ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
01.03.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001413
Бабалао Фолакэ Рашель

Научный руководитель
д. ф. - м. н., профессор,
Васильев В.Б.

Белгород 2018

Оглавление

Введение

Преобразование Фурье вычисляется каждый раз, когда мы слышим звук. Ухо автоматически вычисляет, то-что наш сознательный ум может делать только после нескольких лет изучения математики. Наш слуховой орган строит трансформацию, представляющую звук как вибрационное движение частиц упругой среды, распространяющуюся в виде волн в газообразных, жидких или твердых средах - в виде спектра последовательных значений громкости для разных высот тонов. Мозг преобразует эту информацию в воспринимаемый звук.

В математике дискретное преобразование Фурье преобразует конечную последовательность эквидистантных выборок функции в последовательность с одинаковой длиной эквидистантных выборок преобразования Фурье с дискретным временем, которая является комплекснозначной функцией частоты.

Подобные операции могут быть выполнены с использованием математических методов звуковых волн или практически любого другого колебательного процесса - от световых волн и океанских приливов до циклов солнечной активности. Используя эти математические методы, вы можете разложить функции, представляя колебательные процессы в виде набора синусоидальных составляющих - волнообразные кривые, переходящие от максимума к минимуму, а затем обратно к максимуму, как океанская волна.

Преобразование Фурье стало мощным инструментом, используемым в различных научных областях. В некоторых случаях его можно использовать как средство решения сложных уравнений, описывающих динамические процессы, происходящие под воздействием электрической, тепловой или световой энергии. В других случаях он позволяет изолировать регулярные компоненты в сложном вибрационном сигнале, так что можно правильно интерпретировать экспериментальные наблюдения в астрономии, медицине и химии.

Французский математик Жан Батист Джозеф Фурье, чье имя называлось преобразованием, первым человеком сказал об этом методе в мире. В 1789 году он получил уравнение, описывающее распространение тепла в твердом теле. В 1807 году Фурье изобрёл и метод решения этого уравнения: преобразование Фурье.

Преобразование Фурье используется во многих областях науки - в области физики, теории чисел, комбинаторики, теории вероятностей, статистики, акустики, океанологии, оптики, геометрии и многих других.

Благодаря широкому применению метода Фурье и аналогичных аналитических методов мы можем теперь правильно повторить то, что сказал Лорд Кельвин в 1867 году: «Теорема Фурье - это не только один из самых элегантных результатов современного анализа, но он также дает нам незаменимый инструмент в изучении самых сложных проблем современной физики.»

Цель исследования является изучением преобразования Фурье, его свойства и теорем с целю определения применения этого преобразование в области математики и физики.

Задачи нашего исследования есть:

1. Изучить научную литературу, касающуюся темы исследования.
2. Определить преобразование Фурье и ряды Фурье.
3. Определить что такой дискретное преобразование Фурье, его основные свойства а также проводить примеры преобразований Фурье
4. Составить примеры применения преобразования Фурье в разных областях математики и физики

Предмет исследования: Современные научные книги и статья о дискретном преобразовании Фурье.

Объект исследования: Применение дискретного преобразования Фурье для решения задач математической физики и для решения интегральных уравнений. В первой главе мы будем рассматривать понятие и основные свойства интегрального преобразования Фурье, а также свертка функций и примеры преобразований Фурье. Во второй главе мы будем определить применения дискретного преобразования Фурье к решению задач математической физики и к решению интегральных уравнений. Окончательно, мы будем рассматривать ряды Фурье и дискретное преобразование Фурье.

Глава 1

1.1 Определение и основные свойства интегрального преобразования Фурье

Преобразование Фурье (символ $\mathscr{F}$) является операцией, которая связывает функцию действительной переменной с другой функцией действительной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты («амплитуды») при разложении исходной функции на элементарные компоненты - гармонические колебания с разными частотами (так же, как музыкальный аккорд может быть выражен как сумма музыкальных звуков, которые его составляют).

Преобразование Фурье функции f вещественной переменной является интегральным и задаётся следующей формулой:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

Определение 1. Функция

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \qquad (1.1.1)$$

Называется *преобразованием Фурье* функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Интеграл здесь понимается в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

и считается что он существует.

Если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, то, поскольку $\left|f(x)e^{-i\xi x}\right| = |f(x)|$ при $x, \xi \in \mathbb{R}$, для любой такой функции имеет смысл преобразование Фурье (1.1.1), причем интеграл (1.1.1) сходится абсолютно и равномерно по ξ на всей прямой $\mathbb{R}$.

Определение 2. Если $c(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$ – преобразование Фурье функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, то сопоставляемый f интеграл

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi \qquad (1.1.2)$$

понимаемый в смысле главного значения, называется *интегралом Фурье функции* f.

Определение 3. Понимаемые в смысле главного значения интегралы

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x \, dx, \qquad (1.1.3)$$

$$\mathcal{F}_s[f](\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x \, dx, \qquad (1.1.4)$$

Называются соответственно *косинус-* и *синус-преобразованиями Фурье функции* f.

Полагая $c(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$, $a(\xi) = \mathcal{F}_c[f](\xi)$, $b(\xi) = \mathcal{F}_s[f](\xi)$, получаем отчасти уже знакомое нам по рядам Фурье соотношение

$$c(\xi) = \frac{1}{2}\big(a(\xi) - ib(\xi)\big). \qquad (1.1.5)$$

Как видно из соотношений (3), (4),

$$a(-\xi) = a(\xi), b(-\xi) = -b(\xi). \qquad (1.1.6)$$

Формулы (1.1.5), (1.1.6) показывают, что преобразования Фурье вполне определяются на всей прямой $\mathbb{R}$, если они известны лишь для неотрицательных значений аргумента.

Различные источники могут давать определения, которые отличаются от вышеприведенного выбором коэффициента перед интегралом, а также знак

«-» в экспоненты. Но все свойства будут одинаковыми, хотя форма некоторых формул может измениться.

Прежде чем развивать теорию дальше, давайте вычислим три основных примера преобразований Фурье.

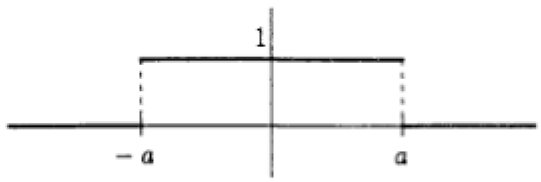

Рис. а. График функции X_a

Пример1. Пусть X_a-функция, изображенная на рисунке а:

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < a \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда

$$\hat{\chi}_a(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} = 2\frac{sina\xi}{\xi}$$

Пример 2. Пусть функция

$$f(x) = e^{-ax^2/2}$$

где $a>0$

Мы наблюдаем, что ***f*** удовлетворяет дифференциальное уравнение

$$f'(x) + axf(x) = 0$$

Если применить преобразование Фурье к этому уравнению, получаем

$$i\xi\hat{f}(\xi) + ia[\hat{f}]'(\xi) = 0$$

или,

$$[\hat{f}]'(\xi) + a^{-1}\xi\hat{f}(\xi) = 0$$

Это дифференциальное уравнение для $\hat{f}$ легко решается:

$$\frac{[\hat{f}]'(\xi)}{\hat{f}(\xi)} = -\frac{\xi}{a} \Rightarrow log\hat{f}(\xi) = -\frac{\xi^2}{2a} + logC \Rightarrow \hat{f}(\xi) = Ce^{-\xi^2/2a}$$

Для оценки константы C мы устанавливаем ξ = 0

$$C = f(0) = \int f(x)dx = \int e^{-ax^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{a}}\int e^{-y^2}dy = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

Поэтому,

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{ax^2}{2}}\right] = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\xi^2/2a}$$

(Аккуратный вывод этого результата с использованием контурных интегралов набросан в примере 1)

Пример 3. Пусть функция

$$f(x) = (x^2 + a^2)^{-1}$$

Где a > 0

Мы должны посчитать $\hat{f}$ здесь по контурной интеграции, еще один вывод. Если $\xi < 0$, $e^{-i\xi z}$-ограниченная аналитическая функция z в верхней полуплоскости. Поэтому, применяя теорема вычетов на контуре на рис.b и пусть N →∞, получим

$$\hat{f}(\xi) = \int \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2}dx = 2\pi i Res_{z=i}\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2 + a^2)} = 2\pi i\frac{e^{a\xi}}{2ia} = \frac{\pi}{a}e^{a\xi} \quad (\xi < 0)$$

Аналогично, если $\xi > 0$, мы можем интегрировать вокруг нижней полуплоскости, чтобы получить

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a\xi}$$

Конечно, для $\xi = 0$

$$f(0) = \int f(x)dx = \pi/a$$

Заключения:

$$\mathcal{F}[(x^2 + a^2)^{-1}] = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$$

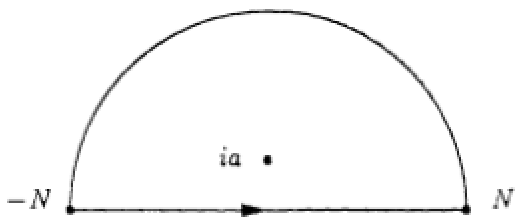

Рис.b Контур примера 3

Мораль здесь, как и в теории рядов Фурье, что чем более гладкий f, чем быстрее $\hat{f}$ распадается на безграничности, и наоборот.

Приведенные выше примеры иллюстрируют этот принцип. Функция примера 1 исчезает из конечного интервала, но не является непрерывной: ее преобразование Фурье аналитическое, но уменьшается только в виде $1/\xi$ до бесконечности. Функция примера 3 гладкая, но медленно убывается: ее преобразование Фурье быстро убывает, но не дифференцируется при $\xi = 0$. Функция примера 2 есть одновременно гладкость и распад, она по существу, его собственное преобразование Фурье.

Кроме того, существуют разнообразные обобщения данного понятия

Свойства

Хотя формула преобразования Фурье имеет четкое значение только для функций класса $L_1(\mathbb{R})$, преобразование Фурье также может быть определено для более широкого класса функций и даже обобщенных функций. Это возможно благодаря определенному числу свойств преобразования Фурье:

- Преобразование Фурье является линейным оператором:

$$\left(\widehat{\alpha f+\beta g}\right)=\alpha\hat{f}+\beta\hat{g}$$

- Справедливо равенство Парсеваля: если $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье сохраняет L_2-норму:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2d\omega$$

Это свойство позволяет по непрерывности распространить определение преобразования Фурье на всё пространство $L_2(\mathbb{R})$. Равенство Парсеваля будет при этом справедливо для всех $f \in L_2(\mathbb{R})$.

- *Формула обращения*:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega$$

справедлива, если интеграл в правой части имеет смысл. В частности, это верно, если функция $\boldsymbol{f}$ достаточно гладкая. Если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то формула также верна, так как равенство Парсеваля позволяет дать смысл правой части интеграла с предельным переходом.

Эта формула объясняет физический смысл преобразования Фурье: правая часть — (бесконечная) сумма гармонических колебаний $e^{ix\omega}$ с частотами ω, амплитудами $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(\omega)$ и фазовыми сдвигами $\hat{f}(\omega)$ соответственно.

- *Теорема о свёртке*: если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, тогда

$$\left(\widehat{f*g}\right)=\sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}, \text{ где}$$

$$(f *)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$$

Эта формула может быть распространена и на случай обобщённых функций.

- *Преобразование Фурье и дифференцирование*. Если $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\left(\widehat{f'}\right) = i\omega f$$

Из этой формулы легко выводится формула для **n**-й производной:

$$\left(\widehat{f^{(n)}}\right) = (i\omega)^n \hat{f}$$

Формулы верны и в случае обобщённых функций.

- *Преобразование Фурье и сдвиг*.

$$f(x - x_0) = e^{-i\omega x_0}\hat{f}(\omega)$$

Эта и предыдущая формула являются частными случаями теоремы о свёртке, так как сдвиг по аргументу — это свёртка со сдвинутой дельта-функцией $\delta(x - x_0)$, а дифференцирование — свёртка с производной дельта-функции.

- *Преобразование Фурье и растяжение*.

$$\widehat{f(ax)} = |a|^{-1} f(\frac{\omega}{a})$$

- *Преобразование Фурье обобщённых функций*.

Преобразование Фурье может быть определено для широкого класса обобщенных функций. Сначала определим пространство гладких функций быстрого распада (пространство Шварца):

$$S(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \colon \forall n, m \in \mathbb{N}\ x^n \varphi^{(m)}(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty\right\}$$

Ключевое свойство этого пространства состоит в том, что оно является инвариантным подпространством относительно преобразования Фурье.

Теперь определим его двойственное пространство $S^*(\mathbb{R})$. Это некоторое подпространство в пространстве всех обобщённых функций — так называемые обобщённые функции медленного роста. Теперь для функции $f \in S^*(\mathbb{R})$. её преобразованием Фурье называется обобщённая функция $\hat{f} \in S^*(\mathbb{R})$. , действующая на основные функции по правилу

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$$

Например, вычислим преобразование Фурье дельта-функции:

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \langle \delta, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot 1 dx = \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi \rangle$$

Таким образом, преобразованием Фурье дельта-функции является константа $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

1.	$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
2.	$f(x-c)$	$e^{-ic\xi}\hat{f}(\xi)$
3.	$e^{icx}f(x)$	$\hat{f}(\xi-c)$
4.	$f(ax)$	$a^{-1}\hat{f}(a^{-1}\xi)$
5.	$f'(x)$	$i\xi\hat{f}(\xi)$
6.	$xf(x)$	$i(\hat{f})'(\xi)$
7.	$(f*g)(x)$	$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
8.	$f(x)g(x)$	$(2\pi)^{-1}(\hat{f}*\hat{g})(\xi)$
9.	$e^{-ax^2/2}$	$\sqrt{2\pi/a}\,e^{-\xi^2/2a}$
10.	$(x^2+a^2)^{-1}$	$(\pi/a)e^{-a\lvert\xi\rvert}$
11.	$e^{-a\lvert x\rvert}$	$2a(\xi^2+a^2)^{-1}$
12.	$\chi_a(x)=\begin{cases}1 & (\lvert x\rvert<a)\\ 0 & (\lvert x\rvert>a)\end{cases}$	$2\xi^{-1}\sin a\xi$
13.	$x^{-1}\sin ax$	$\pi\chi_a(\xi)=\begin{cases}\pi & (\lvert\xi\rvert<a)\\ 0 & (\lvert\xi\rvert>a)\end{cases}$

Таблица. Основные преобразования Фурье

1.2 Свертка функций и преобразование Фурье

Свертка (взаимная свертка) – интегральная операция получения новой функции по двум исходным.

$$Sv_{1,2}(x.y) = s_1 \otimes s_2(x,y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} s_1(u,v)s_2(x-u,y-v)dudv$$

где $s_1(x,y)$,$s_2(x,y)$- исходные функции;

u,v – переменные интегрирования;

x,y – аргументы взаимной свертки, характеризующие некоторый сдвиг.

Сделаем замену переменной $x-u=u', y-V=V'$, и поменяем порядок интегрирования. Тогда выражение приводится к виду:

$$S_{v_{12}}(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(u, V) e^{-i2\pi(v_x u + v_y V)}\, dudV \times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_2(u', V') e^{-i2\pi(v_x u' + v_y V')} du'dV' = \tilde{s}_1(v_x, v_y)\tilde{s}_2(v_x, v_y) \quad ,$$

т.е. Фурье-образ взаимной свертки равен произведению Фурье-образов свертываемых функций.

Отсюда для свертки двух одинаковых функций (автосвертки) имеем:

$$S_{v_s}(v_x, v_y) = AS_v(v_x, v_y) = \left[\tilde{s}(v_x, v_y)\right]^2$$

1.3 Примеры преобразований Фурье

Пример 1. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x \end{bmatrix}$$

Заданная функция абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{1}^{2} dx = 1 < \infty$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = \int_{1}^{2} e^{-i\xi x}\, dx = \frac{i \cdot (e^{-2i\xi} - e^{-i\xi})}{\xi},$$

То

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{i \cdot (e^{-2i\xi} - e^{-i\xi})}{2\pi\xi}.$$

Пример 2. Найти косинус - и синус - преобразования Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$$

Как показано в примере 1, заданная функция абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$.

Найдем ее косинус - преобразование Фурье по формуле (3):

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos(\xi \cdot x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{1}^{2} \cos(\xi \cdot x)\, dx = \frac{\sin(2 \cdot \xi) - \sin(\xi)}{\pi \cdot \xi}.$$

Аналогично, нетрудно найти синус – преобразование Фурье функции $f(x)$ по формуле (4):

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sin(\xi \cdot x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{1}^{2} \sin(\xi \cdot x)\, dx = \frac{\cos(\xi) - \cos(2 \cdot \xi)}{\pi \cdot \xi}.$$

Используя примеры 1 и 2, нетрудно непосредственной подстановкой убедиться, что для $f(x)$ выполняется соотношение (5).

Если функция f вещественнозначна, то из формул (5), (6) в этом случае следует

$$c(-\xi) = \overline{c(\xi)}, \tag{7}$$

Поскольку в этом случае $a(\xi)$ и $b(\xi)$ – вещественные функции на R, что видно из их определений (3), (4). Впрочем, равенство (7) при условии $\overline{f(x)} = f(x)$ получается и непосредственно из определения (1) преобразования Фурье, если учесть, что знак сопряжения можно вносить под знак интеграла. Последние наблюдение позволяет заключить, что для любой функции $f: R \to \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\mathcal{F}[f](-\xi) = \overline{\mathcal{F}[f](\xi)}, \tag{8}$$

Полезно также заметить, что если f – вещественная и четная функция, т.е. $\overline{f(x)} = f(x) = f(-x)$, то

$$\overline{\mathcal{F}_c[f](\xi)} = \mathcal{F}_c[f](\xi), \mathcal{F}_s[f](\xi) \equiv 0,$$
$$\overline{\mathcal{F}[f](\xi)} = \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi); \tag{9}$$

если f – вещественная и нечетная функция, т.е. $\overline{f(x)} = f(x) = -f(-x)$, то

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) \equiv 0, \overline{\mathcal{F}_s[f](\xi)} = \mathcal{F}[f](\xi)$$
$$\overline{\mathcal{F}[f](\xi)} = -\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi) \tag{10}$$

а если f – чисто мнимая функция, т.е. . $\overline{f(x)} = -f(x)$, то

$$\mathcal{F}[f](-\xi) = -\overline{\mathcal{F}[f](\xi)}. \tag{11}$$

Заметим что если f – вещественнозначная функция, то интеграл Фурье можно записать также в виде

$$\int_0^\infty \sqrt{a^2(\xi) + b^2(\xi)} \cos(x\xi + \varphi(\xi))\, d\xi = 2\int_0^\infty |c(\xi)| \cos(x\xi + \varphi(\xi))\, d\xi,$$

где

$$\varphi(\xi) = -\operatorname{arctg}\frac{b(\xi)}{a(\xi)} = \arg c\,(\xi).$$

Пример 3. Найдем преобразование Фурье функции $f(t) = \frac{\sin at}{t}$ (считая $f(0) = a \in \mathbb{R}$)

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \frac{\sin at}{t} e^{-i\alpha t}\, dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \frac{\sin at \cos \alpha t}{t}\, dt =$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at \cos \alpha t}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(a+\alpha)t}{t} + \frac{\sin(a-\alpha)t}{t} \right) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}(sgn(a+\alpha)+sgn(a-\alpha)]\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{если } |\alpha|\le|a|,\\ 0, & \text{если } |\alpha|>|a|,\end{cases}$$

поскольку нам известно значение интеграла Дирихле

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Рассмотренная в примере функция f не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ и её преобразование Фурье имеет разрывы. О том, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций не имеет разрывов, говорит следующая

Пример 4. Найдем преобразование Фурье функции $f(t)=e^{-t^2/2}$:

$$\mathcal{F}[f](\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}e^{-i\alpha t}\,dt=\int\limits_{-A}^{A}e^{-t^2/2}\cos\alpha t\,dt.$$

Дифференцируя последний интеграл по параметру α и интегрируя затем по частям, находим, что

$$\frac{d\mathcal{F}[f]}{d\alpha}(\alpha)+\frac{\alpha}{2}\mathcal{F}[f](\alpha)=0,$$

или

$$\frac{d}{d\alpha}\ln\mathcal{F}[f](\alpha)=-\frac{\alpha}{2}.$$

Значит, $\mathcal{F}[f](\alpha)=ce^{-\alpha^2/2}$, где c – постоянная, которую, пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона находим из соотношения

$$c=\mathcal{F}[f](0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi}.$$

Итак, мы нашли, что $\mathcal{F}_c[f](\alpha)=\sqrt{2\pi}e^{-\alpha^2/2}$, и одновременно показали, что $\mathcal{F}_c[f](\alpha)=\sqrt{2\pi}e^{-\alpha^2/2}$, а $\mathcal{F}_s[f](\alpha)\equiv 0$.

Пример 5. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если

$$f(x) = \left[\begin{array}{cc} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{array}\right.$$

Данная функция $f(x)$ является нечетной и непрерывной на $\mathbb{R}$, кроме точек $x = -1, x = 0, x = 1$.

В силу нечетности и вещественности функции $f(x)$ имеем:

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) = 0 \ ,$$

и из равенств (5) и (10) следует, что

$$c(\xi) = -\frac{i}{2} \cdot b(\xi) = -\frac{i}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \sin(\xi \cdot y)\, dy =$$

$$= -\frac{i}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^1 \sin(\xi \cdot y)\, dy \quad = \frac{i \cdot \cos(\xi \cdot y)}{\pi \cdot \xi} \Big|_0^1 = \frac{i \cdot (\cos(\xi) - 1)}{\pi \cdot \xi}.$$

В точках непрерывности функции f имеем:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\xi) \cdot e^{i\xi x}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \cdot (\cos(\xi) - 1)}{\xi} \cdot (\cos(\xi \cdot x)) + i \cdot \sin(\xi \cdot x))d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(\xi))}{\xi} \cdot \sin(\xi \cdot x)\, d\xi + i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos(\xi) - 1)}{\xi} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos(\xi \cdot x)\, d\xi \right\}.$$

Но функция $g(\xi) = \frac{(\cos(\xi) - 1)}{\xi} \cdot \cos(\xi \cdot x)$ – нечетная, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos(\xi) - 1)}{\xi} \cdot \cos(\xi \cdot x)\, d\xi = 0\,,$$

так как интеграл вычисляется в смысле главного значения.

Функция $h(\xi) = \frac{(1-\cos(\xi))}{\xi} \cdot \sin(\xi \cdot x)$ – четная, поэтому

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(\xi))}{\xi} \cdot \sin(\xi \cdot x)\, d\xi\,,$$

если $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$. При $x = 1$ должно выполняться равенство

$$\frac{f(1-0) + f(1+0)}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(\xi))}{\xi} \cdot \sin(\xi)\, d\xi.$$

Полагая $\xi = 2t$, отсюда находим

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^3 t \cos t}{t} dt = \frac{\pi}{16}.$$

Если в последнем выражении для $f(x)$ положить $x = ½$, то

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(\xi))}{\xi} \cdot \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi\,.$$

Полагая здесь $\xi = 2t$, найдем

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Если вещественнозначная функция $f(x)$ кусочно непрерывна на любом отрезке действительной прямой, абсолютно интегрируема на R и имеет конечные односторонние производные в каждой точке $x \in R$, то в точках непрерывности f она представляется как интеграл от Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \qquad (13.1)$$

а в точках разрыва функции f левую часть равенства (13.1) следует заменить на

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на R функция f имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные, то в случае, когда это функция является четной, справедливо равенство

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy, \qquad (13.2)$$

где

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \qquad (13.2')$$

а в случае, когда f - нечетная функция, выполняется равенство

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} b(y)\sin xy\,dy, \qquad (13.3)$$

где

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt, \qquad (13.3')$$

Пример 5’. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если:

$$f(x) = e^{-a|x|}, a > 0;$$

Так как f - непрерывная на R четная функция, то, используя формулы (13.2), (13.2'), имеем

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos yt\,dt = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+y^2)},$$

$$e^{-\alpha|x|} = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos yx}{\alpha^2+y^2}dy, \qquad x \in R.$$

Обозначим символом $F[\varphi]$ понимаемый в смысле главного значения интеграл

$$F[\varphi](x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi. \qquad (14)$$

Пример 6. Пусть $a > 0$ и

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x \le 0; \end{cases}$$

тогда

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ax}e^{-ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{a+i\xi}.$$

Заметим, что если $f_-(x) = f(-x)$, то при любой функции f

$$\mathcal{F}[f_-](\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}\,dx = \mathcal{F}[f](-\xi).$$

Возьмем теперь функцию $e^{-a|x|} = \varphi(x) = f(x) + f(-x)$. Тогда

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) + \mathcal{F}[f](-\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\xi^2}.$$

Если же взять функцию $\psi(x) = f(x) - f(-x)$, являющуюся нечетным продолжением функции $e^{-ax}, x > 0$, на всю числовую ось, то

$$\mathcal{F}[\psi](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) - \mathcal{F}[f](-\xi) = -\frac{i}{\pi}\frac{\xi}{a^2 + \xi^2}$$

Используя теорему 1, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{a + i\xi}d\xi = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{если } x > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ae^{ix\xi}}{a^2 + \xi^2}d\xi = e^{-a|x|},$$

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi e^{ix\xi}}{a^2 + \xi^2}d\xi = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -e^{ax}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Все интегралы здесь понимаются в смысле главного значения

Отделяя в двух последних интегралах действительные и мнимые части, находим интегралы Лапласа

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\xi}{a^2 + \xi^2}d\xi = \frac{\pi}{2a}e^{-a|x|},$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\xi \sin x\xi}{a^2 + \xi^2}d\xi = \frac{\pi}{2a}e^{-a|x|}\operatorname{sgn} x.$$

Глава 2.

Преобразование Фурье - полезный инструмент для анализа различных проблем математики и физических наук. Основная часть этих приложений является следующим основным фактом.

Предположим, что L является линейным оператором для функций на R, коммутирующих с переводами: то есть, если $L[f(x)] = g(x)$, то $L[f(x+s)] = g(x+s)$ для любого s принадлежащей R.

Тогда любая экспоненциальная функция e^{ax} ($a \in \mathrm{C}$), которая принадлежит к области L есть собственной функцией L.

Доказательство этого очень простое: Пусть $f(x) = e^{ax}$ и $g = L[f]$. Тогда для любого $s \in R$

$$g(x+s) = L\left[e^{a(x+s)}\right] = L[e^{as}e^{ax}] = e^{as}L[e^{ax}] = e^{as}g(x)$$

Установляясь x=0 мы находим ,что $g(s) = g(0)e^{as}$ для всех $s \in R$. Другими словами, $g = Cf$ где $C = g(0)$. Таким образом $L[f] = Cf$.

Предположим, в частности, что домен L включает в себя все мнимые экспоненциальные $e^{i\xi x}$ и пусть $h(\xi)$ - собственное значение для $e^{i\xi x}$; таким образом, $L[e^{i\xi x}] = h(\xi)e^{i\xi x}$. Если L удовлетворяет некоторым очень мягким условиям непрерывности, можно прочитать действие L на более или менее произвольная функция ***f*** из формулы обращения Фурье. Действительно,

эта формула выражает ***f*** как непрерывную суперпозицию экспонент $e^{i\xi x}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int f(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

и тогда,

$$L[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)L[e^{i\xi x}]d\xi = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)h(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

(условия непрерывности на L используются здесь, чтобы оправдать рассмотрение интеграла как если бы это была конечная сумма). Таким образом, в терминах преобразования Фурье $\hat{f}$, действия L сводится к простой алгебраической операции умножения на функцию ***h***,

$(\widehat{L[f]}) = h\hat{f}$, поэтому проход от ***f*** к $\hat{f}$ может упростить анализ L больш.

Альтернативно, если h -преобразование Фурье функции H, мы можем выразить L как свертку: ***Lf = f*H***.

Для того, чтобы эти расчеты работали в соответствии с теорией, ***f*** и H должно быть L^1 или L^2 функции. Однако, можно продлить домен Фурье включить

гораздо более общие виды функций, и настоящее обсуждение затем расширяется к более общей ситуации.

2.1. Применение преобразования Фурье для решения задач математической физики

Приведем пример решения задачи с помощью преобразования Фурье.

Задача. Построить функцию Грина для уравнения, описывающего распространение тепла в бесконечном однородном стержне, и с ее помощью найти температурный режим стержня при отсутствии внешних источников. **Решение.** Выбираем координатную систему так, чтобы ось x совпала с положением стержня. Пусть u(x, t) — температура стержня в точке x в момент t. Тогда функция u(x, t) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.1.1)$$

Как известно, для стержня конечной длины задача отыскания функции Грина сводится к решению уравнения (2.1.1) с заданными однородными граничными условиями и начальным условием в виде δ-функции. Попробуем и для бесконечного стержня найти решение $u_0(x,t)$ уравнения (2.1.1), для которого $u_0(x,0)=\delta(\xi-x)$ и покажем, что оно обладает свойствами, аналогичными свойствам функции Грина в задаче о тепловом режиме стержня конечной длины. Однако, чтобы оставаться в рамках математической строгости, не прибегая к теории обобщенных функций, мы возьмем начальное условие в виде δ-последовательности $\delta_n(\xi, x)$*, найдем отвечающее $\delta_n(\xi, x)$ решение $u_n(x,t)$ и потом перейдем к пределу при $n \to \infty$.

Итак, пусть

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \tag{2.1.2}$$

$$u_n(x, 0) = \delta_n(\xi, x), \tag{2.1.3}$$

где ξ — произвольное число, $\delta_n(\xi,x) \in C(-\infty, +\infty)$, $\delta_n(\xi,x)= \delta_n(x, \xi)$,

$$\delta_n(\xi, x) = \begin{cases} 0, |x - \xi| \geq \frac{1}{n} \\ \geq 0, |x - \xi| < \frac{1}{n} \end{cases}, \int \delta_n(\xi, x)\, dx = 1. \tag{2.1.4}$$

Пример. Найдём преобразование Фурье прямоугольного импульса

$$f(x) = \eta(a - |x|) = \begin{cases} 1, |x| \leq a \\ 0, |x| > a \end{cases} \equiv rect\left(\frac{2t}{a}\right), a > 0 :$$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx = \int_{-a}^{+a} e^{-ixydx} = \frac{e^{\,iya} - e^{-iya}}{iy} = \frac{2 \sin ya}{y} .$$

Функция $\frac{\sin y}{y}$ обозначается как sinc y, то есть $\widehat{rect x} = sinc\ y$.

Пример. Найдём преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-ax^2}$:

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ixy} dx.$$

Преобразуем степень экспоненты, выделив полный квадрат:

$-ax^2 - \ ixy \ = -a(x \ + \ \frac{iy}{2a} \ )^2 \ - \frac{y^2}{4a}$.

Тогда $f(y) = e^{\frac{-y^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{iy}{2a})^2} dx.$

Под интегралом аналитическая в C функция переменной x ∈ C, стремящаяся к нулю вдоль каждой прямой, параллельной вещественной оси (при |ℝ x| → ∞). Поэтому в силу теоремы Коши и леммы Жордана интеграл не изменит своего значения, если его взять не по действительной оси, а по любой другой прямой, параллельной этой оси. Возьмём его по прямой $x = z - \frac{iy}{2a}$, z ∈ (−∞, +∞). Тогда $f(y) = e^{\frac{-y^2}{4a}} dz = e^{\frac{-y^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, так как интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$.

Итак, $f(y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \ e^{\frac{-y^2}{4a}}$.

- ***Преобразования Фурье обобщенных функций***

Пример. Дельта-функция Дирака может быть определена по формуле $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ для любой непрерывной на R функции ϕ, в частности, для любой $\varphi \ \in \ S(\mathbb{R})$. Таким образом, $\delta \in S'(\mathbb{R})$. Теперь определим сходимость в пространстве $S'(\mathbb{R})$. Определяется она аналогично сходимости в $D'(\mathbb{R})$.

Пример. Найдем преобразование Фурье δ-функции Дирака:

$$(\hat{\delta}, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy} dy \bigg|_{x=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y).1dy = (1, \varphi).$$

Таким образом, $\hat{\delta} = 1$.

Пример. Найдем преобразование Фурье обобщенной функции f(x) ≡ 1. Заметим, что обычное преобразование Фурье не существует, т.к. константа 1 не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$. Итак, $\hat{1} = \hat{\hat{\delta}} = 2\pi\widehat{\delta(-x)} = 2\pi\delta(-x) = 2\pi\delta$.

- ***Двумерное преобразование Фурье. Задача о распространении волн на плоскости***

Двумерное преобразование Фурье функции g(x, y) есть по определению функция

$$\bar{g}(p,q) = \iint g(x,y)e^{-i(px+qy)}dxdy \qquad (2.1.1')$$

Для применимости этого преобразования достаточно, чтобы функция $|g(x,y)|$ была суммируема на всей плоскости XY = {(x, y) | −∞ < x, y < +∞}. Формула обращения для двумерного ИП Фурье дается равенством:

$$g(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint \bar{g}(p,q)e^{i(px+qy)}\,dpdq \qquad (2.1.2')$$

Условие её справедливости — это условие справедливости двух последовательно примененных одномерных формул обращения. Поскольку двумерное ИП Фурье можно рассматривать как произведение двух одномерных (по разным переменным), то для образов вторых производных $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ мы получим равенства:

$$\iint \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}e^{-ipx}e^{-iqy}dxdy = \int(\int \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}e^{-ipx}dx)e^{-iqy}dy =$$

$$= -p^2\int \bar{g}_1(p,y)e^{-iqy}dy = -p^2\bar{g}(p,q) \qquad (2.1.3a)$$

$$\iint \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}e^{-ipx}e^{-iqy}dxdy = \int(\int \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}e^{-iqy}dy)e^{-ipx}dx =$$

$$= -q^2\int \bar{g}_2(x,q)e^{-ipx}dx = -q^2\bar{g}(p,q) \qquad (2.1.3b)$$

где

$$\bar{g}_1(p,y) = \int g(x,y)e^{-ipx}dx \quad ,\bar{g}_2(x,q) = \int g(x,y)e^{-iqy}dy,$$

и мы предполагаем, что g_{xx}, $g_{yy} \in L_1(XY)$, g, g'_x, $g''_{xx} \subset L_1(-\infty, +\infty)$ при любом фиксированном y и g, g'_y, $g''_{yy} \in L_1(-\infty, +\infty)$ при любом фиксированном x.

Задача. Рассмотрим задачу о распространении волн на плоскости. Обозначим через *u(x, y, t)* возмущение в точке *(x, y)* в момент *t*. Тогда, как известно, функция *u(x, y, t)* должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2.1.4')$$

Пусть начальное возмущение и начальная скорость распространения возмущений суть функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, т. е.

$$\text{a) } u(x, y, 0) = \phi(x, y), \text{ b) } u_t(x, y, 0) = \psi(x, y). \qquad (2.1.5')$$

Делаем двойное преобразование Фурье, умножая (2.1.4'), (2.1.5') на $e^{-ipx-iqy}$ и интегрируя по x и по y от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда в силу (2.1.1'), (2.1.3a), (2.1.3b) получим

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} = -a^2(p^2 + q^2)\bar{u}, \qquad (2.1.6)$$

$$\text{a) } \bar{u}(p, q, 0) = \bar{\phi}(p, q), \text{ b) } \bar{u}_t(p, q, 0) = \bar{\psi}(p, q), \qquad (2.1.7)$$

где

$$\bar{\phi}(p, q) = \iint \phi(x, y)\, e^{-i(px+qy)}\, dx\, dy, \ \ \bar{\psi}(p, q) = \iint \psi(x, y)\, e^{-i(px+qy)}\, dx\, dy.$$

Из (8.6) получаем, что

$$\bar{u}(p, q, t) = d_1 sina\rho t + d_2 cosa\rho t,$$

где $\rho = \sqrt{p^2 + q^2}$,

откуда в силу начальных условий (8.7) имеем

$$\bar{u}(p, q, t) = \bar{\phi}(p, q) cosa\rho t + \bar{\psi}(p, q) sin\frac{a\rho t}{a\rho}. \qquad (2.1.8)$$

Далее в конкретной задаче, подставив в (2.1.8) значения $\bar{\phi}(p, q)$ и $\bar{\psi}(p, q)$ и воспользовавшись формулой обращения (2.1.2), получим

$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2}\iint[\bar{\phi}(p,q)\cos a\rho t + \bar{\psi}(p,q)\sin a\rho t\,.\,\rho^{-1}a^{-1}] \times \exp[i(px\ + qy)]dp\,dq.$

(2.1.9)

Однако зависимость решения *u(x, y, t)* от начальных условий можно получить и не находя $\bar{\phi}(p,q)$, $\bar{\psi}(p,q)$. Для этого надо воспользоваться формулой свертки для двумерного ИП Фурье и рассуждениями.

2.2. Применение преобразования Фурье для решения интегральных уравнений

Преобразование Фурье может быть использовано для решений некоторых интегральных уравнений, то есть уравнений, для которых неизвестная функция входит под знак интеграла.

Рассмотрим, например, уравнение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\xi x}dx = 2\pi e^{-|\xi|}, \qquad (2.2.1)$$

где $\varphi(x)$- искомая функция. Записав (2.2.1) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\xi x}dx = \sqrt{2\pi}e^{-|\xi|} \qquad (2.2.2)$$

Замечаем, что левую часть (2.2.2) можно рассматривать как преобразование Фурье функции $\varphi(x)$,так что (2.2.2) равносильно следующему равенству:

$$\mathcal{F}[\varphi] = \sqrt{2\pi}e^{-|\xi|}$$

Тогда, по формуле обращения

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\xi|}e^{i\xi x}d\xi = \int_{-\infty}^{0}e^{\xi(1+ix)}d\xi + \int_{0}^{+\infty}e^{-\xi(1+ix)}d\xi =$$

$$= \frac{e^{\xi(1+ix)}}{1+ix}\Bigg|_{\xi=-\infty}^{\xi=0} - \frac{e^{-\xi(1+ix)}}{1-ix}\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} = \frac{2}{1+x^2}$$

Функция $\varphi(x) = \frac{2}{1+x^2}$ есть решение уравнения (2.2.1)

2.3. Преобразование Фурье и ряды Фурье, дискретное преобразование Фурье

Ряд Фурье.

Ряд Фурье - это представление произвольной функции с некоторым периодом в виде ряда. В общем случае такое решение называется разложением элемента на ортогональном базисе. Разложение функций в ряд Фурье является достаточно мощным инструментом для решения множества задач, связанных с свойствами этого преобразования в интегрировании, дифференцировании, а также путем перемещения выражения в аргумент и свертку.

Рядом Фурье функции *f(x)* на интервале (-π;π) называется тригонометрический ряд вида:

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx$$

Где,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx\,, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx.$$

Рядом Фурье функции f(x) на интервале (-l;l) называется тригонометрический ряд вида:

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Вопрос о сходимости срабатывает всякий раз, когда необходимо суммирование бесконечных чисел. Чтобы понять это явление, рассмотрим классический пример. Можете ли вы достигнуть стены, если каждый шаг - половину предыдущего? Предположим, вы находитесь в двух метрах от цели, первый шаг ближе к середине, следующий знак в три четверти, а пятый, вы преодолеете почти 97 процентов пути. Но независимо от того, сколько шагов вы делаете, цель состоит в том, чтобы достичь строгого математического значения. Используя численные вычисления, мы можем доказать, что в конечном итоге вы можете получить как можно ближе к заданному короткому расстоянию. Это доказательство эквивалентно доказательству того, что совокупность второго, четвертого значения и так далее стремится к одному.

Известно, что периодическая с периодом **X** ограниченная кусочно-гладкая функция ***f(x)*** может быть представлена своим рядом Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n e^{2nsinx/X},$$

где

$$F_n = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} f(x)\, e^{-2nsinx} dx$$

Рассмотрим снова пространство $L_2[-\pi;\pi]$ функций с суммируемым квадратом на отрезке [-π;π]. Это -полное бесконечномерное евклидово пространство, те. гильбертово пространство. Функции

1, ***cos nx***, ***sin nx*** (n = 1, 2, …)

образуют в нем полную ортогональную систему, поэтому для

каждой функции $f \epsilon L_2[-\pi;\pi]$ ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx \qquad (2)$$

Где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnxdx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnnxdx \qquad (3)$$

Сходится к f в среднем квадратичном, Т. е. в метрике пространства $L_2[-\pi;\pi]$. Однако, в связи с применением рядов Фурье к задачам математической физики и другим вопросам будет существенно установить условия, гарантирующие сходимость ряда Фурье к не только в среднем, но и в данной точке, всюду, или даже равномерно. Мы установим сейчас условия, достаточные для сходимости тригонометрического ряда в данной точке. Сделаем некоторые предварительные замечания.

Вместо функций, заданных на отрезке $[-\pi;\pi]$, мы можем говорить о периодических функциях с периодом 2π на всей прямой, поскольку каждую функцию, заданную на отрезке, можно периодически продолжить. Далее, функции, образующие тригонометрическую систему, ограничены, поэтому формулы (3), определяющие коэффициенты Фурье по этой системе, имеют смысл для любой суммируемой функции) (а не только для функций с суммируемым квадратом) Таким образом, каждой функции $f \epsilon L_1[-\pi;\pi]$ - отвечают совокупность ее коэффициентов Фурье и ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Преобразование Фурье.

Для непериодических функций ряд Фурье заменяется интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\chi)\, e^{i\chi x} dx,$$

где

$$F(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\chi x} dx$$

Связь между рядом Фурье и преобразованием Фурье.

Рассмотрим функцию ***f(x)***, равную нулю вне интервала [-X/2;X/2]. С одной стороны, для нее можно определить преобразование Фурье, а с другой стороны, ее можно считать периодически продолженной и определить для нее коэффициенты ряда Фурье. Тогда имеем

$$F(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} f(x)\, e^{-i\chi x} dx,$$

$$F_n = \frac{1}{X} \int_{-X/2}^{+X/2} f(x) e^{-2nsinx/X}\, dx.$$

Сравнивая полученные выражения, можно сделать вывод, что

$$F\left(\chi_n = \frac{2\pi n}{X}\right) = \frac{X}{\sqrt{2\pi}} F_n,$$

т.е. коэффициенты ряда Фурье для периодического продолжения функции ***f(x)*** определяют значение преобразования Фурье в дискретных точках $\chi_n = \frac{2\pi n}{X}$

Дискретное преобразование Фурье.

Для последовательности {***f****n*, **n**=0,1,2,…,N-1}, состоящей из **N** действительных или комплексных чисел определяется дискретное преобразование Фурье (ДПФ){**D**n**,** **n**=0,1,2,…,N-1}:

$$D_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m W^{mn},\ \ n = 0,1,2, \dots, N-1$$

где $W = e^{-2\pi i/N}$— дискретные экспоненциальные функции. Так как дискретные экспоненциальные функции $\mathbf{W^{mn}}$ являются ортогональными, т.е. удовлетворяют условию

$$\sum_{m=0}^{N-1} W^{m_1 n} W^{-m_2 n} = \begin{cases} N, m_1 \equiv m_2 (mod\ N) \\ 0, m_1 \neq m_2 (mod\ N) \end{cases}$$

то справедливо обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ):

$$f_n = \sum_{m=0}^{N-1} D_m w^{-mn}, \ \ n = 0,1,2,\dots,N-1$$

Приведем некоторые свойства ДПФ.

1) Теорема линейности.

Если даны последовательности $\{f_n\} = \{f_n, n = 0,1,2,\dots.N-1\}$, $\{f_n'\} = \{f_n', n = 0,1,2,\dots,N-1\}$, такие, что

$$f_n = af_n' + bf_n'', \quad n = 0,1,2,\dots,N-1,$$

и $\{D_n\} = \{D_n, n = 0,1,2,\dots\mathrm{N}-1\}$, $\{D_n'\} = \{D_n', n = 0,1,2,\dots\mathrm{N}-1\}$, $\{D_n''\} = \{D_n'', n = 0,1,2,\dots\mathrm{N}-1\}$ — ДПФ $\{f_n\}$, $\{f_n'\}$, $\{f_n''\}$,соответственно, то

$$D_n = aD_n' + bD_n'', \quad n = 0,1,2,\dots,N-1.$$

2) *Теорема комплексной сопряженности.*

Если $\mathbf{N}$-четное число и $\{f_n\} = \{f_n, n = 0,1,2,\dots,\mathrm{N}-1\}$ - последовательность действительных чисел, а $\{D_n\} = \{D_n, n = 0,1,2,\dots\mathrm{N}-1\}$ -ДПФ последовательности $\{f_n\}$, то

$$D_{\frac{N}{2}+n} = \overline{D_{\frac{N}{2}-n}}, \quad n = 0,1,2,\ldots N/2$$
,

где $\overline{D_{\frac{N}{2}-n}}$ - величина, комплексно-сопряженная величине $D_{\frac{N}{2}-n}$. В частности, коэффициенты D_0 и $D_{\frac{N}{2}}$ всегда действительны.

3) *Теорема циклического сдвига.*

Если даны последовательности $\{f_n\} = \{f_n, n = 0,1,2,\ldots,N-1\}$, $\{f'_n\} = \{f'_n, n = 0,1,2,\ldots,N-1\}$, такие, что

$$f_{n+k} = f'_n, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$
,

и $\{D_n\} = \{D_n, n = 0,1,2,\ldots N-1\}$, $\{D'_n\} = \{D'_n, n = 0,1,2,\ldots N-1\}$ — ДПФ соответственно последовательностей $\{f_n\}$, $\{f'_n\}$, то

$$D'_n = W^{-nk} D_n, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$
.

4) *Теорема циклической свертки.*

Если даны последовательности $\{f_n\} = \{f_n, n = 0,1,2,\ldots,N-1\}$, $\{f'_n\} = \{f'_n, n = 0,1,2,\ldots,N-1\}$, $\{f''_n\} = \{f''_n, n = 0,1,2,\ldots,N-1\}$ такие, что

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f'_m f''_{m-n}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$
,

и $\{D_n\} = \{D_n, n = 0,1,2,\ldots N-1\}$, $\{D'_n\} = \{D'_n, n = 0,1,2,\ldots N-1\}$, $\{D''_n\} = \{D''_n, n = 0,1,2,\ldots N-1\}$ — ДПФ $\{f_n\}$, $\{f'_n\}$, $\{f''_n\}$,соответственно, то

$$D_n = D_n' D_n'', \quad n = 0,1,2,\dots,N-1,$$

причем последовательность $\{f_n\}$ называют циклической сверткой последовательностей $\{f_n'\}$ и $\{f_n''\}$.

5) *Теорема циклической корреляции.*

Если три последовательности $\{f_n\} = \{f_n, n = 0,1,2,\dots,N-1\}$, $\{f_n'\} = \{f_n', n = 0,1,2,\dots,N-1\}$, $\{f_n''\} = \{f_n'', n = 0,1,2,\dots,N-1\}$ такие, что

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m' f_{m-n}'', \ n = 0,1,2,\dots,N-1,$$

и $\{D_n\} = \{D_n, n = 0,1,2,\dots,N-1\}$, $\{D_n'\} = \{D_n', n = 0,1,2,\dots,N-1\}$, $\{D_n''\} = \{D_n'', n = 0,1,2,\dots,N-1\}$— ДПФ ***{fn}***, ***{fn'}***, ***{fn"}***,соответственно, то

$$D_n = \overline{D_n'} D_n'', \ n = 0,1,2,\dots,N-1,$$

При этом последовательность ***{fn}*** называют циклической функцией корреляции последовательностей ***{fn'}*** и ***{fn"}***.

Если $\{f_n'\}$ и $\{f_n''\}$ — идентичные последовательности, то

$$D_n = |D_n'|^2, n = 0,1,2,\dots,N-1.$$

Находя ОДПФ последовательности **{Dn}**, получим

$$f_n = \sum_{m=0}^{N-1} D_m W^{-mn} = \sum_{m=0}^{N-1} |D_n'|^2 W^{-mn} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m' f_{m+n}', \ n = 0,1,2,\dots,N-1$$

В частном случае при $n=0$ это выражение сводится к

$$\sum_{m=0}^{N-1} |D_n'|^2 = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} (f_m')^2,$$

что является теоремой Парсеваля для дискретной последовательности $\{f'_n\}=\{f'_n, n=0,1,2,\dots,N-1\}$.

Связь между ДПФ, рядом Фурье и преобразованием Фурье.

Для того чтобы установить связь между ДПФ, рядом Фурье и преобразованием Фурье рассмотрим дискретизацию непрерывной функции ***f(x)***, равной нулю вне интервала *[-X/2, +X/2]*. Заменим на ее дискретное представление $\boldsymbol{f^*(x)}$ в виде суммы δ-функций в точках дискретизации $x_n = n\Delta x$ $(n = \ldots,-1,0,1,\ldots)$

$$f^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n\Delta x)\Delta x \delta(x - n\Delta x) = \sum_{n=-N/2}^{n=\frac{N}{2}-1} f_n \Delta x \delta(x - n\Delta x)$$

где $\mathbf{N=X/\Delta x}$.

Таким образом, для функции $\boldsymbol{f^*(x)}$ можно определить как преобразование Фурье, так и, считая ее периодически продолженной, коэффициенты ряда Фурье. Тогда для коэффициентов ряда Фурье получим

$$F_n = \frac{1}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} f^*(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{X}} dx =$$

$$= \frac{1}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{m=\frac{N}{2}-1} f_m \Delta x \delta(x - m\Delta x) e^{-\frac{2\pi i n x}{X}} dx =$$

$$= \frac{\Delta x}{X} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{m=\frac{N}{2}-1} f_m e^{-\frac{2\pi i n m \Delta x}{X}} dx =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=-N/2}^{m=\frac{N}{2}-1} f_m e^{-2\pi i n m/N} =$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=-N/2}^{m=-1} f_m e^{-2\pi i n m/N}+\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=\frac{N}{2}-1} f_m e^{-2\pi i n m/N}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=-N/2}^{m=N-1} f_{m-N} e^{-2\pi i(m-n)/N}+\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=\frac{N}{2}-1} f_m e^{-2\pi i n m/N}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=N-1} f_m e^{-2\pi i n m/N}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m W^{nm}=D_n$$

При этом, в соответствии с циклическим продолжением, считая, что $\boldsymbol{f_m=f_{m-N}}$, если $\boldsymbol{m>(N/2)-1}$.

Аналогично, для преобразования Фурье $F(\chi)$ в дискретных точках $\chi_n = 2\pi n/X$ получим

$$F(\chi_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)e^{-i\chi_n x}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-N/2}^{m=\frac{N}{2}-1} f_m \Delta x\delta(x-m\Delta x)e^{-i\chi_n x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-N/2}^{m=\frac{N}{2}-1} f_m \Delta x e^{-i\chi_n m\Delta x}=\Delta x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}N\frac{1}{N}\sum_{m=-N/2}^{m=\frac{N}{2}-1} f_m e^{-\frac{i2\pi nm}{N}}=\frac{X}{\sqrt{2\pi}}D_n.$$

Таким образом, ДПФ является дискретным аналогом коэффициентов ряда Фурье и преобразования Фурье.

Быстрое преобразование Фурье.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ, *FFT*) - это алгоритм быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ). То есть, алгоритм вычисления количества действий меньше *$O(N^2)$*, необходимый для прямого вычисления (по формуле) ДПФ. Иногда FFT является одним из самых быстрых алгоритмов, называемым алгоритмом прореживания частоты/ времени, который имеет сложность *O(Nlog(N))*..

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) является таким способом вычисления дискретного преобразования Фурье для некоторых значений **N**, что дает резкое сокращение числа операций, необходимых для вычисления ДПФ.

Проще запрограммировать мощности числа БПФ для N, равных мощности 2. Поэтому при использовании БПФ обычно предполагается, что $\mathbf{N=2^k}$. Для других значений N коэффициент усиления также может быть достигнут выигрыш, тем больше, чем больше количество множителей в разложении числа **N** на простые множители. Однако для определения реального выигрыша необходимо учитывать сложность вычисления элементарного $\mathbf{P_i}$ — точечного ДПФ, где P_i – все различные простые факторы, участвующие в разложении **N** на простые множители:

$$\boldsymbol{N = \prod_i p_i^{n_i}}.$$

Если для прямого вычисления ДПФ необходимого порядка N требуются операции умножения на комплексные числа, тогда БПФ требует только порядка $\mathbf{(N/2)\log_2 N}$ операций умножения для $\mathbf{N=2^k}$. Для более точного определения коэффициента усиления при использовании БПФ необходимо также учитывать операции сложения, а также различные времена выполнения операций сложения и умножения.

Существует большое количество алгоритмов БПФ. Однако все они являются частными случаями одного алгоритма, основанного на проблеме деления одного массива чисел на два. Тот факт, что это может быть сделано более чем одним способом, определяет разнообразие алгоритмов БПФ. Рассмотрим два из них.

Первый алгоритм называется **алгоритмом БПФ с прореживанием по времени**.

Пусть N-отсчетный дискретный сигнал образца ***x(n)***. Предположим, что N равно степени 2. Если это не так, всегда можно легко дополнить сигнал, нулевыми выборками, до количества ударов, равных мощности, ближайшей к двум.

Разобьём исходный сигнал ***x(n)*** на два ***N/2***-отсчетных сигнала ***x₁(n)*** и ***x₂(n)***, составленных соответственно из четных и нечетных отсчетов исходного сигнала ***x(n)***

$$x_1(n) = x(2n), \quad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$
$$x_2(n) = x(2n+1), \quad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

(a

).

N-точечное ДПФ сигнала ***x(n)*** можно записать как

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) W_N{}^{nk} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) W_N{}^{nk} =$$
$$\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N{}^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N{}^{(2n+1)k}$$

(b

).

С учетом того, что

$$W_N{}^2 = \left[e^{-j(2\pi/N)}\right]^2 = e^{-j(2\pi/N/2)} = W_{N/2}$$

(c)

можно записать

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}{}^{nk} + W_N{}^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}{}^{nk}$$

(d)

или

$$X(k) = X_1(k) + W_N{}^K X_2(k)$$

(e),

где $X_1(k)$ и $X_2(k)$ – N/2-отсчетные ДПФ сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$ соответственно.

Таким образом N-точечное ДПФ X(k) может быть разложено на два N/2-точечных ДПФ, результаты которых объединяются согласно (e)

Если бы N/2-точечные ДПФ вычислялись прямым способом, то для вычисления N-точечного ДПФ потребовалось бы ($N^2/2+N$) комплексных умножений. При больших N (когда $N^2/2>>N$) это позволяет сократить время вычислений на 50%.

Поскольку X(k) определено при $0 \le k \le N-1$, а $X_1(k)$ и $X_2(k)$ определены при $0 \le k \le N/2 - 1$, необходимо доопределить формулу (e) для $k \ge N/2$. Учитывая, что $X_1(k)$ и $X_2(k)$ – периодические функции с периодомN/2, можно записать

$$X(k+N/2) = X_1(k+N/2) + W_N^{(k+N/2)} X_2(k+N/2) = \\ = X_1(k) - W_N^{k} X_2(k) \qquad \text{(f),}$$

поскольку $W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi N}{N\,2}} = -1$.

Поэтому окончательно для N-точечного ДПФ можно записать

$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^{k} X_2(k), & 0 \le k \le N/2 - 1 \\ X_1(k-N/2) - W_N^{k} X_2(k-N/2), & N/2 \le k \le N-1 \end{cases} \qquad \text{(g).}$$

На рис.А представлена последовательность операций при выполнении восьмиточечного ДПФ с использованием двух четырехточечных ДПФ.

Во-первых, входной сигнал *x(n)* делится на два сигнала $x_1(n)$ и $x_2(n)$, составленных соответственно из нечетных и четных выборок *x(n)*. После этого вычисляются ДПФ $X_1(k)$ и $X_2(k)$. Тогда, согласно (g), получим *X(k)*. Рассматриваемая схема расчета также может быть использована для вычисления N/2-точечных ДПФ. Соответственно, каждый из сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$ разделен на последовательности, состоящие из нечетных и четных отсчетов исходных сигналов. Аналогично, N/2-точечные ДПФ могут быть записаны как комбинации двух N/4-точечных ДПФ

$$X_1(k)=\begin{cases}X_3(k)+W_{N/2}{}^{K}X_4(k), & 0\le k\le N/4-1\\ X_3(k-N/4)-W_{N/2}{}^{K}X_4(k-N/4), & N/4\le k\le N/2-1\end{cases} \quad \text{(h).}$$

С учетом того, что $W_{N/2}{}^{k}=W_N{}^{2k}$ можно записать

$$X_1(k)=\begin{cases}X_3(k)+W_N{}^{2K}X_4(k), & 0\le k\le N/4-1\\ X_3(k-N/4)-W_N{}^{2K}X_4(k-N/4), & N/4\le k\le N/2-1\end{cases} \quad \text{(i).}$$

На рис.В представлена последовательность операций при выполнении восьмиточечного ДПФ с использованием двух четырехточечных ДПФ и четырех двухточечных ДПФ.

Таким образом, процесс уменьшения размера ДПФ может быть продолжен до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ, которые могут быть рассчитаны без операции умножения.

$$\begin{cases}F(0)=f(0)+W_N{}^{0}f(1)\\ F(1)=f(0)-W_N{}^{0}f(1)\end{cases} \quad \text{(j).}$$

Поскольку $W_N{}^{0}=1$, то окончательно получим

$$\begin{cases}F(0)=f(0)+f(1)\\ F(1)=f(0)-f(1)\end{cases} \quad \text{(k).}$$

На рис.С представлена порядок операций при последовательном вычислении восьмиточечного ДПФ в соответствии с описанным алгоритмом.

Анализ рисунки С показывает, что на каждом этапе БПФ необходимо выполнить комплексные умножения N/2 раз. Поскольку общее число шагов равно $\log_2 N$, то количество комплексных умножений, необходимое для нахождения N-точечного ДПФ, приблизительно равно $N/_2 \log_2 N$. Грубость оценки означает, что умножения $W_N^{\,0}, W_N^{\,N/2}, W_N^{\,N/4}, W_N^{\,3N/4}, \ldots$ фактически сводятся просто к сложениям и вычитаниям комплексных чисел.

Таким образом, на первом этапе алгоритма, показанного на рисунке C, содержатся только сложения и вычитания комплексных чисел поскольку $W_8^0 = 1$. Даже на втором шаге используются только сложения и вычитания комплексных чисел поскольку $W_8^0 = 1, W_8^2 = -j$. На самом деле, вместо ожидаемых 12 ($4\log_2 8$), достаточно выполнить только два нетривиальных умножения. Однако при больших значениях N фактическое число нетривиальных умножений хорошо аппроксимируется выражением $N/_2 \log_2 N$.

Базовая операция алгоритма с прореживанием по времени (так называемая **«бабочка»**) состоит в том, что два входных числа A и B объединяются для получения двух выходных чисел X и Y по правилу

$$\begin{cases} X = A + W_N^{\,k} B \\ Y = A - W_N^{\,k} B \end{cases} \qquad (1).$$

На рис.D изображен направленный граф базовой операции.

Каждый из шагов в ДПФ содержит N/2 основных операций. В случае, когда $W_N^{\,k}$ является нетривиальным фактором, для каждой базовой операции необходимо выполнить лишь одно умножение, так как значение $W_N^{\,k} B$ можно вычислить и сохранить. Таким образом, структура основных операций такова, что для выполнения БПФ N-отсчетного сигнала, чьи отсчеты расположены в памяти, достаточно иметь только одну дополнительную ячейку памяти. Результаты всех промежуточных шагов БПФ могут быть помещены в те же ячейки памяти, где исходные данные. Алгоритм БПФ, в котором тот же массив памяти используется для размещения входной и выходной последовательности, называется **алгоритмом замещением**.

Чтобы реализовать алгоритм, необходимо переставить отсчетов входного сигнала, так что выходная последовательность имела естественный порядок расположения отсчетов, то есть k = 0,1 , ..., N-1. В примере, приведенный для 8-точечного БПФ, для этого требовался следующий порядок организации выборок входного сигнала: x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7). Регулярность перестановки заключается в том, что образцы входного сигнала должны быть помещены в память в двоично-инверсном порядке. Это означает, что номер ячейки памяти, необходимый для размещения следующего отсчета входного сигнала, определяется обратной перестановкой двоичных разрядов в двоичном представлении номера отсчета. Для случая N=8 соответствие номеров отсчетов входного сигнала и их номеров ячеек памяти представлено в таблице 1.

Номер	Двоичное представление	Двоичная инверсия	Двоично-инверсный порядок
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

На рис.Е показан алгоритм определения двоично-инверсного номера, предложенный Рейдером. Начиная с первого числа с прямым номером 0, этот алгоритм позволяет формировать последовательно все остальные двоично-инверсные номера.

Заключение

В первой главе мы рассмотрели понятие и основные свойства интегрального преобразования Фурье, а также свертка функций и примеры преобразований Фурье. Во второй главе мы определили применения дискретного преобразования Фурье к решению задач математической физики и к решению интегральных уравнений. Окончательно, мы рассмотрели ряды Фурье и дискретное преобразование Фурье.

В этой главе мы рассмотрели представления по Фурье последовательностей конечной длины, названные дискретным преобразованием Фурье. Это представление было основано на связи между последовательностями конечной длины и периодическими последовательностями. А именно, если периодическая последовательность сформирована так, что каждый ее период идентичен последовательности конечной длины, то дискретное преобразование Фурье последовательности конечной длины соответствует дискретному ряду Фурье периодической последовательности. Поэтому мы сначала рассмотрели представление периодических последовательностей рядами Фурье, включая свойства рядов Фурье и интерпретацию их коэффициентов, как равноудаленных выборок на единичной окружности из 2-преобразований одного периода периодических последовательностей. Затем дискретные ряды Фурье были применены к представлению последовательностей конечной длительности. Были рассмотрены свойства дискретного преобразования Фурье, а также вопросы вычисления линейной свертки с использованием дискретного преобразования Фурье.

Список литературы

1) Оппенгейм А. В., Р.В. Шафер «Цифровая обработка сигналов» -М.: Связь, 1979, с 74-96
2) А. Н. Колмогоров, С. В. Формин «Элементы функционального анализа» -М.:Наука. 1976, с 423-435
3) Brian Davis “Integral transforms and their applications”, third edition, Spinger Australia, 2001, с 111-123
4) Gerald B. Folland “Fourier analysis and its applications”, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books and Software Pacific Groove. California 1992, с 18-57, 204-225
5) Борзенков А. В. «Дифференциальные уравнения в частных производных» -Минск БГУИР 2009, с 69
6) Богданов, Ю. С. «Дифференциальные уравнения» Ю. С. Богданов, Ю.Б.Сыроид. –М., 1996

7) Владимиров, В. С. «Уравнения математической физики»/ В. С. Владимиров. – М., 1981.

8) Васильева А.Б., Тихонов Н.А. «Интегральные уравнения.» М.: Физматлит, 2004.

9) Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах»/ М.: Физматлит, 2003.

10) Волков В.Т., Ягола А.Г. «Интегральные уравнения. Вариационное исчисление: методы решения задач.» М.: КДУ, 2007.

11) Краснов М.Л. «Интегральные уравнения. Введение в теорию.» М.: КомКнига, 2006.

12) Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. «Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями.» М.: Едиториал УРСС, 2003.

13) Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. «Сборник задач для втузов.» Ч. 3./ М.: Физматлит, 2003.

14) Жислин Г. М. «Интегральные преобразования в задачах математической физики» Электронное учебно-методическое пособиеуравнениям. М.: Физматлит, Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с

15) Тихонов А. Н., Самарский А. А. «Уравнения математической физики.» — М.: Наука, 1977.

16) Трантер К. Д. «Интегральные преобразования в математической физике.» — М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит- ры, 1956.

17) Диткин В. А., Прудников А. П. «Интегральные преобразования и операционное исчисление.» — М.: Физматгиз, 1961.

18) Привалов И. И. «Введение в теорию функций комплексного переменного.» — М.: Наука, 1984

19) Лебедев Н. Н. «Специальные функции и их приложения.» — М.: Физматгиз, 1963.

20) Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. «Интегралы и ряды. Элементарные функции.» — М.: Наука, физматгиз, 1984.

21) Фихтенгольц Г. М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления.» Т. 2. — М.: Гос. изд-во технико-теоретич Градштейн И. С., Рыжик Н. М. «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.» — М.: Физматгиз, 1962. 9. Снеддон И. Преобразование Фурье. — М.: Изд-во ин. лит-ры, 1955.еской лит-ры, 1948.

22) Fb.ru/Статья «Ряды Фурье: история и влияние математического механизма на развитие науки»

23) Wikipedia «Быстое преобразование Фурье», 10/04/2018

24) Wikipedia «Ряд Фурье», 10/04/2018

25) Ets.imo.ru «Быстрое преобразование Фурье» 20/03/2018

26) Youtube «But what is the Fourier transform? A visual introduction» 11/02/2018

27) Youtube «La transformation de Fourier» 11/02/2018

Приложение

Последовательность конечной длительности (длительность N)	ДПФ
1. $x(n)$	$X(k)$
2. $y(n)$	$Y(k)$
3. $ax(n)+by(n)$	$aX(k)+bY(k)$
4. $x((n+m))_N R_N(n)$	$W_N^{-km} X(k)$
5. $W_N^{ln} x(n)$	$X((k+l))_N R_N(k)$
6. $\left[\sum_{m=0}^{N-1} x((m))_N y((n-m))_N\right] \times R_N(n)$	$X(k)Y(k)$
7. $x(n)y(n)$	$\frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N-1} X((l))_N Y((k-l))_N\right] \times R_N(k)$
8. $x^*(n)$	$X^*((-k))_N R_N(k)$
9. $x^*((n))_N R_N(n)$	$X^*(k)$
10. $\mathrm{Re}[x(n)]$	$X_{ep}(k)=\frac{1}{2}[X((k))_N + X^*((-k))_N] \times R_N(k)$
11. $i\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$X_{op}(k)=\frac{1}{2}[X((k))_N - X^*((-k))_N] \times R_N(k)$
12. $x_{ep}(n)$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
13. $x_{op}(n)$	$i\,\mathrm{Im}[X(k)]$
14. Любое действительное $x(n)$	$X(k)=X^*((-k))_N R_N(k)$ $\mathrm{Re}[X(k)]=\mathrm{Re}[X((-k))_N] R_N(k)$ $\mathrm{Im}[X(k)]=-\mathrm{Im}[X((-k))_N] R_N(k)$ $\lvert X(k)\rvert=\lvert X((-k))_N\rvert R_N(k)$ $\arg[X(k)]=-\arg[X((-k))_N] R_N(k)$
15. $x_{чp}(n)$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
16. $x_{нp}(n)$	$i\mathrm{Im}[X(k)]$

Таблица. Свойства дискретного преобразования Фурье

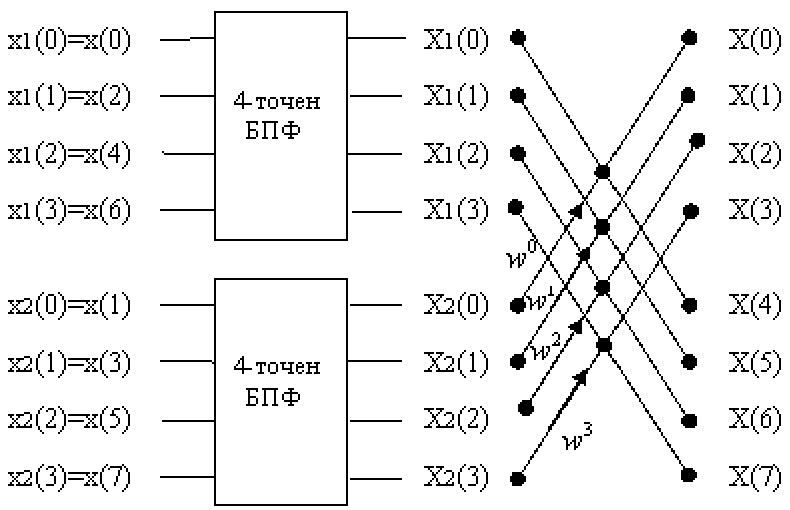

Рис. A

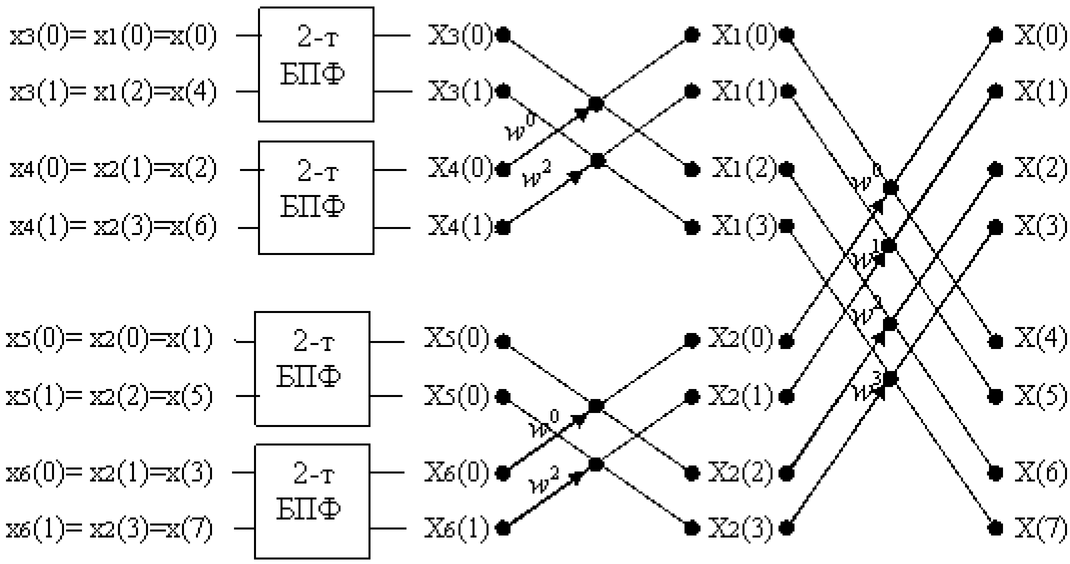

Рис. B

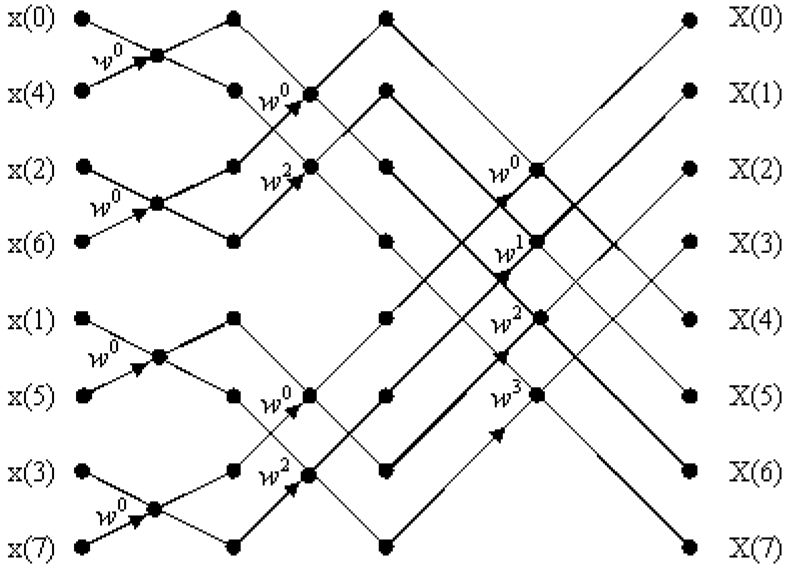

Рис. C

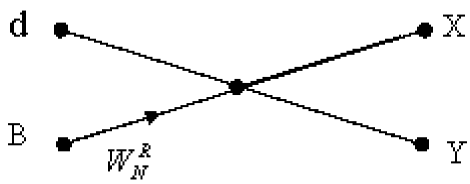

Рис. D

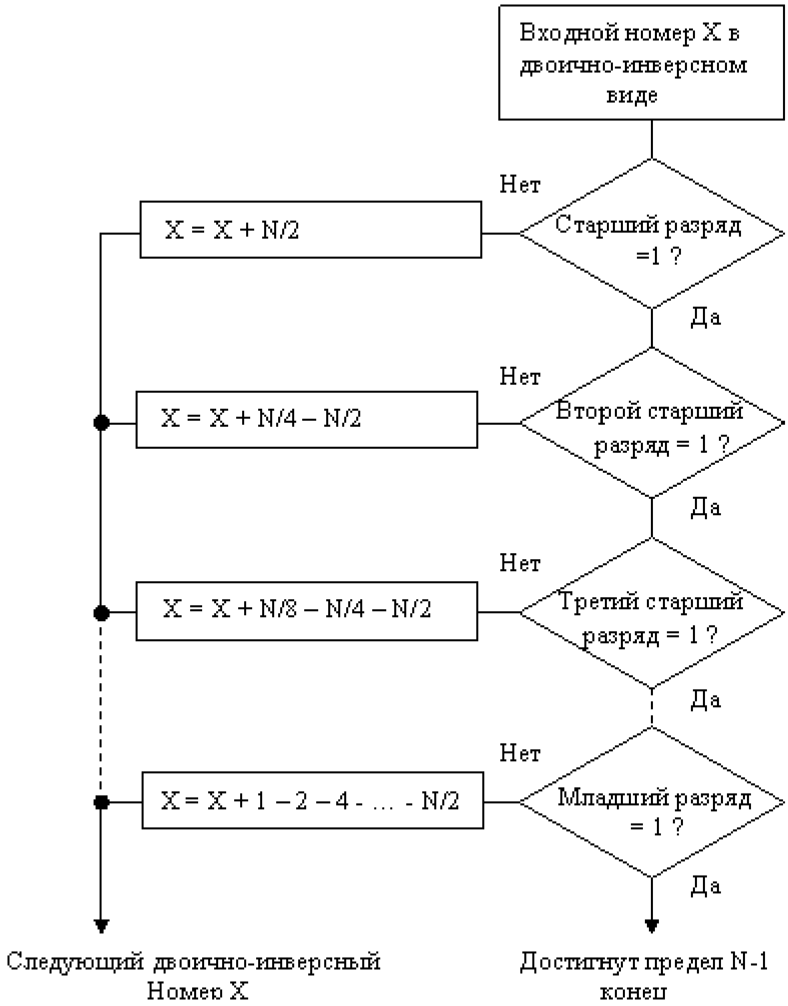
Входной номер X в двоично-инверсном виде
Нет
X = X + N/2
Старший разряд =1 ?
Да
Нет
X = X + N/4 – N/2
Второй старший разряд = 1 ?
Да
Нет
X = X + N/8 – N/4 – N/2
Третий старший разряд = 1 ?
Да
Нет
X = X + 1 – 2 – 4 - … - N/2
Младший разряд = 1 ?
Да
Следующий двоично-инверсный Номер X
Достигнут предел N-1 конец

Рис. Е