Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИУ «БелГУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01
Педагогическое образование профиль Математика
очной формы обучения, группы 02041502
Твеленёвой Кристины Эдуардовны

Научный руководитель
доцент кафедры математики
Цецорина Т. А.

БЕЛГОРОД 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ИН – Иррациональные неравенства.

ИУ – Иррациональные уравнения.

ИУН – Иррациональные уравнения и неравенства.

ОДЗ – Область допустимых значений.

ВВЕДЕНИЕ

В курсе элементарной математики значительная часть посвящена исследованию уравнений и неравенств. Наряду с показательными, тригонометрическими, логарифмическими и рациональными стоит выделить иррациональные уравнения и неравенства.

В отличие от выше перечисленных видов уравнений – иррациональные уравнения и неравенства требуют использование большого количества теорем равносильности и следования, что значительно увеличивает вычислительную сложность решений уравнений с радикалами.

При решении уравнений и неравенств данного вида, необходимо учесть следующие принципы:

- не существует универсального алгоритма решения иррациональных уравнений;
- в следствие того, что при решении уравнений и неравенств приходится использовать не равносильные преобразования, то значительно повышается вероятность появления ошибок, по причине приобретения «лишних» корней или их потере в процессе решения.

Иррациональные уравнения также используются для получения таких важных расчётов как:

- первая космическая скорость, которая рассчитывается по формуле $v_I = \sqrt{G\frac{M}{R}}$;
- вторая космическая скорость $v_{II} = \sqrt{2gR}$;
- средняя скорость теплового движения молекул;
- в биологии для расчёта плотности среды обитания;
- в авиации для вычисления горизонтальной скорости полёта самолёта.

Научно доказано, что решение иррациональных уравнений и неравенств, способствует повышение концентрации человека, что также приводит к развитию мышления.

Актуальность данного исследования обуславливается тем, что при подготовке к сдаче Единого Государственного Экзамена учащиеся сталкиваются с описанными уравнениями и неравенствами. В базовом уровне в ЕГЭ по математике (задание №7), а также при решении заданий профильного уровня (задания № 5 и №13).

В следствие того, что в школьном курсе математики данной теме уделено довольно мало времени, это может вызвать серьёзные проблемы при подготовке к выпускному экзамену.

Объектом нашего исследования выступает процесс обучения учащихся общеобразовательных школ по теме: «Иррациональные уравнения и неравенства».

Предмет исследования – определение содержания, методов, средств, приёмов обучения, учащихся по теме: «Иррациональные уравнения и неравенства».

Цель исследования заключается в разработке методических рекомендаций для участников учебного процесса по решению иррациональных уравнений и неравенств. Вся имеющаяся информация по данной тематике весьма разрознена и не систематизирована, что вызывает определённые сложности при изучении.

Для разработки методики необходимы выполнить следующие задачи:

- Произвести анализ использующихся учебников из Федерального перечня;
- Изучить методики, представленные в исследуемой литературе;
- Ознакомиться со стандартами образования по теме исследования;
- Произвести анализ различных статей по данной тематике;

Данная исследовательская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. В первой главе раскрыты теоретические основы иррациональных уравнений и неравенств, методы их решения. Овладение этими методами сделает многие трудные задачи посильными для любого школьника. Во второй главе нашей исследовательской работы представлен анализ действующих учебников алгебры и начал математического анализа и разработанный нами элективный курс по теме «Иррациональные уравнения и неравенства».

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1.1 Важные приёмы преобразования уравнений

При решении уравнений, используют преобразования, которые превращают «сложные» уравнения в более простые. Важно учитывать то, что при таких преобразованиях *нельзя допускать потери корней.*

Преобразование будет называться *допустимым* в том случае, если полученное и исходное уравнение будет иметь одинаковые корни. Обязательным условием также является отсутствие потери корней или наличие хотя бы одного постороннего корня.

Следствием уравнения называется такое уравнения $f(x) = g(x)$, в котором любой корень исходного уравнения будет являть корнем уравнения $f_1(x) = g_1(x)$.

В связи с этим преобразования, которые могут проведены над уравнением, можно разделить на следующие типы: [21]

1) Преобразования называются *равносильные,* в том случае если после применения любых преобразований получится уравнение, которое в конечном счёте будет эквивалентно исходному.

2) Преобразования называются *неравносильные*, лишь в таком случае, если после применения любых преобразований происходит утрата корня или же приобретение «лишнего» корня, не удовлетворяющего условиям.

В том случае, когда уравнения $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$ являются следствием другого, то такие уравнения называются *равносильными* (эквивалентными).

Использование подстановки найденных корней в исходное уравнение, в качестве проверки *обязательно,* только если в процессе преобразований использовалась замена неравносильным следствием. В остальных же случаях, когда при используются равносильные преобразования – проверка не требуется.

Рассмотрим некоторые виды преобразований уравнений и проанализируем, к каким типам они относятся.

1. Перенос членов уравнения из одной части в другую.

Указанное преобразование приводит к равносильному уравнению.

В частности,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0.$$

Заметим, что здесь речь идёт только о переносе членов уравнения из одной его части в другую без последующего приведения подобных членов. [20]

2. Приведение подобных членов**.**

Справедливо следующее утверждение: для любых функций $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ уравнение $f(x) = g(x)$ является следствием уравнения $f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = g(x)$.

Переход от уравнения $f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ является допустимым преобразованием, при котором потеря корней невозможна, но могут появиться посторонние корни.

Таким образом, при приведении подобных членов, а также при отбрасывании одинаковых слагаемых в левой и правой частях уравнения получается уравнение, являющееся следствием исходного уравнения. [20]

3. Умножение обеих частей уравнения на одну и ту же функцию.

Для этого способа будут справедливы следующие утверждения:

1) если *область допустимых значений* (далее по тексту ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$, то есть *пересечение областей определения функций* $f(x)$ *и* $g(x)$, содержится в области определения функции $\varphi(x)$, то уравнение $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ является следствием уравнения $f(x) = g(x)$;

2) если функция $\varphi(x)$ определена и отлична от нуля в ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ равносильны. [20]

4. Возведение обеих частей уравнения в натуральную степень.

Справедливы следующие утверждения:

1) уравнение $(f(x))^n = (g(x))^n, n \in N, n \geq 2$ является следствием уравнения $f(x) = g(x)$;

2) если $n = 2k + 1$ (n – нечётное число), то уравнения $f(x) = g(x)$ и $(f(x))^n = (g(x))^n$ равносильны;

3) если $n = 2k$ (n – чётное число), то уравнение $(f(x))^n = (g(x))^n$ равносильно уравнению

$$|f(x)| = |g(x)|,$$

а оно равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$ [20]

Следовательно, возведение обеих частей уравнения в нечётную степень и извлечение из обеих частей уравнения корня нечётной степени является равносильным преобразованием.

Исходя из утверждения 1 и 3, возведение обеих частей уравнения в чётную степень и извлечение из обеих частей уравнения корня чётной степени является неравносильным преобразованием, при этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

5. *Применение формулы*

$$\sqrt[n]{f(x)} \times \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{f(x) \times g(x)}, m \in N$$

при $n = 2k + 1$ является равносильным преобразованием, при $n = 2k$ – неравносильным. [20], [21]

1.2 Теоретические основы решения иррациональных уравнений

Иррациональным уравнением (далее по тексту ИУ) называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

$$\sqrt{A(x)} = B(x), \sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}.$$

1. <u>Формальный метод решения ИУ.</u>

Основная идея решения ИУ состоит в том, что для избавления уравнения от радикала необходимо сначала привести его к рациональному, которое в свою очередь должно быть равносильно исходному ИУ или же являться его следствием

Возведение обеих частей уравнения в одинаковую степень позволит избавится от радикала и получить более простое рациональное уравнение. Возводить необходимо в ту степень, которую имеет корень содержащий неизвестное. Для описанного метода имеется формула $\left(\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)^n = \varphi(x)$, где $n -$ натуральное число. [6]

Рассмотрим применение данного метода для решения ИУ вида

$$\sqrt[2k]{f(x)} = g(x). [7]$$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+6} = 2\sqrt{2}x$.

Решение. Возведём обе части этого уравнения в квадрат

$$(\sqrt{2x+6})^2 = (2\sqrt{2}x)^2$$

и получаем следующее уравнение-следствие

$$8x^2 - 2x - 6 = 0.$$

Его корни

$$x = 1 \text{ или } x = -0{,}75.$$

Проверка. $x = 1$: $\sqrt{2 \times 1 + 6} = 2\sqrt{2} \times 1 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Это верное числовое равенство, значит, число 1 является корнем исходного уравнения. Проверим второй найденный корень.

$x = -0{,}75$: $\sqrt{2 \times (-0{,}75) + 6} = 2\sqrt{2} \times (-0{,}75) \ \Leftrightarrow\ 4{,}5 = -1{,}5\sqrt{2}$. Это неверное числовое равенство, значит, число $-0{,}75$ не является корнем данного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Теперь рассмотрим этот же метод, но уже для уравнений вида

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x). [7]$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{-2x^2 + 4x - 1} = x$$

Решение. Для решения данного уравнения необходимо возвести обе его части в третью степень, и так как корень у нас нечётной степени, значит это преобразование будет равносильным и проверка не понадобится.

$$\left(\sqrt[3]{-2x^2 + 4x - 1}\right)^3 = x^3$$

Пользуясь определением корня нечётной степени перепишем уравнение

$$-2x^2 + 4x - 1 = x^3.$$

Теперь нам необходимо найти решение вышеуказанного уже рационального уравнения, что упрощает задачу в несколько раз.

$$x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

По теореме Безу среди делителей свободного члена находим первый корень уравнения $x_1 = 1$. Делим выражение, стоящее в левой стороне уравнения на выражение $(x - 1)$ и получаем квадратное уравнение

$$x^2 + 3x - 1 = 0,$$

корни которого $x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Так все преобразования, производимые нами в ходе решения ИУ были равносильными, то можно сразу записать ответ.

Ответ: $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

2. <u>Метод сведения к эквивалентной системе уравнений и неравенств</u>

С помощью данного метода также происходит избавление от радикала, только при этом обязательно ставится условие, чтобы от уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ перейти к эквивалентной системе уравнений и неравенств.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Условие $g(x) \geq 0$ допускает возведение обеих частей уравнения в чётную степень без потери и приобретения корней. Следовательно, проверку делать не нужно. [19]

Условное неравенство $f(x) \geq 0$ добавлять к данной системе не нужно, так как оно автоматически выполняется для корней условия $f(x) = g^2(x)$. Это довольно частая и распространённая ошибка учащихся. [10]

Пример 3. Решим уравнение из Примера 1 рассматриваемым методом сведения к системе

$$\sqrt{2x+6} = 2\sqrt{2}x.$$

Решение. Представим уравнение в виде эквивалентной системы:

$$\begin{cases} 2x + 6 = 8x^2, \\ 2\sqrt{2}x \geq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение перепишем равносильным ему равенством

$$8x^2 - 2x - 6 = 0.$$

Его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -0{,}75$.

Корень $x_2 = -0{,}75$ не удовлетворяет неравенству $2\sqrt{2}x \geq 0$ системы и является посторонним корнем как системы, так и исходного уравнения. А корень $x_1 = 1$ принадлежит промежутку $x \in [0; +\infty)$, значит является решением данного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Методом сведения ИУ к эквивалентной системе уравнений и неравенств также удобно решать и ИУ вида

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}.$$

Такое уравнение равносильно каждой из двух систем

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку после возведения в чётную степень получаем уравнение-следствие $f(x) = g(x)$. Мы должны, решив его, выяснить, принадлежат ли найденные корни ОДЗ исходного уравнения, то есть выполняется ли неравенство $f(x) \geq 0$ (или $g(x) \geq 0$). На практике из этих систем выбирают для решения ту, в которой неравенство проще. [10]

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + x - 3} = \sqrt{1 - 2x}$$

Представим его в виде эквивалентных систем

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 = 1 - 2x, \\ x^2 + x - 3 \geq 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + x - 3 = 1 - 2x, \\ 1 - 2x \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что вторую систему решать быстрее, но мы рассмотрим оба случая, чтобы убедиться в действенности метода.

1) $\begin{cases} x^2 + x - 3 = 1 - 2x, \\ x^2 + x - 3 \geq 0. \end{cases}$

Решая первое уравнение из системы переходим к равносильному

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Его корни $x_1 = 1, x_2 = -4$.

Решая неравенство, находим что $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$. Тогда решением системы и, соответственно, исходного уравнения будет корень $x_2 = -4$.

2) $\begin{cases} x^2 + x - 3 = 1 - 2x, \\ 1 - 2x \geq 0. \end{cases}$

Корни первого уравнения аналогичны, как и в первом случае $x_1 = 1, x_2 = -4$.

Решим второе неравенство системы. Его решением будет промежуток $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. Следовательно, снова получаем, что решением системы и исходного уравнения является корень $x_2 = -4$.

Ответ: $x = -4$.

Таким образом, мы рассмотрели метод сведения к эквивалентной системе уравнений и неравенств и убедились в его действенности.

3. Метод уединения радикала

При решении ИУ перед возведением обеих его частей в некоторую степень полезно *«уединить радикал»,* то есть перенести сам радикал в одну сторону уравнения, а все остальное в другую

$$C(x) = \sqrt[n]{D(x)}.$$

После приведения исходного уравнения к такому виду, следует решать его как описано в предыдущих двух пунктах.

Пример 5. Решить уравнение

$$x + \sqrt{2x + 3} = 6.$$

Решение. Метод уединения радикала приводит к уравнению $\sqrt{2x + 3} = 6 - x$. Теперь это уравнение можно решить прошлым методом сведения к эквивалентной системе уравнений и неравенств.

$$\begin{cases} 2x + 3 = (6 - x)^2, \\ 6 - x \geq 0. \end{cases}$$

После преобразований первое уравнение превращается в уравнение

$$x^2 - 14x + 33 = 0,$$

И его корни $x_1 = 11$ и $x_2 = 3$, но по условию системы $6 - x \geq 0$ решением исходного уравнения является только второй корень $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{3 - x} - 2x + 3 = 0.$$

Решение. Сразу уединим радикал в левой части уравнения

$$\sqrt{3 - x} = 2x - 3.$$

Теперь получившееся уравнение представим в виде равносильной системы уравнений и неравенств

$$\begin{cases} 3 - x = (2x+3)^2, \\ 2x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим кратко решение первого уравнения системы

$$3 - x = (2x+3)^2,$$
$$4x^2 - 11x + 6 = 0,$$

Корни квадратного уравнения: $x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{4}$.

Обновим вид нашей системы

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{3}{4}, \end{array}\right. \\ x \geq \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Учитывая условие $x \geq \frac{3}{2}$, получаем, что из найденных корней $x = 2 -$ решение исходного иррационального уравнения, а $x = \frac{3}{4} -$ посторонний корень.

Ответ: $x = 2$.

4. <u>Метод введения новой переменной.</u>

Это довольно интересный и действующий метод решения ИУ. Он обычно применяется в случае, когда в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. В этом случае, это самое встречающееся выражение обозначают некоторой буквой, и решают получившееся уравнение относительно новой введённой неизвестной. И лишь потом, возвращаясь к замене, находят значения основной переменной. [6], [19]

Рассмотрим данный метод на следующем примере.

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$$

Решение. Пусть $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=t, t\geq 0$ а после возведения обеих частей этого равенства в квадрат получаем, что $x+\sqrt{x^2-16}=\frac{t^2}{2}$, тогда исходное уравнение приобретает вид:

$$\frac{t}{2}=\frac{t^2}{2}-6.$$

Преобразуем его в обычное квадратное уравнение

$$t^2-t-12=0.$$

Корни этого уравнения $t_1=4, t_2=-3$. Так как у нас есть условие, что t должно быть больше или равно 0, остаётся только $t=4$.

Возвращаясь в подстановку, решаем более простое ИУ

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4.$$

Применим метод сведения к равносильной системе уравнений и неравенств

$$\begin{cases}2x+2\sqrt{x^2-16}=16,\\ x\geq 4;\end{cases}$$

И снова приходится решать ИУ, теперь система уже имеет вид

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2, \\ 4 \le x \le 8; \end{cases}$$

И, наконец, решая линейное уравнение, получаем корень $x = 5$, который удовлетворяет условию системы, а значит является решением исходного уравнения.

Ответ: $x = 5$.

Замена особенно полезна, если в результате достигается новое качество, например, ИУ превращается в квадратное.

Пример 8. Решить уравнение

$$x^2 + x\sqrt{x+1} - 2(x+1) = 0.$$

Решение. Так как корень $x = 0$ не является решением уравнения, то смело можем делить наше ИУ на x^2. Получаем уравнение равносильное данному:

$$1 + \frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{2(x+1)}{x^2} = 0,$$

Пусть $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = t$, тогда после замены и преобразования получаем обычное квадратное уравнение

$$2t^2 - t - 1 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим его корни $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Возвращаясь в подстановку, имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=1,\\ \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Затем аккуратно решаем каждое уравнение

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1=x^2,\\ \quad x>0;\end{cases}\\ \begin{cases}4x+4=x^2,\\ -1\le x<0;\end{cases}\end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\\ x=2-2\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $x=2-2\sqrt{2}.$

5. <u>Метод сведения к эквивалентным системам рациональных уравнений</u>

Уравнения вида $\sqrt[m]{ax+b}\pm\sqrt[n]{cx+d}=p$ (где a, b, c, d – действительные числа, m, n – натуральные) и ряд других уравнений часто удаётся решить *при помощи введения двух вспомогательных неизвестных:* $\sqrt[m]{ax+b}=y$ и $\sqrt[n]{cx+d}=z$, где $y,z\ge 0$ и последующего перехода к *эквивалентной системе рациональных уравнений*. [19]

Рассмотрим данный метод на примере ниже.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$$

Решение. Обозначим две новые переменные x и y:

$$x=\sqrt[3]{2-x}, y=\sqrt[3]{7+x}.$$

Тогда получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3, \\ x^3 + y^3 = 9; \end{cases}$$

Решаем систему и находим значения x и y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3, \\ (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 9; \end{cases} <=> \begin{cases} (x + y)^2 - 3xy = 3, \\ x + y = 3; \end{cases} <=$$

$$> \begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3; \end{cases} <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Возвращаемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2 - x} = 1, \\ \sqrt[3]{7 + x} = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2 - x} = 2, \\ \sqrt[3]{7 + x} = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Решаем каждое полученное ИУ с помощью возведения обеих частей уравнения в третью степень и получаем следующую совокупность систем уже линейных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 - x = 1, \\ 7 + x = 8; \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - x = 8, \\ 7 + x = 1; \end{cases} \end{array} \right. <=> \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -6. \end{array} \right.$$

Так как все преобразования были равносильными, проверка не нужна, и найденные нами корни являются решением исходного уравнения.

Ответ: $x = 1$ или $x = -6$.

6. <u>Умножение обеих частей уравнения на функцию.</u>

Предполагаемый метод требует обязательной проверки полученных корней, однако он позволяет гораздо быстрее решать ИУ. Для решения необходимо удачно подобрать функцию, правда при умножении обеих частей возможны и появления «лишних» корней или же возможны появления нулей функции. [6]

Пример 10. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x.$$

Решение. Умножим обе части данного уравнения на выражение $\sqrt{1+x}-1$.

Получаем следующее уравнение-следствие

$$x\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right).$$

Представим его в виде равносильной совокупности:

$$\left[\begin{array}{c} x=0, \\ \sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{x+1}-1; \end{array}\right.$$

Теперь нам необходимо решить второе ИУ из совокупности. Решать его будем сначала уединив радикал в левой стороне уравнения, а затем возведением в квадрат обеих частей и приведением слагаемых.

$$\sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{x+1}-1,$$

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{x+1}=4-2x,$$

$$1+x-2\sqrt{(1+x)\times(x+1)}+x+1=4x^2-16+16,$$

$$4x^2-16+16=0,$$

$$x = 2.$$

Произведём проверку найденных корней.

$$x = 0: \left(\sqrt{1+0}+1\right)\left(\sqrt{1+0}+2\times 0-5\right) = 0,$$
$$2\times(-4) = 0,$$

$-8 = 0$ – неверное числовое равенство, следовательно, этот корень не подходит и является посторонним.

$$x = 2: \left(\sqrt{1+2}+1\right)\left(\sqrt{1+2}+2\times 2-5\right) = 2,$$
$$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) = 2,$$

$2 = 2$ – верное числовое равенство, значит корень $x = 2$ является единственным действительным решением исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

В данной работе не рассматриваются уравнения *смешанного типа*, которые помимо знака корня могут содержать параметр или знак модуля. Также к описанной группе можно отнести логарифмические, тригонометрические и показательные уравнения, однако такие типы уравнений редко встречается в школьном курсе математики. Чаще всего такие задания можно встретить при подготовке к Единому Государственному Экзамену либо при сдаче вступительных экзаменов в ВУЗы.

Такие уравнения рассматриваются на факультативных занятиях или элективных курсах по математике с учащимися, которым указанные уравнения будут необходимы в дальнейшем обучении.

1.3 Теоретические основы решения иррациональных неравенств

Достаточно трудным разделом, который включён в школьный курс математики, является раздел, посвящённый иррациональным неравенствам (далее по тексту ИН). Однако несмотря на это в школе достаточно мало времени уделено изучению данной темы. Причём даже у тех учащихся, которые легко справляются с решением ИУ, нередко могут возникнуть проблемы при изучении ИН. Помимо этого, ещё одним фактором, который только осложняет и без того не самую лучшую ситуацию является тот факт, что при решении ИН, исключена возможность проверки. Вследствие этого нужно внимательно производить все преобразования и следить за тем, чтобы они являлись равносильны исходному.

«*Если в любом ИУ заменить знак равенства на один из знаков неравенства: >, ≥, <, ≤, то получим ИН.*» [23] Поэтому под ИН будем понимать «*неравенство, в котором неизвестные величины находятся под знаком корня.*» [22]

Способ решения таких неравенств состоит в преобразовании их к рациональным неравенствам путём возведения обеих частей неравенства в степень.

Чтобы избежать ошибок при решении ИН, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, то есть найти ОДЗ этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ОДЗ или её частях.

При решении ИН следует запомнить правило: «*при возведении обеих частей неравенства в нечётную степень всегда получается неравенство, равносильное данному неравенству*». [22]

Но если «*при решении уравнений в результате возведения чётную степень мы могли получить посторонние корни и не могли потерять корни, то корни неравенства при бездумном возведении в чётную степень могут одновременно и теряться, и приобретаться*». [9]

Однако верно основное используемое здесь утверждение: «*если обе части неравенства возводят в чётную степень, то получится неравенство, равносильное исходному только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны*». [22]

1. Метод сведения к эквивалентной системе или совокупности рациональных неравенств

Основным методом решения ИН является сведение исходного неравенства к равносильной системе или совокупности систем рациональных неравенств. [19]

Наиболее простые ИН имеют вид:

1) $\sqrt{f(x)} < g(x)$ или $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$;

2) $\sqrt{f(x)} > g(x)$ или $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$;

3) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ или $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$.

ИН $\sqrt{f(x)} < g(x)$ или $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \text{или} \begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Первое неравенство в системе (1) является результатом возведения исходного неравенства в степень, второе неравенство представляет собой условие существования корня в исходном неравенстве, а третье неравенство системы выражает условие, при котором это неравенство можно возводить в квадрат.

ИН $\sqrt{f(x)} > g(x)$ или $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x) > g^2(x),\\ g(x) \geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x) \geq 0,\\ g(x) < 0.\end{cases}\end{array}\right. \text{или} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x) \geq g^2(x),\\ g(x) \geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x) \geq 0,\\ g(x) \leq 0.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (2)$$

Обратимся к первой системе схемы (2). Первое неравенство этой системы является результатом возведения исходного неравенства в квадрат, второе – условие, при котором это можно делать.

Вторая система схемы (2) соответствует случаю, когда правая часть отрицательна, и возводить в квадрат нельзя. Но в этом и нет необходимости: левая часть исходного неравенства – арифметический корень – неотрицательна при всех x, при которых она определена. Поэтому исходное неравенство выполняется при всех x, при которых существует левая часть. Первое неравенство второй системы и есть условие существования левой части.

ИН $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ или $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}f(x) > g(x),\\ g(x) \geq 0.\end{cases} \text{или} \begin{cases}f(x) \geq g(x),\\ g(x) \geq 0.\end{cases} \qquad (3)$$

Поскольку обе части исходного неравенства неотрицательны при всех x, при которых они определены, поэтому его можно возвести в квадрат. Первое неравенство в системе (3) является результатом возведения исходного неравенства в степень. Второе неравенство представляет собой условие существования корня в исходном неравенстве, понятно, что неравенство $f(x) \geq 0$ выполняется при этом автоматически.

Схемы (1)–(3) – наш основной инструмент при решении ИН, к ним сводится решение практически любой задачи. Разберём пару примеров. [9]

Пример 11. Решить неравенство

$$\sqrt{3x-9} > -5.$$

Решение. Так как правая часть равна отрицательному числу, а левая часть исходного неравенства больше или равна 0 при всех значениях x, при которых она определена, значит левая часть больше правой части при всех значениях x, удовлетворяющих условию $x \geq 3$.

Ответ: $x \in [3; +\infty)$.

Пример 12. Решить неравенство

$$\sqrt{2x-3} < 1.$$

Решение. Представим данное неравенство в виде равносильной ему системы

$$\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$$

Условие $g(x) = 1 \geq 0$ выполнено при всех x, и нет необходимости добавлять его к выписанной системе.

Решая систему, находим, что решением исходного неравенства есть полуинтервал от $\frac{3}{2}$ до 2.

Ответ: $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right)$.

Пример 13. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x+1} \geq \sqrt{3x-4}.$$

Решение. Заменим наше неравенство равносильной системой:

$$\begin{cases} x^2-3x+1 \geq 3x-4, \\ 3x-4 \geq 0; \end{cases}$$

После преобразования первого неравенства система приобретает вид:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0, \\ 3x - 4 \geq 0; \end{cases}$$

Решаем наши неравенства и получаем следующие решения:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 5, \\ x \leq 1, \end{array} \right. \\ x \geq \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Объединяя полученные решения полагаем, что решением исходного неравенства есть луч от 5 до $+\infty$.

Ответ: $x \in [5; +\infty)$. .

Рассмотрим решение ИН следующего вида

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < z(x).$$

Поскольку $\sqrt{f(x)} \geq 0$, $\sqrt{g(x)} \geq 0$, то должны выполнятся условия $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, $\sqrt{g(x)} < z(x)$ (соответственно $\sqrt{f(x)} < z(x)$). На множестве, где эти условия выполняются, данное неравенство равносильно неравенству

$$f(x) < (z(x) - \sqrt{g(x)})^2$$

(соответственно неравенству $g(x) < (z(x) - \sqrt{f(x)})^2$), которое сводится к разобранным выше типам неравенств. [4]

Теперь перейдём к решению более сложных задач, стараясь свести их решение к стандартным ситуациям – к простейшим неравенствам, рассмотренным выше. Приёмы сведения во многом аналогичны приёмам, применяемым при решении ИУ.

Если в неравенстве встречаются два квадратных радикала, обычно приходится неравенство возводить в квадрат дважды, обеспечивая при этом необходимые для этой операции условия.

Пример 14. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2}<2.$$

Решение. Перепишем данное неравенство эквивалентной ему системой

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ 4-x^2 \geq 0, \\ 1-x^2 < \left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^2; \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 \leq 1, \\ x^2 \leq 4, \\ \sqrt{4-x^2} < \dfrac{7}{4}. \end{cases}$$

Третье неравенство в системе является ИН, поэтому рассмотрим его решение отдельно и более подробно, а затем вернёмся к основному решению.

ИН $\sqrt{4-x^2} < \frac{7}{4}$ будет равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 4-x^2 < \dfrac{49}{16}, \\ 4-x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Добавлять условие $\frac{7}{4} \geq 0$ нет смысла, так как оно выполнимо при любых значениях x.

Неравенства в последней системе квадратные и решаются методом интервалов. Первое неравенство равно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{\sqrt{15}}{4}, \\ x < -\dfrac{\sqrt{15}}{4}; \end{array}\right.$$

а второе:

$$\left[\begin{array}{l} x \leq 2, \\ x \geq -2. \end{array}\right.$$

В итоге, объединением решений последних совокупностей будут два полуинтервала $x \in \left[-2; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ и $x \in \left(\frac{\sqrt{15}}{4}; 2\right]$.

Вернёмся к основному решению исходного уравнения, решим неравенства и добавим найденное решение третьего, получим систему из трёх совокупностей

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq -1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 2, \\ x \geq -2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -2 \leq x < -\dfrac{\sqrt{15}}{4}, \\ \dfrac{\sqrt{15}}{4} < x \leq 2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Сопоставляя полученные промежутки, получаем, что решением исходного ИН есть 2 полуинтервала

$$\left[\begin{array}{l} -1 \leq x < -\dfrac{\sqrt{15}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{15}}{4} < x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $-1 \leq x < -\frac{\sqrt{15}}{4}$ или $\frac{\sqrt{15}}{4} < x \leq 1$.

Пример 15. Решить неравенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-5} \leq \sqrt{10-x}.$$

Решение. Данному неравенству равносильна следующая система:

$$\begin{cases} x < \left(\sqrt{10-x} - \sqrt{x-5}\right)^2, \\ x \geq 0, \\ x - 5 \geq 0; \end{cases}$$

Более детально рассмотрим первое неравенство системы. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых оно приобретает вид

$$\sqrt{-x^2 + 15x - 50} > \frac{5-x}{2}$$

и равносильно следующей системе совокупностей

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -x^2 + 15x - 50 > \left(\frac{5-x}{2}\right)^2, \\ \frac{5-x}{2} \geq 0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -x^2 + 15x - 50 \geq 0, \\ \frac{5-x}{2} < 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решения всех четырёх неравенств запишем в систему

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5 < x < 9, \\ x \leq 5; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 5 \leq x \leq 10, \\ x > 5. \end{array}\right. \end{cases}$$

У выше указанной системы есть только одно решение $x = 5$.

Объединим его с решениями исходной системы неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 5, \\ x = 5. \end{cases}$$

Очевидно, что корень $x = 5$ является единственным решение исходного неравенства.

Ответ: $x = 5$.

2. Умножение обеих частей неравенства на функцию

Выражения $\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b}$ и $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}$ называются *сопряжёнными друг другу*. Заметим, что их произведение $\alpha^2 a-\beta^2 b$ уже не содержит корней из a и b. Поэтому в ряде задач вместо возведения в квадрат, приводящего к слишком громоздким выражениям, разумнее умножить обе части неравенства на выражение, сопряжённое одной из них.

Пример 16. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x+1}} \geq 1+\sqrt{x+1}.$$

Решение. Преобразуем исходное неравенство: перенесём все в левую часть и умножим на -1

$$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}-1}+\sqrt{x+1}+1 \leq 0.$$

Затем умножим и одновременно разделим дробь на выражение $\sqrt{x+1}+1$ и приведём к общему знаменателю

$$\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}+\sqrt{x+1}+1 \leq 0.$$

Несложно заметить, что в знаменателе дроби образовалась разность квадратов. Получаем

$$\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+1}+1)}{x}+\sqrt{x+1}+1 \leq 0.$$

Теперь вынесем общий множитель слагаемых $\sqrt{x+1}+1$

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x}+1\right) \leq 0 <=> \left(\sqrt{x+1}+1\right)\frac{x+\sqrt{x}-2}{x} \leq 0.$$

ОДЗ последнего неравенства есть множество $x > 0$. В этом случае получаем равносильное неравенство:

$$x+\sqrt{x}-2 \leq 0.$$

Его решением является отрезок от 0 до 1.

Пересекая получившееся решение с ОДЗ получаем решение исходного неравенства

$$0 < x \leq 1.$$

Ответ: $x \in \ (0;1]$.

Пример 17. Решить неравенство

$$\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3} < 2x-1.$$

Решение. Для начала необходимо найти ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x+1 \geq 0, \\ x+3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}.$$

Теперь мы можем умножим обе части исходного неравенства на выражение $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}$, которое является сопряжённым левой части неравенства и положительно в ОДЗ:

$$(5x+1)-(x+3) < (2x-1)(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3})$$

Раскрываем скобки и выносим общий множитель 2 за скобку в левой части неравенства:

$$2(2x-1) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right).$$

На данном этапе наше решение зависит от знака общего множителя $(2x-1)$. Запишем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1 < 0, \\ \sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3} < 2; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ \sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3} > 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отметим, что возможен и третий случай, когда $2x-1=0$. В таком случае наше неравенство не выполняется.

Решая все неравенства совокупности и сразу учитывая ОДЗ получаем:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{5} \le x < \frac{4-\sqrt{19}}{2}, \\ x > \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{4-\sqrt{19}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

3. <u>Метод введения новой переменной</u>

Для решения ИН, так же, как и для решения ИУ, с успехом может применяться метод введения новой переменной.

«Иногда удаётся иррациональную функцию, входящую в неравенство, заменить новой переменной таким образом, что относительно этой переменной неравенство становится рациональным.» [33]

Пример 18. Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1.$$

Решение. Сразу введём новую переменную t. Пусть $3x^2+5x+2=t, t\geq 0$. Тогда получим

$$\sqrt{t+5}-\sqrt{t}>1$$

$$\sqrt{t+5}>\sqrt{t}+1.$$

Получившееся ИН равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} t\geq 0, \\ t+5>t+2\sqrt{t}+1; \end{cases} \leq> \begin{cases} t\geq 0, \\ \sqrt{t}<2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $0\leq t<4$. Возвращаясь к замене, получаем:

$$\begin{cases} 3x^2+5x+2\geq 0, \\ 3x^2+5x+2<4. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим 2 решения

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq -1, \\ x\geq -\dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \\ -2<x<\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $-2 < x \leq -1$ или $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3}$.

Пример 19. Решить неравенство

$$\sqrt{4x^2 + x + 9} + \sqrt{4x^2 + x} > 3.$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру. Сразу введём новую переменную t. Пусть $4x^2 + x = t, t \geq 0.$ Тогда получим

$$\sqrt{t+9} + \sqrt{t} > 3 <=> \sqrt{t+9} > 3 - \sqrt{t}.$$

Получившееся неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t + 9 > 9 - 6\sqrt{t} + t; \end{cases}$$

Решая второе неравенство системы получаем:

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t > 0; \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $t > 0$. Возвращаемся к нашей замене. В данном случае нам необходимо решить лишь следующее неравенство:

$$4x^2 + x > 0.$$

Решая методом интервалов, находим что

$$\left[\begin{array}{l} x > 0, \\ x < -\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (0; +\infty)$.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

При изучении любой новой темы в основном курсе математики встаёт проблема изложения данной темы в школьных учебниках. Естественно, каждый автор излагает определения по-своему, но все они не противоречат основным понятиям. Так и с иррациональными уравнениями и неравенствами (далее по тексту – ИУН).

В данной главе мы должны обратиться к федеральному перечню учебников, выбрать наиболее подходящих авторов, проанализировать изложение тем «Иррациональные уравнения» и «Иррациональные неравенства» в школьном курсе, чтобы в дальнейшем разработать оптимальную систему факультативных занятий для 10 класса по теме нашего исследования.

2.1 Иррациональные уравнения и неравенства в школьном курсе математики

2.1.1 Учебник «Алгебра, 8 класс», автор Колягин Ю. М.

Знакомство учащихся с иррациональными числами в указанном учебнике [15] начинается только в третьей главе «Квадратные корни» в параграфе «Действительные числа».

В данном параграфе ученики узнают, что не любое число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое, а n – натуральное число. Например, числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ и др. А также учащиеся понимают, что с одним из иррациональных чисел они знакомы уже давно, и это число π.

Для начала автор предлагает вспомнить:

- понятия натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел;

- правила округления чисел;
- понятие точности записи приближенных значений;
- правила сравнения обыкновенных и десятичных дробей;
- изображение чисел точками на числовой прямой.

Далее Юрий Михайлович рассказывает о рациональных числах и о том, что любое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби. И наоборот, любую бесконечную периодическую или конечную десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби, т.е. в виде $\frac{m}{n}$, где m – целое, а n – натуральное число.

После этого автор рассказывает о том, что наряду с бесконечными периодическими десятичными дробями в математике рассматриваются также и бесконечные десятичные непериодические дроби. Даёт определение: «Бесконечные десятичные непериодические дроби называют иррациональными числами. Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел». Далее автор рассматривает 3 задачи с использованием микрокалькулятора, например:

Задача 4. Вычислить на МК с точностью до 0,1:

$$23 \times \sqrt{34 + \sqrt{26}.}$$

Решение: Запишем данное выражение в виде $\left(\sqrt{34 + \sqrt{26}.}\right) \times 23$ и вычислим его значение по программе

$$34 + 26 \sqrt{} = \sqrt{} * 23 = 143{,}81718.$$

Ответ: 143,8.

После изложения материала автор предлагает ответить на вопросы:

1. Назвать причины расширения понятия числа от натурального до целого; от целого до рационального.
2. Привести пример десятичной конечной дроби; бесконечной периодической дроби.

3. Какие несократимые обыкновенные дроби нельзя записать в виде конечных десятичных дробей?

4. Что называют иррациональным числом?

5. Какие числа называют действительными?

Затем автор предлагает ряд упражнений для закрепления материала по теме «Действительные числа», где необходимо вычислить, выполнить деление с точностью до некоторой величины, решить уравнение, записать в виде различных видов дробей числа, сравнить числа и др. А также более сложные дополнительные и трудные задания.

2.1.2 Учебник «Алгебра, 8», автор Мордкович А. Г.

Это – учебник для классов с повышенным уровнем математической подготовки в общеобразовательных школах. [19] При изучении федерального перечня и подборе подходящих учебников [27] нам стало интересно, как излагается материал по темам «Иррациональные числа» и «Иррациональные уравнения» в 8 классе с углублённым изучением математики, именно поэтому мы решили добавить в наш анализ школьной литературы этот учебник.

С иррациональными числами автор знакомит учащихся уже во второй главе в одноименном девятом параграфе. Он рассказывает о происхождении таких терминов как «рациональное число» и «иррациональное число», рассматривает уже известное иррациональное число $\sqrt{5}$, говорит о том, что оно является бесконечной десятичной непериодической дробью и даёт определение иррационального числа. Приводит в пример число π и повествует его историю. Заканчивается знакомство с иррациональными числами вопросами для самопроверки.

Но уже в шестой главе в тридцать восьмом параграфе Мордкович А. Г. начинает изучение ИУ. Как было сказано ранее, данное учебное пособие предназначено для классов с углублённым изучением математики, поэтому уже в 8 классе учащиеся познают ИУ и учатся их решать.

Начинается параграф с определения ИУ. После этого автор рассматривает решение ИУ $\sqrt{2x+1}=3$. Для решения данного ИУ автор применяет метод возведения в квадрат обеих частей уравнения. Далее автор также применяет описанный метод для решения ИУ вида $\sqrt{f(x)}=g(x), \sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$. Проверка является самым важным и необходимым этапом при решении ИУ – утверждает автор.

Также автор рассматривает метод введения новой переменной.

Несложно заметить, что в данном учебнике нет упражнений для закрепления и отработки усвоенного материала. Для этого автор Мордкович А. Г. разработал задачник, полностью дублирующий темы основного учебника, в котором представлены совершенно разные упражнения. [20]

Теперь проанализируем рекомендованные федеральным перечнем учебники тех же авторов, но уже по алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов, чтобы выяснить, как в них изложен материал об ИУН и методах их решения.

2.1.3 Учебник «Алгебра и начала математического анализа, 10 класс», автор Колягин Ю. М.

Данный учебник предназначен для классов с базовым и профильным уровнем изучения математики. [16] Материал, представленный в этом учебном пособии, направлен на изучение элементарной математики: элементарных функций, многочленов, уравнений, неравенств и их систем. Первая глава данного учебника посвящена повторению изученного материала в курсе математики основной школы. Стоить отметить, что в 10 классе отсутствует знакомство с математическим анализом, комплексными числами, элементами статистики и теории вероятностей. Данный материал изучается в 11 классе.

Продолжается изучение ИУ в пятой главе «Степенная функция» в пятом параграфе. Автор даёт краткое определение ИУ и приводит примеры. Далее повествуется, что решение ИУ основано на некотором свойстве: при возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение-следствие данного, описывается данное утверждение. Также Юрий Михайлович рассматривает случай возведения обеих частей уравнения в чётную натуральную степень и говорит, что может получиться уравнение не равносильное данному, приводит пример. Затем обозначается правило равносильности уравнений: если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны на множестве X, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $(f(x))^n = \left(g(x)\right)^n$ при $n \in N$.

Параграф продолжается разбором задач, в которых приведено решение различных ИУ, так в задачах 1-3 уравнения решаются методом возведения обеих частей уравнения в натуральную степень, а уже в задаче 4 ИУ решается методом уединения радикала. В задачах 5 и 6 приводятся уравнения, которые можно решить с помощью замены. В седьмой задаче данного параграфа требуется решить систему уравнений, из которых одно уже является иррациональным, а второе путём применения формулы разности квадратов преобразуется в иррациональное. Задачи 8, 9 и 10 являются примерами повышенной сложности для более детального разбора.

Параграф заканчивается различными упражнениями как лёгкого, так и более сложного содержания, где необходимо устно и письменно решить уравнения, системы, выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнения и т.д.

Следующий шестой параграф главы «Степенная функция» стал нам также интересен, так как этот параграф посвящён ИН. Здесь автор решает сразу начать своё повествование с разбора 10 задач. После решения первой задачи автор отмечает, что в ней пришлось решать неравенство, содержащее неизвестное под знаком корня, и даёт определение ИН. В дальнейших задачах автор рассматривает решение ИН различными методами, в том числе и графическим. И только в конце своих рассуждений формулирует следующие утверждения:

1) Неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x); \end{cases}$

2) Неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Заканчивается параграф «Иррациональные неравенства» упражнениями для отработки усвоенного материала. В 74 упражнении необходимо решить систему обыкновенных неравенств. В 75-80 упражнениях нужно решить уже ИН. В упражнениях 81-82 предлагается решить неравенства графическим способом. А упражнения 83-85 – это задания повышенной сложности, которые рассчитаны на классы с углублённым изучением математики.

2.1.4 Учебник «Алгебра и начала математического анализа, 11 класс», автор Мордкович А. Г.

Отличительными особенностями учебника [21] являются доступное изложение материала, большое число подробно решённых и разобранных примеров, приоритет функционально-графической линии и появление новых тем. Также можно отметить, что данное учебное пособие соответствует ФГОС [30] и рекомендовано Министерством Просвещения РФ. [27]

В анализирующем нами учебнике материал, касающийся ИУН, представлен в последней VI главе «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств», завершающей изучение школьного курса алгебры и начал математического анализа в 11 классе.

Первые 3 параграфа данной главы посвящены обобщению и систематизации знаний, полученных во время изучения в школе уравнений и неравенств.

Формулируются следующие теоремы:

- Теоремы о равносильности уравнений;
- Теоремы о равносильности неравенств.

Рассмотрены различные причины расширения области определения уравнения, указаны случаи, при которых происходит потеря корней в решении уравнений.

Представлены и рассмотрены 4 основных метода решения уравнений:

1) замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$;
2) метод разложения на множители;
3) метод введения новых переменных;
4) функционально-графический метод.

Стоит отметить, что ИУ в данном учебном пособии уделено довольно большое внимание. На примере ИУ автор показывает, что решение любого уравнения может осуществлять в 3 этапа (технический, анализ решения, проверка).

На примере ИУ автор рассматривает такие методы решения уравнений как метод замены уравнения и метод введения новой переменной.

Отдельный пункт посвящён ИН. Рассматривается решение ИН разного вида. Если неравенство имеет вид $\sqrt{f(x)} < g(x)$, тогда оно заменяется равносильной системой неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$ Если же неравенство имеет такой вид $\sqrt{f(x)} > g(x)$, то - равносильной совокупностью систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > \left(g(x)\right)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Система задач во второй части данного учебного пособия изложена в той же последовательности, что и материал в первой части. [22] Все задачи разбиты на четыре блока, в каждом из которых встречаются ИУ.

В № 26.11 нужно решить простейшие ИУ. № 26.12, 26.13, 26.14 – 26.17 – упражнения повышенной сложности, № 28.23, 28.28 – неравенств. № 28.33 – упражнение повышенной трудности для решения ИН.

Таким образом, в ходе анализа нескольких учебников по математики из перечня рекомендованных Министерством Просвещения РФ мы выяснили, что знакомство с ИУН начинается ещё в 8 классе с темы «Иррациональное число».

Колягин М. Ю. определяет иррациональное число как бесконечную десятичную непериодическую дробь, что фактически совпадает с определением Мордковича А. Г. Но различие в линиях изучения материала между авторами все же есть: Мордкович уже в 8 классе рассматривает простейшие ИУ, когда Колягин сделает это только в учебнике за 10 класс. Это объясняется тем, что выбранное нами учебное пособие Мордковича А. Г. предназначается для классов с углублённым изучением математики. Но возвращается Александр Григорьевич к уже более сложным ИУН лишь в конце 11 класса, что может отрицательно сказаться на усвоении учащимися изучаемой темы.

Так как времени, отведённого в календарно-тематическом планировании на изучение ИУН, катастрофически мало (3 часа), а умение решать ИУН очень важно, особенно при сдаче государственной итоговой аттестации, то наиболее выгодным выходом из сложившейся проблемной ситуации будет изучение ИУН в рамках элективного курса. Именно поэтому закончить наше исследование мы решили разработкой элективного курса, посвящённого более тщательному изучению ИУН и подготавливающего учеников старших классов к успешной сдаче ЕГЭ.

2.2 Разработка элективного курса по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»

Пояснительная записка

Разработанный курс «Иррациональные уравнения и неравенства» предназначен для подготовки учеников выпускных классов. Применение описанного элективного курса позволит не только качественно подготовиться к поступлению в высшее учебное заведение, но и будет весьма полезен для учащихся средней школы. Знания, получение в ходе изучения курса, будут не только являться хорошей основой для обучения в выпускных классах, но и могут способствовать привлечению внимания учащихся, которым интересна математика.

Разработка элективного курса велась с учётом того, что основной его целью является соответствие требованиям предъявляемыми стандартами образования, способствовало повышению уровня подготовки учеников старших классов и развивало уже имеющиеся навыки учащихся. Также в результате реализации элективного курса, научатся решать ИУН различными способами.

Рабочая программа рассчитана на 17 учебных часа в год (1 час в неделю).

Цели курса:

- классифицировать знания, полученные ранее по школьному курсу математики, позволяющие решить ИУН;

- расширить представление обучающихся об ИУН путём изучения описанного материала;
- научить школьников применять теоретические знания при решении ИУН;
- повысить интерес к предмету, что в свою очередь повысить эффективность изучения алгебры;
- активизировать познавательную деятельность школьников;

В соответствии с целями можно выделить следующие *задачи курса:*

- научить школьников применять теоретические знания при решении нестандартных ИУН;
- ознакомить учащихся с различными способами решения ИУН;
- развивать коммуникативные способности школьников, умение работать в парах, группах, вести дискуссию, приводить аргументы при ответе;
- выработать навыки самостоятельной работы.

Критерии оценивания

Критерии при выставлении оценок могут быть следующие:

1. «Отлично» – учащийся освоил идеи и методы курса в полной мере; также на протяжении всего курса он показывал сознательное и ответственное отношение при изучении и решении практических заданий на занятиях курса, проявляет ярко выраженный интерес к учению; ученик самостоятельно и творчески выполнял индивидуальные и домашние задания. На протяжении всех занятий, в том числе итогового, старшеклассник демонстрировал высокий уровень понимания и усвоения материала курса, а также умело применял его на практике при решении уравнений и неравенств.
2. «Хорошо» – в течении курса ученик проявлял интерес и ответственно относился к процессу обучения, однако так и не усвоил преподаваемый материал полностью; школьник показал средний результат на итоговом тесте и справился лишь со стандартными заданиями (без проявления явных творческих способностей); прилежно выполнял на протяжении всего

курса домашние задания; возможно отметить положительную динамику, которая свидетельствует об интеллектуальном развитии и о повышении математических способностей обучающихся.

3. «Удовлетворительно» – ученик освоил самые простые идеи курса, что позволило ему справляться лишь с простыми заданиями; обучающийся проявлял не высокую степень ответственности и заинтересованности в подготовке к занятиям курса.

Планируемые результаты

Курс позволит школьникам:

- упорядочить, расширить и укрепить свои знания по изученным темам;
- уметь применять приобретённые практические навыки при решении ИУН;
- выбирать наиболее подходящий метод решения ИУН;
- научиться решать смешанные уравнения и неравенства различной сложности;
- точно и грамотно использовать теоретические положения и излагать собственные мысли в ходе выполнения заданий;
- повысить уровень заинтересованности в частности к алгебре и в общем к обучению;
- наиболее качественно подготовиться к сдаче единого государственного экзамена.

Учебно-тематический план курса можно представить в виде таблицы

Таблица 1 Учебно-тематический план курса

№ п/п	*Наименование тем*	*Количество часов*	*Форма контроля*
1.	Простейшие иррациональные уравнения.	2	Решение уравнений самостоятельно.
2.	Более сложные иррациональные уравнения.	3	Решение уравнений у доски.
3.	Нестандартные способы решения ИУ.	4	–
4.	Основные свойства и решения ИН.	2	Решение уравнений самостоятельно.
5.	Более сложные иррациональные неравенства.	4	Решение неравенств у доски.
6.	Итоговый тест.	1	Тест.
7.	Итоговое занятие.	1	Тест, беседа.
	Итого	*17*	

Содержание программы элективного курса

1. Простейшие иррациональные уравнения.

Определение ИУ. Примеры ИУ. Свойства, на котором основано решение ИУ. Область определения ИУ. Проверка корней.

Упражнения для самостоятельной работы по завершению темы:

1) Решить уравнение:

а) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+5}$; в) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+19}=0$;

б) $\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}$; г) $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$.

2) Найдите количество целых решений уравнения

$$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{25+10x+x^2}=8.$$

2. Более сложные иррациональные уравнения.

Введение подстановки других переменных. Возведение обеих частей уравнения в третью степень. Решение уравнений, содержащих корень квадратный в корне квадратном. Графическое решение уравнения.

Упражнения для работы у доски по завершению темы:

1) Решить уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$;

б) $(x + 5)(x - 2) + 3\sqrt{x(x + 3)} = 0$;

в) $\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x - 1} = 1$.

2) Решить уравнение графически:

$$x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4 - x^2}.$$

3. Нестандартные способы решения ИУ.

Использование систем уравнений при решении. Умножение и деление частей уравнения на выражения, сопряжённые знаменателям.

4. Основные свойства и решения ИН.

Область определения неравенства. Основные свойства ИН.

Упражнения для самостоятельной работы по завершению темы:

Решить неравенство:

а) $\sqrt{x^2 - 3x + 1} \geq \sqrt{3x - 4}$;

б) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$;

в) $(x - 3)\sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 9$;

г) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$.

5. Более сложные иррациональные неравенства.

Решение неравенства с помощью графика. Применение логического анализа в решении. Применение подстановки.

Упражнения для работы у доски по завершению темы:

1) Решить неравенство:

а) $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$;

б) $\sqrt{x^2 - 2x - 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 6} < 4$;

в) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{x + 3} < 2x - 1$.

2) Решить неравенство графически:

$$\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x}.$$

6. Итоговый тест. *(Приложение 1)*
7. Итоговое занятие.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наше работа начиналась с рассуждения о том, что уравнения и неравенства занимают важную часть школьного курса математики. В ходе нашего исследования мы убедились в этом на примере ИУН.

При изучении ИУН нами были выявлены основные особенности, которые необходимо учитывать при решении данных уравнений и неравенств. Как правило, чёткого алгоритма решения ИУН не существует, поэтому сначала необходимо тщательно проанализировать ход решения, определить вид представленного уравнения или неравенства, и только после этого переходить непосредственно к оформлению решения и подсчётам.

Также важно сказать, что в зависимости от произведённых преобразований в ИУН могут появляться посторонние корни или же произойти потеря корней.

Проверка найденных корней путём подставки будет необходима в том случае, если при помощи допустимых преобразований, исходное уравнение было заменено неравносильным следствием. В результате описанных действий возможно появление «лишних» корней.

Для того, чтобы избежать потерю или приобретение посторонних корней – необходимо производить такие преобразования, которые будут равносильны исходному. В таком случае проверка будет не нужна.

После изучения теоретических основ, учебники из федерального перечня по данной тематике и рассмотреть представленные методики решения ИУН. В ходе изучения школьной литературы мы выяснили, что знакомство с ИУН начинается ещё в 8 классе с темы «Иррациональное число» и продолжается вплоть до конца 11 класса. В выбранных нами учебных пособиях авторы фактически одинаково определяют ИУН и рассматривают лишь основные методы их решения, такие как возведение обеих частей уравнения в натуральную степень и введение новой переменной. Возможно, знание лишь этих методов будет достаточно для ученика класса с базовым уровнем изучения математики, но для обучающихся, которые хотят знать больше, участвовать в олимпиадах и решать задания повышенной сложности, в том числе и при сдаче единого государственного экзамена, данного материала будет недостаточно. Недостаточно и времени, выделяемого на уроках в учебно-тематическом планировании, на изучение ИУН.

Важно отметить, что каждая разновидность уравнений такого вида требует большое количество сил и времени для полного усвоения и верного решения. Так как умение решать ИУН важно и нужно, то наиболее выгодным, на наш взгляд, выходом из сложившейся проблемной ситуации будет изучение ИУН в рамках элективного курса. Именно поэтому мы решили закончить выпускную квалификационную работу разработкой элективного курса «Иррациональные уравнения и неравенства». Курс предназначен для учащихся 10-11 классов, но может с успехом быть адаптирован для обучающихся 9 классов. Основные цели курса:

- систематизировать ранее полученные знания по математике;
- научить школьников применять теоретические знания при решении ИУН.

Рабочая программа рассчитана на 17 учебных часа в год. За это время ученики осваивают решение простых и более сложных ИУН.

Элективный курс заканчивается итоговой аттестацией, на которой ученики должны продемонстрировать уровень усвоения представленного материала и получить соответствующую оценку своим знаниям.

После изучения учебно-методической литературы по теме исследования, мы подобрали теоретический материал, связанный с равносильностью уравнений и неравенств, методами решения ИУН, и отразили его в первой главе «Теоретические основы решения иррациональных уравнений и неравенств» выпускной квалификационной работы.

Для того, чтобы наглядно продемонстрировать теоретические основы, описанные в работе, были отобраны уравнения и неравенства, которые были решены описанными способами. Во второй главе нашей работы мы провели анализ актуальной литературы по алгебре и началам математического анализа и разработали соответствующий стандартам образования элективный курс «Иррациональные уравнения и неравенства».

В заключении выпускной квалификационной работы, можно отметить, что задачи, поставленные в начале работы выполнены в полном объёме, что привело нас к осуществлению поставленной цели. В ходе исследования нам довелось: изучить теоретический материал по направлению и разработать методику обучения решению ИУН в школьном курсе математики.

На наш взгляд, разработанный нами элективный курс будет полезной методикой обучения решению ИУН, а также будет повышать уровень знаний по математике у старшеклассников, их мотивацию к обучению, и возможно, поможет успешно сдать государственную итоговую аттестацию.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдрахманова, Т. Р. Элективный курс «Иррациональные уравнения и неравенства 10 класс» [Электронный ресурс]/ Т. Р. Абдурахманова. – Режим доступа: https://infourok.ru/elektivniy-kurs-irracionalnie-uravneniya-i-neravenstva-klass-531352.html. – Дата обращения 14.04.2019г.

2. Атанасян, С. Л. Элективные курсы по математике и организация самостоятельной деятельности учащихся [Текст]/ Л.С. Атанасян, Н.Н. Кузуб// Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. – 2014. – №4. – с. 150-156.

3. Васькова, И.Д. Организация элективных курсов [Электронный ресурс]/ И.Д. Васькова. – Режим доступа: https://portalpedagoga.ru/servisy/publik/publ?id=10247. – Дата доступа: 16.03.2019г.

4. Виленкин, Н. Я. Алгебра и математический анализ для 11 класса [Текст] / учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики / Н. Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1998. – 288 с.

5. Воронина, Г.А. Элективные курсы: общие подходы к конструированию [Текст]/ Г.А. Воронина. – Биология: Прил. к газ. «ПС», 2006. – №16. – С.2-5.

6. Горнштейн, П. И. Экзамен по математике и его подводные рифы [Текст] / П. И. Горнштейн. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998, – 236 с.

7. Григорьев, А. М. Иррациональные уравнения [Текст] / А. М. Григорьев. // Квант. – 1972. – №1. – С. 46-49.

8. Демоверсии, спецификации, кодификаторы ЕГЭ 2019г.: [Электронный ресурс]/ Федеральный институт педагогических измерений: М., 2004-2019. – Режим доступа: http://fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory. – Дата обращения: 1.05.2019г.

9. Денищева, Л. О. Готовимся к единому государственному экзамену. Математика. [Текст] / Л. О. Денищева. – М.: Дрофа, 2004. – 120 с.

10. Егоров, А. Иррациональные уравнения [Текст] / А. Егоров. // Математика. Первое сентября – 2002. – №5. – С. 9-13.

11. Егоров, А. Иррациональные неравенства [Текст] / А. Егоров. // Математика. Первое сентября. – 2002. – №15. – С. 13-14.

12. Егоров, А. Иррациональные неравенства [Текст] / А Егоров. // Математика. Первое сентября. – 2002. – №17. – С. 13-14.

13. Зубова, М. Н. Программа элективного курса по математике «Иррациональные уравнения и неравенства» [Электронный ресурс]/ М. Н. Зубова – Библиотека материалов для работников школы «ПЕДПОРТАЛ», 2015. – Режим доступа: https://pedportal.net/starshie-klassy/algebra/elektivnyy-kurs-quot-irracionalnye-uravneniya-i-neravenstva-quot-395525. – Дата обращения: 16.04.2019г.

14. Красновская, И. В. Рабочая программа элективного курса «Иррациональные уравнения и неравенства» [Электронный ресурс]/ И. В. Красновская. – Режим доступа: https://doc4web.ru/matematika/programma-elektivnogo-kursa-po-matematike-irracionalnie-uravneni.html. – Дата обращения: 16.04.2019г.

15. Колягин, Ю. М. Алгебра. 8 класс [Текст] / учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2013. – 336 с.

16. Колягин, Ю. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс [Текст] / учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 368 с.

17. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года [Текст]// Нормативные документы в образовании. – 2003. – с. 2-21.

18. Мерзляк, А. Г. Алгебраический тренажёр [Текст] / пособие для школьников и абитуриентов / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 320 с.

19. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс [Текст] / в двух частях. Ч.1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – 10-е изд. – М.: Мнемозина, 2013. – 256 с.

20. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс [Текст] / в двух частях. Ч.2: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, Л. А. Александрова. – 11-е изд. – М.: Мнемозина, 2013. – 344 с.

21. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс [Текст] / в двух частях. Ч.1: учебник для учащихся общеобразовательных организаций: базовый и углублённый уровни / А. Г. Мордкович, П. В. Семёнов. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.

22. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс [Текст] / в двух частях. Ч.2: задачник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2009. – 315 с.

23. Мордкович, А. Г. Кто-то теряет, кто-то находит [Текст] / А. Г. Мордкович. // Квант – 1970. – №5. – С. 48-51.

24. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Сдам ГИА» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://sdamgia.ru. – Дата обращения: 12.04.2019г.

25. Письмо Министерства образования Российской Федерации (Минобразование России) «Элективные курсы в профильном обучении»/ Департамент общего и дошкольного образования №14-51-277/13 от 13.11.2003г.

26. Потапов, М. Как решать уравнения без ОДЗ [Текст] / М. Потапов. // Математика. Первое сентября – 2003. – №21. – С. 42-43.

27. Приказ Министерства Просвещения РФ №345 от 28.12.2018г. «О федеральном перечне учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования».

28. Регламентирующие документы: [Электронный ресурс]/ Федеральный институт педагогических измерений: М., 2004-2019. – Режим доступа: http://fipi.ru/ege-i-gve-11/normativno-pravovye-dokumenty. – Дата обращения: 1.05.2019г.

29. Сачкова, Л.А. Информационно-методическое сопровождение инновационной деятельности педагогов в муниципальной системе образования [Текст]/ Л.А. Сачкова. – Нижний Новгород, 2011. – с. 315.

30. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (утв. Приказом Министерства образования и науки РФ №1897 от 17.12. 2010г.).

31. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (утв. Приказом Министерства образования и науки РФ №413 от 17.05. 2012г.).

32. Шарова, Л. И. Уравнения и неравенства [Текст] / пособие для подготовительных отделений / Л. И. Шарова. – Киев: Вища школа, 1981. – 280 с.

33. Шувалова, Э. З. Повторим математику [Текст] / учебное пособие для поступающих в вузы / Э. З. Шувалова. – М.: Высшая школа, 1974. – 519 с.

34. Шахмейстер, А. Х. Иррациональные уравнения и неравенства [Текст] / пособие для школьников, абитуриентов и преподавателей / А. Х. Шахмейстер. – 4-е изд. – СПб.: Петроглиф: Виктория плюс; М.: МЦНМО, 2011. – 216 с.

35. Черкасов, О. Ю. Математика [Текст] / справочник для старшеклассников и поступающих в вузы / О. Ю. Черкасов. – М.: АСТ-ПРЕСС, 2001. – 576 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

Итоговая аттестация (Итоговый тест)

Ученика (цы) ____ 10 класса «___»

«Иррациональные уравнения и неравенства»

Вариант 1

1. Дать определение «*Равносильные уравнения*».

____

____

____

2. Дать определение «*Следствие неравенства*».

____

____

____

3. Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}.$$

4. Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{1+4x-x^2}=x-1.$$

5. Решить иррациональное неравенство:

$$\sqrt{x^2-3x+1}\geq\sqrt{3x-4}.$$

6. Решить иррациональное неравенство:

$$(x-3)\sqrt{x^2+4}\leq x^2-9.$$

7. Решить смешанное уравнение:

$$\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{x-1}\right)^{x+3}=\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{x+3}}.$$

Итоговая аттестация (Итоговый тест)

Ученика (цы) ____ 10 класса «___»

«Иррациональные уравнения и неравенства»

Вариант 2

1. Дать определение «Равносильные неравенства».

____

____

____

2. Дать определение «Следствие уравнения».

____

____

____

3. Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=\sqrt{6}.$$

4. Решить иррациональное уравнение:

$$(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+2x-5)=x.$$

5. Решить иррациональное неравенство:

$$\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1.$$

6. Решить иррациональное неравенство:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}\leq\sqrt{x-3}.$$

7. Решить смешанное уравнение:

$$\sqrt{4-3\sin x}=-2\cos x.$$

Ключ к итоговому тесту.

№ п/п	Вариант 1	Вариант 2
1.	*Два уравнения являются равносильными (эквивалентными), если множество всех корней первого уравнения совпадает с множеством всех корней второго уравнения.*	*Два неравенства называются равносильными (эквивалентными), если множество решений первого неравенства совпадает с множеством решений второго неравенства.*
2.	*Если множество решений неравенства одного уравнения содержит множество решений второго неравенства, то первое неравенство называется следствием второго неравенства.*	*Если множество корней уравнения одного уравнения содержит множество корней второго уравнения, то первое уравнение называется следствием второго уравнения.*
3.	$x = -4$	$x = 2$
4.	$x = 3$	$x = 2$
5.	$x \in [5;+\infty)$	$x \in \left[\frac{5}{2}; 3\right)$
6.	$x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$	$x \in \emptyset$
7.	$x = \{-3; 0{,}6\}$	$x = \left\{\pi + 2\pi k, -\arcsin\frac{3}{4} + \pi(2k+1), k \in Z\right\}$