma^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \sigma\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)$. Если последовательность $\{\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\} \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega_T)$ двухмасштабно сходится к функции $W \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_T \times Y)$, то последовательность двухмасштабно сходится к функции σW.*

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка гиперболического и параболического типа

Рассматриваемая в работе точная модель M_1, содержит уравнения гиперболического типа в твердой части и параболического типа в жидкой части.

Линейным гиперболическим уравнением второго порядка называется дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u + f(x,t). \quad (1.23)$$

Линейным параболическим уравнением второго порядка называется дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \ a(x,t)u \ + \ f(x,t), \quad (1.24)$$

в которых функции $a_{ij}(x,t), a_i(x,t), a(x,t)\ i,j = 1,\dots,n$ и $f(x,t)$ считаются заданными, причем матрица $\{a_{ij}(x,t)\}$ симметрична и строго положительно определена:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\,\xi_j \geq a_0|\xi|^2 > 0,\ a_0 = const, |\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2. \quad (1.25)$$

Условие (1.25) называют **условием строгой гиперболичности** для уравнения (1.23). и **условием строгой параболичности** для уравнения (1.24)

Частным случаем уравнения (1.23) является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = c^2 \Delta u. \quad (1.26)$$

Положительная постоянная c называется **скоростью звука**.

Частным случаем уравнения (1.24) является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \ \kappa \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \equiv \kappa \Delta u. \quad (1.27)$$

Положительная постоянная κ называется **коэффициентом температуропроводности**.

Для нахождения решения уравнений (1.23) и (1.24) во всем пространстве $\mathbb{R}^n$характерна задача Коши, когда дополнительно к уравнениям (1.23) и (1.24) в пространстве $\mathbb{R}^n$при $t > 0$ задаются начальные данные при $t = 0$:

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x). \qquad (1.28)$$

Задачи (1.23), (1.28) и (1.24), (1.28) называются **задача Коши**.

Если решение уравнения (1.23) и (1.24) ищется в некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то дополнительно к начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (1.29)$$

необходимо задать краевые условия на границе Γ области Ω. В частности, краевое условие

$$u(x,t) = u^0(x,t), \qquad x \in \Gamma, t > 0, \qquad (1.30)$$

называется **первым краевым условием**, или **условием Дирихле**. Соответственно, задача (1.23), (1.29), (1.30) и задача (1.24), (1.29), (1.30) называется **первой начально-краевой задачей**.

Если вместо условия Дирихле (1.30) рассмотреть на границе Γ краевое условие

$$\nabla u(x,t) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu} = v^0(x,t), \qquad x \in \Gamma, \qquad t > 0, \qquad (1.31)$$

где

$$\nabla u(x,t) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t),$$

$\boldsymbol{\nu} = (\nu_i, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к границе Γ, которое называется **вторым краевым условием** или **условием Неймана**, то соответствующая задача (1.23), (1.29), (1.31) и задача (1.24), (1.29), (1.31)называется **второй начально-краевой задачей**.

Если на границе Γ для определения решения уравнения (1.23) и уравнения (1.24) задается третье краевое условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + b(x,t)u = v^1(x,t), \qquad x \in \Gamma, t > 0, \tag{1.32}$$

то задача (1.23), (1.29), (1.32) и задача (1.24), (1.29), (1.32) называется **третьей начально-краевой задачей**.

Часто бывает удобно записывать уравнение (1.23) в **дивергентной форме**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u + f(x,t). \tag{1.33}$$

В схеме метода Галеркина дифференциальное уравнение заменяется на эквивалентное ему интегральное тождество.

Решение первой начально – краевой задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом Галеркина

На отрезке $0 < x < 1$ при $t > 0$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{f}(x,t), \qquad u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \tilde{v}_0(x),$$
$$u(0,t) = u^0(t), \qquad u(1,t) = u^1(t), \tag{1.34}$$

а также для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{f}(x,t), \qquad u(x,0) = \tilde{u}_0(x),$$
$$u(0,t) = u^0(t), \qquad u(1,t) = u^1(t). \tag{1.35}$$

Представляя решение $u(x,t)$ этой задачи в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + u^0(t) + x\big(u^1(t) - u^0(t)\big),$$

сведем задачу (1.34) и задачу (1.35) к аналогичной задаче, но уже с однородными (нулевыми) условиями на границе области (в точках $x = 0$ и $x = 1$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.36}$$

$$\partial v\, \partial t = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.37}$$

$$v(0,t) = 0, \qquad v(1,t) = 0,$$
$$v(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_0(x). \tag{1.38}$$

Метод Галеркина заключается в преобразовании дифференциального уравнения в (1.36) и (1.37) в интегральное тождество и в специальном выборе приближенных решений.

А именно, вместо волнового уравнения мы рассмотрим интегральное тождество

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \varphi(x) + c^2 \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) dx = \int_0^1 f(x,t) \cdot \varphi(x)\, dx, \tag{1.39}$$

а вместо уравнения теплопроводности

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \varphi(x) + \kappa \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) dx = \int_0^1 f(x,t) \cdot \varphi(x)\, dx, \qquad (1.40)$$

которое получается после умножения уравнений на произвольную функцию $\varphi(x)$, равную нулю при $x = 0$ и $x = 1$, и однократного интегрирования по частям в слагаемом, содержащем производные по пространственной переменной (перебросили дифференцирование с функции $v(x,t)$ на пробную функцию $\varphi(x)$).

Для гладких функций $v(x,t)$ тождества (1.39) и (1.40) очевидным образом эквивалентны волновому уравнению и уравнению теплопроводности соответственно. Для этого достаточно провести в (1.39) и (1.40) обратную операцию интегрирования по частям (перебросить дифференцирование с пробной функции $\varphi(x)$ на функцию $v(x,t)$) и воспользоваться тем, что

$$\int_0^1 F(x) \cdot \varphi(x)\, dx = 0 \;\forall \varphi \;\Rightarrow\; F(x) \equiv 0.$$

Далее рассмотрим подпространство $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(0,1)$ пространства $\boldsymbol{W}_2^1(0,1)$, состоящее из всех функций, равных нулю при $x = 0$ и $x = 1$, и выберем в качестве базиса в этом подпространстве функции $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x, \quad k = 1,2,\ldots$.

Выбор решения интегрального тождеств (1.39) и (1.40) из пространства $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(0,1)$ автоматически удовлетворяет краевые условия в (1.36) и (1.37). Далее ослабим требования на пробные функции – будем считать их элементами пространства $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(0,1)$.

В методе Галеркина ищутся приближенные решения $v^N(x,t)$ интегрального тождества (1.39) и (1.40) в виде

$$v^N(x,t) \ = \sum_{k=1}^{N} c_k(t)\varphi_k(x), \tag{1.41}$$

удовлетворяющих интегральному тождеству (1.39) не для всех функций $\varphi \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1\,(0,1)$, а только для первых N функций базиса

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 v^N}{\partial t^2} \cdot \varphi_k(x) + \ c^2 \frac{\partial v^N}{\partial x} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx}\right) dx =$$
$$= \int_0^1 f(x,t) \cdot \varphi_k(x)\, dx, \qquad k = 1, \dots, N, \tag{1.42}$$

также удовлетворяющих интегральному тождеству (1.40) не для всех функций $\varphi \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1\,(0,1)$, а только для первых N функций базиса

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial v^N}{\partial t^2} \cdot \varphi_k(x) + \ \kappa \frac{\partial v^N}{\partial x} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx}\right) dx =$$
$$= \int_0^1 f(x,t) \cdot \varphi_k(x)\, dx, \qquad k = 1, \dots, N, \tag{1.43}$$

и начальным условиям (1.38) приближенно:

$$v^N(x,0) = \sum_{k=1}^{N} u_0^k \varphi_k(x)\,, \qquad \frac{\partial v^N}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{N} v_0^k \varphi_k(x). \tag{1.44}$$

В (1.44)

$$u_0^k \ = \int_0^1 u_0(x)\varphi_k(x)\, dx, \qquad v_0^k \ = \int_0^1 v_0(x)\varphi_k(x)\, dx. \tag{1.45}$$

Пользуясь ортогональностью базиса задачу (1.42), (1.44) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 c_k}{\partial t^2} = -\sum_{m=1}^{N}\left(\int_0^1 c^2 \frac{d\varphi_k}{dx} \cdot \frac{d\varphi_m}{dx} dx\right) c_m \ +$$

$$+\int_0^1 f(x,t)\cdot\varphi_k(x)\,dx, \qquad k \ = \ 1,\dots,N, \tag{1.46}$$

$$c_k(0) = \ u_0^k, \qquad \frac{dc_k}{dt}(0) \ = \ v_0^k. \tag{1.47}$$

А задачу (1.43), (1.44) в виде

$$\frac{dc_k}{dt^2} = -\sum_{m=1}^{N}\left(\int_0^1 c^2 \frac{d\varphi_k}{dx} \cdot \frac{d\varphi_m}{dx} dx\right) c_m \ +$$

$$+\int_0^1 f(x,t)\cdot\varphi_k(x)\,dx, \qquad k \ = \ 1,\dots,N, \tag{1.48}$$

$$c_k(0) = \ u_0^k. \tag{1.49}$$

В силу теоремы Коши, задача Коши (1.47) и (1.49) для линейной системы (1.46) и (1.48) соответственно, имеет единственное решение при всех $t > 0$. Таким образом, при всех $t > 0$ определено приближенное решение $v^N(x,t)$ задачи (1.38), (1.39) и задачи (1.34), (1.40)

Наличие априорной оценки для волнового уравнения

$$\max_{0<t<T}\int_0^1\left(\left|\frac{\partial v^N}{\partial t}(x,t)\right|^2 \ + \ c^2\left|\frac{\partial v^N}{\partial x}(x,t)\right|^2\right)dx \le$$

$$\le e^T\left(\int_0^1\left|\frac{du_0}{dx}(x)\right|^2 dx \ + \ \int_0^1 |v_0(x)|^2\,dx \ + \ \int_0^T\int_0^1 f^2(x,t)\,dxdt\right), \tag{1.50}$$

и для уравнения теплопроводности

$$\max_{0<t<T}\int_0^1\left|\frac{\partial v^N}{\partial t}(x,t)\right|^2dx+\int_0^T\int_0^1\kappa\left|\frac{\partial v^N}{\partial x}(x,t)\right|^2dxdt\le$$

$$\le e^T\int_0^1|u_0(x)|^2\,dx+e^T\int_0^T\int_0^1 f^2(x,t)\,dxdt, \qquad (1.51)$$

которая следует из тождеств (1.42) и (1.43), если к-тое тождество умножить на $\frac{dc_k}{dt}$ и все тождества сложить вместе, и Теорема 1.5 позволяют выделить подпоследовательность$\{v^{N_k}\}$, которая сходится слабо в $L_2(0,1)$ вместе со своими первыми производными при все t, $0<t<T$ к функции $v(x,t)$. Совершая далее слабый предельный переход в тождестве (1.42) и (1.43) убеждаемся, что $v(x,t)$ является искомым решением.

Неравенство Юнга

$ab\le\frac{1}{\lambda}\varepsilon^\lambda a^\lambda+\frac{1}{\lambda'}\varepsilon^{-\lambda'}b^{\lambda'}$, где a,b,ε произвольные положительные числа, а λ и λ' больше единицы и связаны равенством:$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}=1$.

Неравенство Гронуолла

Лемма 1.11. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0,T]$ неравенству

$$\frac{dy(t)}{dt}\le C_1(t)y(t)+C_2(t), \qquad (1.52)$$

где$C_i(t)$ – суммируемые на$[0,T]$неотрицательные функции. Тогда

$$y(t)\le\exp\left\{\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right\}\times[y(0)+\int_0^t C_2(\xi)exp\left(-\int_0^\xi C_1(\tau)\,d\tau\right)d\xi]\le$$

$$\leq \exp\left\{\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right\}\left[y(0)+\int_0^t C_2(\tau)\,d\tau\right]. \qquad (1.53)$$

Действительно, если (1.52) записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left[yexp\left(-\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right)\right] \leq C_2 \exp\left(-\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right)$$

и проинтегрироватьот 0 до t, то из полученного неравенстваочевидным образом следует (1.53). (10, 112).

Уравнения движения вязкой жидкости

Для того, чтобы получить уравнения движения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса, будем исходить из общей системы уравнений Навье — Стокса

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\varrho} grad\; p + \nu\Delta v \qquad (1.54)$$

$$div\; v = 0.$$

Для внешней задачи. Предположим, что характерный размер обтекаемого тела a, а скорость на бесконечности $v|_\infty = V$. Вводятся независимые безразмерные переменные, а также безразмерные искомые функции

$$\xi = \frac{x}{a}, \qquad \eta = \frac{y}{a},$$

$$\zeta = \frac{z}{a}, \tau = \frac{\nu}{a^2}t, \qquad u = \frac{a}{\nu}v, \qquad \Pi = \left(\frac{a}{\nu}\right)^2\frac{p}{\rho}. \qquad (1.55)$$

После перехода к новым независимым переменным и новым искомым функциям получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+u_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+u_y\frac{\partial u}{\partial \eta}+u_z\frac{\partial u}{\partial \zeta}=-grad\,\Pi+\Delta u,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \xi}+\frac{\partial u_y}{\partial \eta}+\frac{\partial u_z}{\partial \zeta}=0. \qquad (1.56)$$

При этом искомая функция u удовлетворяет на бесконечности условию $u_\infty = Re$. Модуль искомой величины $u=|u|=\frac{av}{\nu}$по существу является местным (вычисленным в данном месте) числом Рейнольдса. Предположение о малости чисел Рейнольдса означает, что

$$|u|=\frac{av}{\nu}\ll 1,$$

или

$$|u_x|\ll 1,\quad |u_x|\ll 1,\quad |u_x|\ll 1. \qquad (1.57)$$

Поскольку безразмерная скорость и ее компоненты u_x, u_y, u_z меняются на величины порядка их самих на расстояниях порядка единицы (характерного размера), то в этих течениях наряду с (1.57) имеем

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial \xi_l}\right|\ll 1. \qquad (1.58)$$

Из (1.57) и (1.58) следует, что произведения вида

$$u_i\frac{\partial u_k}{\partial \xi_l}$$

являются величинами второго порядка малости. Пренебрегая в уравнении (1.56) величинами второго порядка малости по сравнению с величинами первого порядка малости, получим уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -grad\,\Pi + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta} + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = 0. \qquad (1.59)$$

Уравнения (1.59) есть уравнения движения вязкой жидкости при малых числах Re, записанные в безразмерном виде. Если теперь в уравнениях (1.59) снова вернуться к размерным величинам, то будем иметь систему

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} grad\,p + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (1.60)$$

Уравнения (1.60) — уравнения Стокса для движения вязкой жидкости при малых числах Re. Также их называют уравнениями Стокса для медленных движений. В случае установившихся движений они имеют вид

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = grad\,p,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (1.61)$$

Системы (1.60) и (1.61) отличаются от исходных уравнений (1.54), в частности, тем, что они линейны, поэтому строить их решение гораздо проще. Благодаря этому они решены во многих частных случаях. (35)

Вязкостью жидкости, называется способность сопротивляться деформации.

Дивергенция – это дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное (то есть операция дифференцирования, в результате применения которой к векторному полю получается скалярное поле), который определяет (для каждой точки), «насколько расходится входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле» (точнее — насколько расходятся входящий и исходящий поток).

$$div\,\boldsymbol{W} = 0.$$

Однородные начальные условия – дополнение к основному дифференциальному уравнению, дающее его поведение в начальный момент времени или на границерассматриваемой области соответственно.

Соленоидальное поле – если дивергенция этого поля равна нулю.

Постоянные Ламэ – величины, характеризующие упругие свойства изотропного материала. Для однородного изотропного тела компоненты напряжения$\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}, \dots$. в некоторой точке его выражаются через компоненты деформации $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \varepsilon_{xy}, \dots$. в той же точке шестью соотношениями вида

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \qquad \tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy},$$

где λ и μ – называют постоянные Ламэ (по имени Г. Ламе).

Они зависят как от материала, так и от его темп-ры и удобны для общих исследований в теории упругости, когда напряжения выражены через деформации. Постоянные Ламэ связаны с модулями упругости формулами

$$\mu = G, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = K - \frac{2G}{3},$$

E – модуль продольной упругости,

K – модуль объёмного сжатия,

G – модуль сдвига,

ν –коэффициент Пуассона.

По полученным экспериентным путём значениям модулей упругости с помощью приведённых зависимостей вычисляются величины постоянных Ламэ. (25)

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настояйщей главе рассматривается задача о совместном движении деформируемого упругого тела, перфорированного системой каналов (пор), и жидкости, заполняющей поры. Такие среды называются упругими пористыми средами и являются достаточно хорошим приближением реальных консолидированных грунтов (см. рис. 2.1.). Твёрдая компонента такой среды называется селетом грунта, а область занятая жидкостью – поровым пространством.

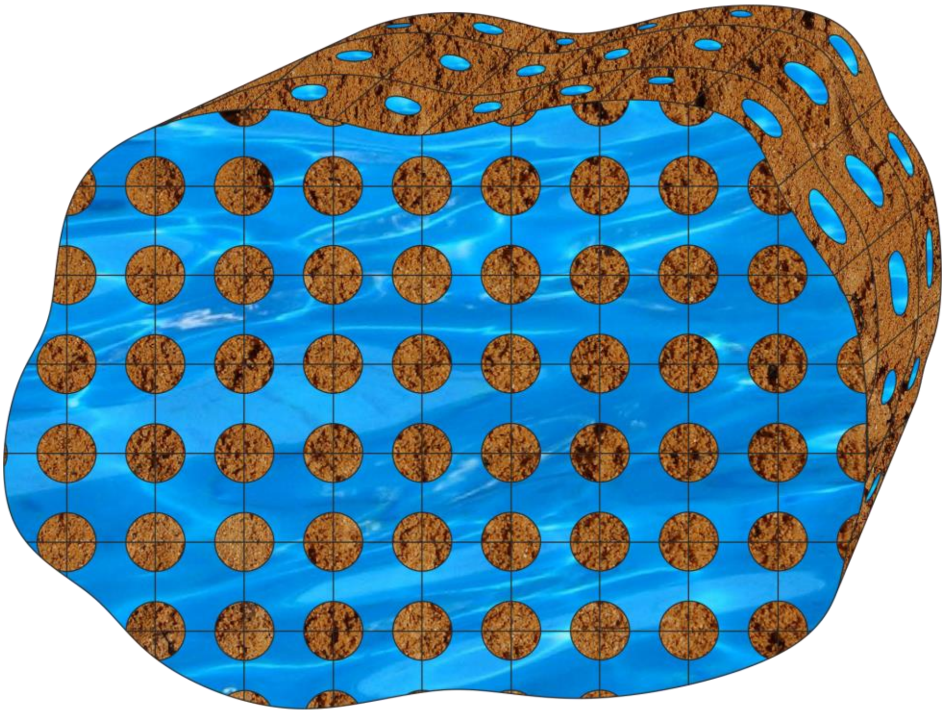

Рис. 2.1. Упругая пористая среда

В качестве базовой математической модели на микроскопическом уровне мы рассматриваем модель, описывающую кратковременные изотермические процессы в несжимаемой среде (24) (30).

Для простоты изложения, считаем, что область Ω представляет собой единичный куб (см. рис. 2.2)

$$\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^3.$$

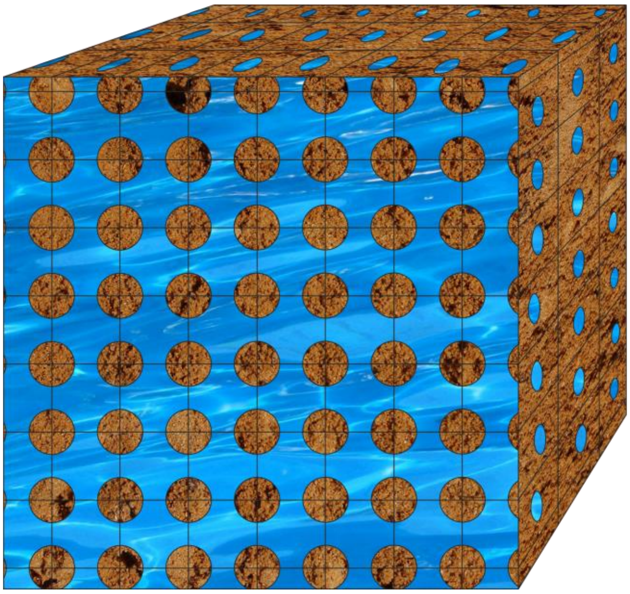

Рис. 2.2. Область Ω, представленная единичным кубом

Часть границы области $\partial\Omega = S$, лежащую в плоскости $\{x_3 = 1\}$, обозначим через S^1. Остальная часть границы $S^2 = S \backslash S^1$.

Безразмерный вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ в безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}, t' = \tau t, \boldsymbol{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2}\boldsymbol{w}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в области Ω при $t > 0$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^\varepsilon = 0, \tag{2.1}$$

$$\bar{\varrho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \bar{\varrho}\boldsymbol{F}, \tag{2.2}$$

$$\mathbb{P} = \bar{\chi} a_\mu \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) + (1 - \bar{\chi}) a_\lambda \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}^\varepsilon) - p\mathbb{I}, \tag{2.3}$$

где

$$\bar{\varrho} = \bar{\chi}\varrho_f + (1-\bar{\chi})\varrho_s,$$

На границе Γ^ε «твердый скелет – поровое пространство» выполнены условия непрерывности перемещений

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega_f}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega_s}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t), \tag{2.4}$$

и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega_f}} \mathbb{P}^0(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega_s}} \mathbb{P}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)$ – единичный вектор нормали к соответствующей границе в точке $\boldsymbol{x}^0$.

На части S^1 границы S задано нормальное напряжение

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{e}_3 = -p_0(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_3, \tag{2.6}$$

где $p_0(\boldsymbol{x},t)$ – финитная в области Ω функция из пространства $W_2^{1,1}(\Omega_T)$, $\boldsymbol{e}_3$ – координатный вектор.

На оставшейся части внешней границы S^2 выполняется условие

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) = 0 \text{ при } t > 0. \tag{2.7}$$

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},0) = 0, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0, x\in\Omega. \tag{2.8}$$

$\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$– характеристическая функция порового пространства и $\boldsymbol{F}$– вектор удельных массовых сил считаются известными функциями, p_f и p_s – средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета грунта, отнесенные к средней плотности воды ρ_0 $соо$тветственно. $\mathbb{I}$ – единичная матрица. $\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ – симметрическая часть градиента вектора u:

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T).$$

Задачу (2.1)-(2.8) будем называть моделью M_1. Безразмерные параметры модели a_μ и a_λ определены формулами

$$a_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}, a_\lambda = \frac{2\lambda}{L^2\rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости,

λ – упругая постоянная Ламэ,

τ – характерное время физического процесса,

L – характерный размер рассматриваемой физической области,

g – ускорение силы тяжести.

Уравнение (2.2) будем понимать в смысле теории распределений. Оно содержит уравнения Стокса в жидкой части, уравнения Ламэ в твердом скелете и условия непрерывности перемещений и нормальных напряжений на границе «твердый скелет – поровое пространство» (17).

Математическая модель содержит малый параметр ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру области

$$L: \varepsilon = \frac{l}{L}.$$

В связи с этим нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю вполне рационально. Подобные приближения как следует адаптируют исходную задачу, при этом сохранив все ее основные свойства. В любом случае задача все еще вполне с трудностями и не обойтись без дополнительных упрощающих допущений, даже при наличии малого параметра ε.

Будем полагать, что данное поровое пространство с геометрической точки зрения обладает периодической структурой. То есть справедливо следующее предположение

Предположение.

1) Пусть область Y_s есть «твердая часть» единичного куба $Y = (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$, и его «жидкая» часть Y_f есть открытое дополнение Y_sв Y, граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ – липшицева поверхность.

2) Область Ω_f является периодическим повторением в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$,область Ω_s – периодическое повторение в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$.

3) Граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \Omega_f^\varepsilon$ представляет собой периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

4) $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$. Поровое пространство Ω_f^ε и твердый скелет Ω_s^ε являются связными множествами.

Тогда функция $\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$ принимает вид

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right),$$

где $\chi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)$ – кусочно-постоянная периодическая функция, имеющая вид

$$\chi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)=\begin{cases}0, \boldsymbol{x}\in\Omega_s^\varepsilon\\1, \boldsymbol{x}\in\Omega_f^\varepsilon.\end{cases}$$

Пусть безразмерные параметры модели a_μ и a_λ зависят от малого параметра ε и существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a_\mu}{\varepsilon^2}=\mu_1,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a_\lambda}{\varepsilon^2}=\lambda_1.$$

Определение 2.1. *Пару функций* $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ *будем называть обобщенным решением задачи (2.1) – (2.8), если*

1) они удовлетворяют условиям регулярности:

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon\in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Omega_T), \frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\in L_2(\Omega_T),$$

$$p^\varepsilon\in L_2(\Omega_T)$$

с областью $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$

2) почти всюду в области Q_T *выполнено уравнение неразрывности (2.1) и начальное условие (2.8) для функций* $\mathbf{w}^\varepsilon$*;*

3) функции $\mathbf{w}^\varepsilon$ *и* p^ε *удовлетворяют интегральному тождеству*

$$\int_{\Omega_T}\left(-\varrho^\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\mathbb{P}:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\right)d\boldsymbol{x}dt=-\int_{\Omega_T}\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}p_0)d\boldsymbol{x}dt \tag{2.9}$$

для всех пробных функций, таких что

$$\boldsymbol{\varphi}\in W_2^{1,0}(\Omega_T), \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\in L_2(\Omega_T),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)=0,\qquad (\boldsymbol{x},t)\in S_T^2,$$

и

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in Q_T.$$

Очевидно, что давление $\boldsymbol{p}^{\varepsilon}$определяется точностью до аддитивной постоянной. Фиксируем ее условием

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{p}^{\varepsilon} dx = 0. \tag{2.10}$$

В тождестве (2.9)

$$\varrho^{\varepsilon} = \chi^{\varepsilon} \varrho_f + (1 - \bar{\chi}) \varrho_{s,}.$$

Интегральное тождество (2.9) содержит уравнение Стокса в области Ω_fпри $t > 0$, уравнения Ламэ в области Ω_s при $t > 0$, условие непрерывности нормальных напряжений на общей границе «поровое пространство – твердый скелет», и второе начальное условие в (2.8).

Тождество (2.9) может быть записано в дифференциальной форме

$$\bar{\varrho}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}, \tag{2.11}$$

Тогда будем говорить, что функции $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}\}$ удовлетворяют уравнению (2.9) и граничному условию (2.6) в смысле теории распределений.

Будем считать, что функция p_0 подчинена условию

$$\int_{\Omega_T} \left(|\nabla p_0(x,t)|^2 + \left| \nabla \frac{\partial p_0}{\partial t}(x,t) \right|^2 \right) dxdt = \mathfrak{P}^2 < \infty,$$

где $\mathfrak{P}$ – константа, зависящая только от геометрии области Ω.

Теорема 2.1. *Пусть пара функций* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}, \mathbf{p}^{\varepsilon}\}$ *есть обобщенное решение задачи (2.1)-(2.8)и функции* $F, \partial F/\partial t$ *ограничены в* $\mathbf{L}^2(\Omega_T)$*:*

$$\int_{\Omega_T} \left(|F|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \right) dxdt \le \mathcal{F}^2.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ *на произвольном интервале времени (0,T) справедлива оценка*

$$\max_{0\le t\le T} \int_{\Omega} \left(\left|\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\right|^2 + |p^{\varepsilon}|^2 + a_{\mu}\chi^{\varepsilon} \left|\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\right)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + a_{\lambda}(1-\chi^{\varepsilon}) \left|\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2 \right) dx \le C_0 \mathfrak{P}^2, \qquad (2.12)$$

где постоянная C_0 *не зависит от малого параметра* ε.

В работе (16) найден предельный режим (усредненные уравнения и соответствующие начальные и краевые условия) при следующих условиях

$$\mu_0 = \lambda_0 = 0, \qquad (2.13)$$

$$0 \le \mu_1, \lambda_1 < \infty. \qquad (2.14)$$

При таких условиях на коэффициенты уравнения описывают быстрые процессы, например, такие как гидравлический удар.

Вывод усредненных уравнений модели основан на применении метода двухмасштабной сходимости, предложенного Г. Нгуетсенгом (35).

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия (2.13), (2.14) и функции* $\{p^{\varepsilon}, \mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ *являются обобщенным решением задачи (2.1) – (2.8). Тогда из последовательности параметров* $\{\varepsilon > 0\}$ *можно выделить подпоследовательность, такую что последовательность* $\{\tilde{p}^{\varepsilon}\}$ *сходится слабо в*

$L_2(\Omega_T)$ при $\varepsilon \to 0$ *к решению* $p(\boldsymbol{x},t) \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$ *смешанной краевой задачи, состоящей из краевых условий*

$$p(\boldsymbol{x},t) = p_0(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{x} \in S^1,\ t > 0, \tag{2.15}$$

$$\left(\int_0^t \mathbb{B}(\mu_1,\lambda_1;\boldsymbol{x},t-\tau)\cdot\nabla p(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\right)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in S^2,\ t > 0, \tag{2.16}$$

и усредненного уравнения

$$\nabla\left(\int_0^t \mathbb{B}(\mu_1,\lambda_1;\boldsymbol{x},t-\tau)\cdot\nabla p(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\right) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega,\ t > 0. \tag{2.17}$$

Здесь $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ *– нормальный вектор к границе* S^2.

Область, ограниченная краевыми условиями и усредненным уравнением представленна на рис. 2.3.

Полученные в результате усреднения исходной точной микроскопической модели M_1 уравнения (2.15) – (2.17) назовем моделью M_2.

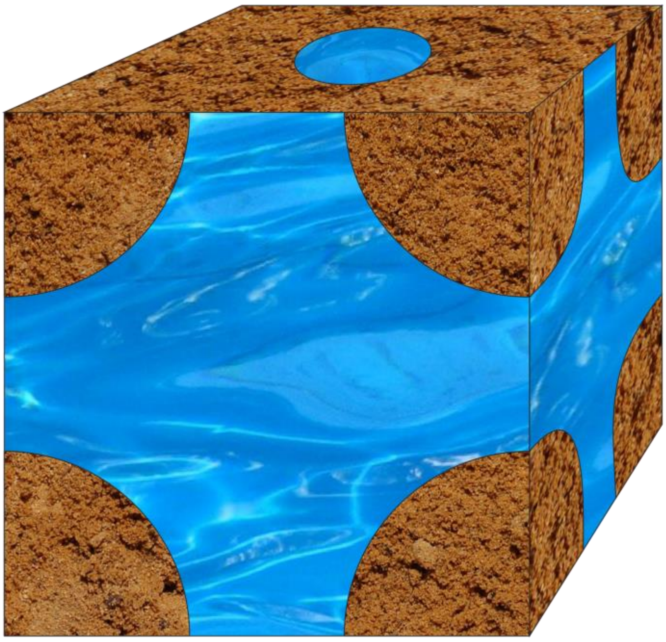

Рис. 2.3. Задача на ячейке для необнородной среды

3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Тензор $\mathbb{B}(\mu_1, \lambda_1; \boldsymbol{x}, t)$ в уравнениях модели M_2 дан формулой

$$\mathbb{B}(\mu_1, \lambda_1; \boldsymbol{x}, t) = \int_Y \sum_{i=1}^{3} W^{(i)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \otimes \boldsymbol{e}_i \, d\boldsymbol{y}.$$

В результате двухмасштабного предельного перехода в интегральное тождество (2.2) на основе теоремы 2.1, при условиях (2.13) – (2.14), имеются следующие результаты.

Имеется последовательность $\{\varepsilon_k > 0\}$, которая выделенна из последовательности значений малого параметра функции p и $\boldsymbol{w}$, такие что

$$p^{\varepsilon_k} \rightharpoonup p, \qquad \boldsymbol{w}^{\varepsilon_k} \rightharpoonup \boldsymbol{w}, \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon_k}}{\partial t^2} \rightharpoonup \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2}$$

слабо в $L_2(Q_T)$ и $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ при $\varepsilon_k \to 0$.

Изменяя значения индексов, если это необходимо, будем считать сходящимися сами последовательности.

По теореме Нгутсенга существуют 1-периодические по $\boldsymbol{y}$ функции $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ и $P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, такие что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\left\{\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right\}$, $\{\varepsilon \nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ и $\left\{\varepsilon \nabla \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\}$ сходятся двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ и $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ к функциям $P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\left\{\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\right\}$, $\nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ и $\nabla_y \left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right)(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ соответсвенно.

Теорема Нгутсенга также гарантирует, что

$$\boldsymbol{W}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2}, \nabla_y \boldsymbol{W}, \nabla_y \left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right) \in \boldsymbol{L}_2(Q_T \times Y). \tag{3.1}$$

Справедлива следующая

Лемма 3.1. *В условиях (2.13) двухмасштабный предел последовательности $\{p^\varepsilon\}$ совпадает с ее слабым пределом:*

$$P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = p(\boldsymbol{x}, t). \tag{3.2}$$

Для предельных функций $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{W}$ справедлива

Лемма 3.2. *Для почти всех $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ предельные функции $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{W}$ удовлетворяют микроскопическому уравнению баланса импульса*

$$\bar{\varrho}(x, y)\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2} = \nabla_y \cdot \left(\mu_1 \bar{\chi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_1\big(1 - \bar{\chi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\big)\mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}) - R\mathbb{I}\right) - \nabla_x p, \boldsymbol{y} \in Y, \qquad t > 0, \tag{3.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{W} = 0, \tag{3.4}$$

совместно с однородными начальными условиями

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0) = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0) = 0, \qquad \boldsymbol{y} \in Y, \tag{3.5}$$

где

$$\bar{\varrho}(\boldsymbol{y}) = \varrho_f \chi(\boldsymbol{y}) + \varrho_f\big(1 - \chi(\boldsymbol{y})\big).$$

Для того, чтобы найти решение задачи (3.3) – (3.5) воспользуемся разложениями

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t \boldsymbol{W}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau,$$

$$R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t R^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau,$$

где функции $\boldsymbol{W}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ и $R^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ есть решения периодических начально-краевых задач

$$\bar{\rho}(\boldsymbol{y})\frac{\partial^2\boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t^2}=$$

$$=\left(\frac{\mu_1}{2}\chi(\boldsymbol{y})\nabla\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t}\right)+\frac{\lambda_1}{2}\big(1-\chi(\boldsymbol{y})\big)\nabla\big(\boldsymbol{W}^{(i)}\big)-R^{(i)}\mathbb{I}\right), \qquad (3.6)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{W}^{(i)}=0, \qquad (3.7)$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{W}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)=0,\qquad \bar{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)=-\boldsymbol{e}_i,$$

$$\boldsymbol{y}\in Y,\qquad (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T. \qquad (3.8)$$

Подставив представление функции $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ в уравнение неразрывности (3.4), получим равенство

$$\nabla_y\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}\int_0^t \boldsymbol{W}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\right)=0$$

или

$$\sum_{i=1}^{3}\int_0^t \nabla_y\cdot\left(\boldsymbol{W}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t-\tau)\right)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau=0,$$

что справедливо, если

$$\nabla \cdot \boldsymbol{W}^{(i)} = 0.$$

Подставим теперь функции $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$, $R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$, а также функции

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t-\tau) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau + \\ + \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{W}^{(i)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, t)$$

и

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t-\tau) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau + \\ + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, t)$$

в тождество (3.1). Принимая во внимание условия (3.8), будем иметь

$$\bar{\varrho}(x, y) \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t-\tau) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau - \sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \\ = \nabla_y \cdot \left(\frac{\mu_1}{2} \bar{\chi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \nabla_y \left(\sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t-\tau) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau \right) + \right. \\ + \frac{\lambda_1}{2}(1 - \bar{\chi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \nabla_y \left(\sum_{i=1}^{3} \int_0^t \boldsymbol{W}^{(i)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t-\tau) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau \right) - \\ \left. - \sum_{i=1}^{3} \int_0^t R^{(i)} \frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau\, \mathbb{I} \right) - \nabla_x p$$

или

$$\sum_{i=1}^{3}\int_0^t \bar{\varrho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t^2}\frac{\partial p}{\partial x_i}d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \left(\nabla_y \cdot \left(\frac{\mu_1}{2}\bar{\chi}\,\nabla_y\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t}\right) + \frac{\lambda_1}{2}(1-\bar{\chi})\nabla_y \boldsymbol{W}^{(i)} - R^{(i)}\mathbb{I}\right)\right)\frac{\partial p}{\partial x_i}d\tau.$$

Последнее равенство достигается, если

$$\bar{\varrho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t^2} = \nabla_y \cdot \left(\frac{\mu_1}{2}\bar{\chi}\nabla_y\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t}\right) + \frac{\lambda_1}{2}(1-\bar{\chi})\nabla_y \boldsymbol{W}^{(i)} - R^{(i)}\mathbb{I}\right). \quad (3.9)$$

Обращаясь к представлению решения задачи (3.1) – (3.3) заключаем, что

$$\boldsymbol{W} = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{3} W^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t-\tau)\otimes \boldsymbol{e}_i\right)\cdot \nabla_x p(\boldsymbol{x},\tau)d\tau$$

и

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t \mathbb{B}(\mu_1,\lambda_1;\boldsymbol{x},t)\cdot \nabla_x p(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,$$

где тензор

$$\mathbb{B}(\mu_1,\lambda_1;\boldsymbol{x},t) = \int_Y \sum_{i=1}^{3} W^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\otimes \boldsymbol{e}_i\, d\boldsymbol{y}. \quad (3.10)$$

Теорема 3.1. *На произвольном интервале времени* $(0,T)$ *решение* $\{W^{(i)},R^{(i)}\}$ *задачи (3.6) – (3.8) удовлетворяет неравенству*

$$\max_{0\le t\le T}\int_Y \left(\left|\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2}\right|^2 + \left|R^{(i)}\right|^2 + \frac{\mu_1}{2}\bar{\chi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left|\nabla\left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}\right)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_1}{2}\left(1-\bar{\chi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\left|\nabla\left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}\right)\right|^2\right)dy \ \le C. \qquad (3.11)$$

где постоянная C зависит только от геометрии ячейки.

Умножив (3.9) на $\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}$, интегрируя по области Y_T с учетом условий (3.8), получим интегральное тождество

$$\int_Y \left(\bar{\varrho}\left|\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\right|^2 + \frac{\lambda_1}{2}(1-\bar{\chi})\left|\nabla_y \boldsymbol{W}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\right|^2\right)dy +$$

$$+\int_0^t\int_Y \mu_1\bar{\chi}\left|\nabla_y \frac{\partial \boldsymbol{W}^{(i)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\tau)\right|^2 dy d\tau = \int_Y \frac{1}{\bar{\varrho}}dy,$$

которое влечет априорную оценку (3.11).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе проведен подробный анализ теоретического материала связанного с темой работы, изучены основные теоретические материалы, монографии посвященныые усреднению многомерных сильно неоднородных сред В.А. Марченко, Е.Я. Хруслова, Э. Санчес-Паленсии, А.Л. Пятницкого, А.С. Шамаева., необходимые при исследовании краевых задач на ячейке неоднородной среды.

В работе была рассмотрена математическая модель, полученная в результате усреднения точной модели, которая определяет распределение поля давления в грунте. А именно упругий пористый скелет, занимающий ограниченную область – куб. Модель представлена уравнениями Стокса для скорости жидкости в порах грунта и уравнениями Ламе для колебания твердого скелета грунта.

Также были получены интегральное тождество, априорные оценки решения начально-краевой задачи для неоднородной среды и дано определение обобщенного решения задачи.

Целью работы являлся вывод априорных оценок периодической начально-краевой задачи на ячейке для неоднородной среды. Такие оценки получить удалось.

Основные результаты выпускной квалификационной работы докладывались и обсуждались в молодежной научно-практической конференции с международным участием, которая состоялась в Белгородском университете кооперации, экономики и права.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бахвалов Н.С. Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Учеб. пособие. – Л.: Ленинград, 1978. – 296 с.
3. Ворович И.И. О методе Бубнова – Галеркина в нелинейной теории колебания пологих оболочек. – Доклады АН СССР, 1956. – т. 110. – №5. – 723 - 726 с.
4. Галёркин Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. // Вестник инженеров. – 1915. – т.1. – 897 - 908 с.
5. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1993. – 464 с.
6. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа.– М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
8. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
10. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
11. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

12. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наукова думка, 1974. – 279 с.
13. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
14. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – 2-е изд.– М.-Л. – 1970. – 476 с.
15. Некрасова И.В. Математические модели гидравлического удара в вязкой жидкости // Сибирские электронные математические известия. – 2012. – Т. 9. – 274 - 293 с. – http://semr.math.nsc.ru/v9/p227-246.pdf.
16. Некрасова И.В. Некоторые модели гидравлического удара в нефтяном пласте// Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т.14. - № 3(47).
17. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Ч.1 – Н.– Новосибирский государственный университет – 1976. – 75 с.
18. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Ч. 2 – Н.– Новосибирский государственный университет – 1977. – 69 с.
19. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 260 с.
20. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.
21. Петров Г.И. Применение метода Галёркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости// Прикладная математика и механика. Новая серия.– 1940.– Т. 4.– Вып. 3.– 3-11 с.
22. Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А, Шамаев А.С. Усреднение. Методы и приложения. – Новосибирск: Тамара Рожковская, Белая серия в математике и физике, 2007. – Т.3. – 264 с.
23. Саженков С.А. Энтропийные решения нелинейных задач динамики многофазных сред : диссертация ... доктора физико-математических наук : 01.01.02 / Саженков Сергей Александрович; [Место защиты:

Новосибирский государственный университет].- Новосибирск, 2012.- 368 с.: ил. РГБ ОД, 71 13-1/237

24. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория вибраций. – М.: Мир, 1984. – 471 с.
25. Физическая энциклопедия. В 5-ти томах. — М.: Советская энциклопедия. Главный редактор А. М. Прохоров. 1988
26. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М. – Мир – 1988. – 352 с.
27. Acerbi E., ChiadoPiat V., Dal Maso G., Percivale D. An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains, Nonlinear Anal. 1992. V. 18, Issue 5, 481 - 496.
28. Bensoussan A., Lions J. – L., Papanicolau G. Asymptotic Analisis for Periodic Structure. – Amsterdam: North Holland, 1978. – 700 c.
29. Biot M. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media, J. Acoust. Soc. Am. 1962, V. 34, Issue 9A, 1256 - 1264.
30. Burridge R., Keller J. B. Poroelasticity equations derived from microstructure, J. Acoust. Soc. Am. 1981, V. 70. N4, 1140 - 1146.
31. Coussy O. Poromechanics. John Wiley and Sons, Chichester, 2004.
32. Lions J. – L. Some methods in the Mathematical Analysis of Systems and Theire Control // Beijing, China: Science Press: New York: Cordon and Breach. – 1981.
33. Lukkassen, D., Nguetseng, G., Wall P. Two-scale convergence, Int. J. Pure and Appl. Math. 2002, V. 2. N1, 35 - 86.
34. Meirmanov A. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163;2 – 111-172 c.
35. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization// SIAM J. Math. Anal. – 1989. – V.20. – P. 608 – 623.
36. Nguetseng G. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics, SIAM J. Math. Anal. 1990, V. 21, Issue 6, 1394 -1414.