ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа обучающегося по направлению подготовки 44. 03.01 Педагогическое образование, профиль Математика заочной формы обучения, группы 02041351
Оскирко А.А.

Научный руководитель:
к.п.н., доц. Цецорина Т.А.

БЕЛГОРОД 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тема «Числовые последовательности» возникла в древности, и изучает различные последовательности, связанные с именами ученых, внесших вклад в развитие математической науки. Многие задачи, связанные с числовыми последовательностями появились в глубокой древности. Тема «Числовые последовательности» включена в программу основной школы и на базовом уровне основное внимание уделяется изучение простейших числовых последовательностей – арифметической и геометрической прогрессии.

Однако, в реальной жизни мы часто встречаемся с различного вида последовательностями. Многие из них используются в самых различных науках. Например, числа Фибоначчи используются в хронологии и периодизации древнейшей истории, в архитектуре, искусстве, музыке, биологии, астрономии, при прогнозировании цен, определяют форму греческих ваз и спиральных галактик, строение подсолнуха и домика улитки, лежат в основе Фэн-шуй. В «Справочнике по целочисленным последовательностям» Н. Слоуна собрано и упорядочено 2300 целочисленных последовательности, а значит, и область их применения очень широка.

Тема «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в курсе алгебры средней школы изучается обособленно, лишь в девятом классе, мало перекликаясь с другими разделами школьной программы. Но, несмотря на это, задачи, для решения которых необходимо знать не только формулы n-го члена и суммы первых n членов, но и свойства арифметической и геометрической прогрессий, предлагаются на ЕГЭ и на вступительных экзаменах в вузы. А для того, чтобы знания ученика были на достаточно высоком уровне, необходимо активизировать его познавательную деятельность при изучении прогрессий.

Геометрическая и арифметическая прогрессии играют очень важную роль не только в школьном курсе алгебры. Важность этого на первый взгляд небольшого раздела школьного курса заключается в его чрезвычайно широких областях применения в жизни. Например, в химии, при повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии. В литературе: «…Не мог он ямба от хорея, как мы не бились отличить…». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха. Ямб – это стихотворный размер с ударением на четных слогах 2, 4, 6, 8,… Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью прогрессии 2. Хорей – это стихотворный размер с ударением на нечетных слогах стиха. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7, ... и т.д. В заданиях ЕГЭ по математике также есть задачи на применение арифметической и геометрической прогрессий, но уже с практическим содержанием. Поэтому крайне важно дать полное описание этого курса, чтобы учащийся мог повторить уже известный ему из школьного курса материал, и даже почерпнуть много нового и интересного. В этом состоит актуальность темы выпускной квалификационной работы.

Цель работы: изучить особенности изложения темы «Последовательности» в школьном курсе математики; разработать для учащихся тест по типу ЕГЭ и методические рекомендации по данной теме.

Для достижения поставленной цели требуется выполнение следующих задач**:**

1. Рассмотреть теоретические основы темы исследования.
2. Проанализировать школьные учебники по данной теме с целью изучения данного вопроса.
3. Формировать навыки решения заданий по данной теме разного уровня сложности.
4. Предоставить учащимся различные задания по уровню сложности для обобщения, закрепления и углубления знаний по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» и подготовки к ЕГЭ.

Объектом исследования является процесс изложения темы «Последовательности» в школьном курсе математики.

Предмет исследования: особенности изучения арифметической и геометрической прогрессий.

При выполнении работы были использованы следующие методы исследования:

1. Изучение теоретических основ выбранной темы;
2. Анализ школьных учебников и материалов ЕГЭ по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»;
3. Самостоятельный отбор тестовых заданий по теме исследования;
4. Разработка методических рекомендаций по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы была определена её структура: ведение, теоретическая и практическая часть, заключение, список литературы, приложения.

Во введении обоснована актуальность, поставлены цели и задачи выпускной работы, перечислены методы для их решения.

В первой главе изложен весь теоретический материал по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Даются определения основных понятий, рассматриваются свойства членов прогрессий, сумма первых n-членов арифметической и геометрической прогрессий. Представлен анализ школьных учебников по изложению темы исследования.

Во второй главе представлена практическая область исследования по теме. А именно, разработан тест по типу ЕГЭ с его полным решением и представлены методические рекомендации для подготовки к ЕГЭ по данной теме.

В заключении приводятся итоги проделанной работы.

Апробация представленного занятия проводилась в период педагогической практики в МБОУ «СОШ» №31 г. Белгород.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Определение. Число a называется *пределом* последовательности x_n , если для любого положительного числа ε найдется член последовательности такой, что все члены последовательности x_n , следующие за ним, отстоят от a меньше, чем на ε.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности x_n , если в любом открытом промежутке, содержащем число a, содержатся все члены последовательности x_n , начиная с некоторого.

Теорема (о единственности предела). Если a – предел последовательности x_nи b – предел последовательности x_n , то $a = b$.

Доказательство. Предположим, что $a < b$. Возьмем $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Найдется такой номер N_1, что $\forall n > N_1$

$$x_n - a \ < \varepsilon \Rightarrow x_n \ < a_n + \varepsilon$$

также существует $N_2 : \forall n > N_2$

$$x_n - b \ < \varepsilon \Rightarrow x_n \ < b_n - \varepsilon$$

Возьмем n, которое большеN_1 и N_2. Тогда

$$\begin{matrix} a_n + \varepsilon, \\ b_n - \varepsilon, \end{matrix} \Rightarrow \ b_n - \varepsilon < a_n + \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon > b - a \Rightarrow \varepsilon > \frac{b-a}{2}$$

Обозначение. a есть предел x_n :

$\lim x_n = a$,

$x_n \to a$ – x_n стремится (сходится) к a,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, x_n \ n \to \infty$.

Определение. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Определение. Последовательность называется *строго возрастающей* (*строго убывающей)*, если каждый ее член, начиная со второго, больше (не меньше) предыдущего члена.

Последовательности (строго) возрастающая и (строго) убывающая называются (*строго*) *монотонными*.

Определение. Последовательность x_n называется *ограниченной*, если существует $M : \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \ \leq M$.

Теорема. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть a – предел последовательности x_n . Тогда найдется такой номер N, что $\forall n > N\ x_n - a \ < 1$

$a - 1 < x_n < a + 1,$

$A = \min\ a - 1, x_1, \cdots, x_n\ ,$

$B = \max\ a - 1, x_1, \cdots, x_n\ .$

Тогда $\forall n\ A \leq x_n \leq B$.

Замечание. Тем самым, мы доказали ограниченность последовательности x_n, поскольку, выбрав $M > \max\ \ A\ ,\ B\ \ $, получим $x_n \ \leq M$.

Определение. Говорят, что последовательность x_n *отделена от нуля*, если найдется такое положительное число c, что все члены этой последовательности по модулю больше c.

Теорема (о предельном переходе в неравенствах). Пусть a_n и b_n – последовательности, причем $\exists N : \forall n > N\ a_n \leq b_n$. Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$. Тогда $a \leq b$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. $a > b$. Рассмотрим промежутки

$U_1 = \ \ b - 1, \frac{a+b}{2}\ \ , U_2 = \ \frac{a+b}{2}, a - 1,\ \ ;$

$\exists N_1 : \forall n \geq N_1\ b_n \in U_1 \quad b_n \to b$

$\exists N_2 : \forall n \geq N_2\ a \in U_2 \quad a_n \to a$

Возьмем $N' = \max\ N, N_1, N_{2,}\ $. Тогда:$\forall n \geq N'$

$$a_n \leq b_n, a_n \in U_2, b_n \in U_1.$$

Получили противоречие, т.к.

$a_n \in U_2 \Longrightarrow a_n > \dfrac{a+b}{2},$

$b_n \in U_{12} \Longrightarrow b_n < \dfrac{a+b}{2}$

$b_n < a_n$.

Замечание. Если в условии теоремы заменить неравенство $a_n \leq b_n$на $a_n < b_n$, то все равно можно утверждать лишь то, что $a \leq b$. Действительно,

$$\begin{matrix} a_n = 0 \\ b_n = 1 \;\; n \end{matrix} \Longrightarrow \forall n \; a_n < b_n \; \begin{matrix} a_n \to 0, \\ b_n \to 0. \end{matrix}$$

Теорема (принцип сжатой последовательности, теорема о двух милиционерах). Пусть даны последовательности a_n , b_n , c_n и существует: $N : \forall n > N a_n \leq b_n \leq c_n$. Известно, что $a_n \to a$, $c_n \to a$, Тогда $b_n \to a$.

Доказательство. Возьмем произвольный промежуток $U : a \in U$.

$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \; a_n \in U \quad a_n \to a$,

$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \; c_n \in U \quad c_n \to a$.

Обозначим $N' = \max \; N, N_1, N_{2,}$. Тогда $\forall n > N'$

$a_n \in U, c_n \in U, a_n \leq b_n \leq c_n \Longrightarrow \forall n > N' \; b \in U$.

Значит, $a_n \to a$.

Замечание. Принцип сжатой последовательности является теоремой существования и не следует из теоремы о предельном переходе в неравенствах.

Определение. Говорят, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, если $\forall E > 0 \; \exists N$

$x_n \; > E, if \; n > N$

Последовательность x_n при этом называется *бесконечно большой*;

$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall E > 0 \; \exists N$.

$x_n > E, if \; n > N$

$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall E > 0 \; \exists N$.

$x_n < E, if \; n > N$.

Определение. Последовательность x_n называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Задачи.

1) Выясните, являются ли последовательности монотонными

1. $a_n = n^2 + 1$.

2. $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} - 1, a_1 = 1, a_2 = 2.$

2) Выясните, являются ли последовательности ограниченными

1. $a_n = n + 1.$

2. $a_{n+1} = \frac{1}{a_n+2} + 1, a_1 = 1.$

3) Последовательность a_n ограничена, а последовательность b_n неограничена. Выясните, какие из следующих последовательностей обязательно неограниченные, а какие могут быть неограниченными:

1. $x + n = a_n + b_n.$

2. $x_n = \frac{a_n}{b_n}.$

3. $x_n = \sqrt[3]{a_n} + \sqrt[5]{b_n}.$

3) Докажите, что следующие последовательности стремятся к нулю:

1. $a_n = \frac{1}{n-1}.$

2. $a_n = \frac{1}{n+3}.$

4) Докажите, что

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2.$

2. $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$

5) Приведите, если это возможно, примеры последовательностей, удовлетворяющим данным ниже условиям. Если это невозможно, объясните, почему.

1. x_n и y_n – расходящиеся, $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = 1.$

2. x_n – сходящаяся, y_n – расходящаяся, x_n, y_n – сходящаяся.

3. x_n и y_n – расходящиеся, $x_n \cdot y_n$ – сходящаяся.

4. x_n и y_n – расходящиеся, $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 1.$

Числовая последовательность – это числовое множество, каждый элемент которого имеет свой порядковый номер. Элементы этого множества называются членами последовательности. Порядковый номер элемента последовательности обозначается индексом:

a_1 – первый элемент последовательности;

a_5 – пятый элемент последовательности;

a_n– «энный» элемент последовательности, т.е. элемент, «стоящий в очереди» под номером n.

Между значением элемента последовательности и его порядковым номером существует зависимость. Следовательно, мы можем рассматривать последовательность как функцию, аргументом которой является порядковый номер элемента последовательности. Другими словами можно сказать, что последовательность – это функция от натурального аргумента:

$$a\ \ n\ \ = a_n$$

Последовательность можно задать тремя способами:

1. Последовательность можно задать с помощью таблицы. В этом случае мы просто задаем значение каждого члена последовательности.

Например, Некто решил заняться личным тайм–менеджментом, и для начала посчитать в течение недели, сколько времени он проводит ВКонтакте. Записывая время в таблицу, он получит последовательность, состоящую из семи элементов:

1	2	3	4	5	6	7
125	189	135	248	15	25	12

В первой строке таблицы указан номер дня недели, во второй – время в минутах. Мы видим, что $a_1 = 125$, то есть в понедельник Некто провел ВКонтакте 125 минут, $a_4 = 248$, то есть в четверг – 248 минут, а $a_5 = 15$, то есть в пятницу всего 15.

2. Последовательность можно задать с помощью формулы n–го члена.

В этом случае зависимость значения элемента последовательности от его номера выражается напрямую в виде формулы.

Например, если $a_n = n^2 - 4n$, то

$a_1 = 1^2 - 4 \times 1 = -3$

$a_5 = 5^2 - 4 \times 5 = 20$

$a_{k=1} = \ \ k + 1\ \ ^2 - 4 \times\ \ k + 1\ \ = k^2 - 2k - 3$

Чтобы найти значение элемента последовательности с заданным номером, мы номер элемента подставляем в формулу n–го члена.

То же самое мы делаем, если нужно найти значение функции, если известно значение аргумента. Мы значение аргумента подставляем вместо x в уравнение функции:

Если, например, $f(x) = x^2 - 4x$, то $f(1{,}2) = (1{,}2)^2 - 4 \times 1{,}2 = -3{,}36$

Еще раз замечу, что в последовательности, в отличие от произвольной числовой функции, аргументом может быть только натуральное число.

3. Последовательность можно задать с помощью формулы, выражающей зависимость значения члена последовательности с номером n от значения предыдущих членов. В этом случае нам недостаточно знать только номер члена последовательности, чтобы найти его значение. Нам нужно задать первый член или несколько первых членов последовательности.

Например, рассмотрим последовательность $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4$

Мы можем находить значения членов последовательности один за другим, начиная с третьего:

$b_3 = 2\,b_2 + b_1 = 8 + 2 = 10$

$b_4 = 2\,b_3 + b_2 = 20 + 4 = 24$

$b_5 = 2\,b_4 + b_3 = 48 + 10 = 58$

То есть каждый раз, чтобы найти значение n–го члена последовательности, мы возвращаемся к двум предыдущим. Такой способ задания последовательности называется рекуррентным, от латинского слова $recurro$ – возвращаться.

Теперь мы можем дать определение арифметической прогрессии. Арифметическая прогрессия – это простой частный случай числовой последовательности.

Свойства числовых последовательностей.

Числовая последовательность - частный случай числовой функции, поэтому ряд свойств функций рассматриваются и для последовательностей.

Последовательность (y_n) называют возрастающей, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_n < y_{n+1} < \cdots.$$

Последовательность (y_n) называют убывающей, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \cdots > y_n > y_{n+1} > \cdots.$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином - монотонные последовательности.

Пример 1. $y_1 = 1; y_n = n^2$ - возрастающая последовательность.

Пример 2. $y_1 = 1;\ y_n = -$ - убывающая последовательность.

Пример 3. $y_1 = 1;\ y_n = (n-1)^{n-1*\frac{1}{n}}$ - эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей.

Последовательность называется периодической, если существует такое натуральное число T, что начиная с некоторого n, выполняется равенство $y_n = y_{n+T}$. Число T называется длиной периода.

Пример. Последовательность $y_n = (-1)^n$ периодична с длиной периода $T = 2$.

1.1 Арифметическая прогрессия

Будем выписывать в порядке возрастания положительные четные числа. Первое такое число равно 2, второе 4, третье 6 и т.д. Получим последовательность 2, 4, 6, … .

Очевидно, что на четвертом месте этой последовательности будет число 8, на десятом - число 20 и т.д. Вообще для любого номера n можно указать соответствующее ему положительное четное число, оно равно 2n.

Рассмотрим еще одну последовательность. Будем выписывать в порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

Для любого номера n мы можем узнать соответствующую ему дробь, 1 она равна $\frac{1}{n+1}$.

Числа, образующие последовательность, называют соответственно первым, вторым и т.д. членами последовательности. Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена. Например, a_1, a_2, a_3 и т.д. (читают: «а - первое, а - второе, а - третье» и т.д.). Таким образом, член последовательности с номером n, или, как говорят, n-й член последовательности, обозначают a_n. Саму последовательность будем обозначать так: (a_n).

Заметим, что последовательность может содержать конечное число членов. В таком случае её называют конечной. Примером конечной последовательности служит последовательность двухзначных чисел: 10; 11; 12; 13;…, 98; 99.

Чтобы задать последовательность, нужно указать способ, позволяющий найти член последовательности с любым номером.

Часто последовательность задают с помощью формулы, выражающей её n-й член как функцию номера n. Такую формулу называют формулой n-го члена последовательности. Например, последовательность положительных четных чисел можно задать формулой $a_n = 2n$, а последовательность правильных дробей с числителем, равным 1, - формулой $b_n = \frac{1}{n+1}$.

Пример 1. Пусть последовательность задана формулой $y_n = n^2 - 3n$. Вычислим первые пять её членов.

Подставляя вместо n натуральные числа $1,2,3,4,5$, получаем: $y_1 = -2$, $y_2 = -2$, $y_3 = 0$, $y_4 = 4$, $y_5 = 10$.

Пример 2. Пусть первый член последовательности (a_n) равен 3, а каждый следующий член равен квадрату предыдущего, т.е. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2$

С помощью формулы $a_{n+1} = a_{n+1} = a_n^2$ можно по известному первому члену последовательности вычислить второй, затем по известному второму найти третий и т.д. Получим последовательность $3, 9, 81, 6561, \dots$.

Рассмотрим последовательность натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1: $1,5,9,13,17,21,\ldots$. Каждый её член, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену числа 4. Эта последовательность является примером арифметической прогрессии.

Определение. Арифметической прогрессией называется последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Важно отметить, последовательность ($a_п$) - арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие:

$$a_{т+1} = a_n + d, \qquad (1)$$

где d - некоторое число.

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна d, т.е. при любом натуральном n верно равенство: $a_{n+1} - a_n = d$.

Число d называют разностью арифметической прогрессии.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать первый её член и разность.

Приведем примеры:

Пример 1. Если $a_1=1$ и $d=1$, то получим арифметическую прогрессию: $1,2,3,4,5,\ldots$, члены которой - последовательные натуральные числа.

Пример 2. Если $a_1=1$ и $d=2$, то получим арифметическую прогрессию: $1,3,5,7,9,\ldots$, которая является последовательностью положительных нечетных чисел.

Пример 3. Если $a_1= -2$ и $d=-2$, то заданная арифметическая прогрессия: $-2,-4,0,8,10,\ldots$ является последовательностью отрицательных четных чисел.

Пример 4. Если $a_1=7$ и $d=0$, то имеем арифметическую прогрессию: $7, 7, 7, . .$, все члены которой равны между собой.

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой ее член, вычисляя последовательно второй, третий, четвертый и т. д. члены. Но для нахождения члена прогрессии с больший номером такой способ неудобен. Постараемся отыскать способ, требующий меньшей вычислительной работы [14].

По определению арифметической прогрессии

$a_2 = a_1 + d$,

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$,

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$,

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$.

Точно так же находим, что $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$, и вообще, чтобы найти a_n, нужно к a_1 прибавить $(n - 1)d$, т. е.

$$a_n = a_1 + d * (n-1) \qquad (2)$$

Мы получили формулу n-го члена арифметической прогрессии.

Докажем ее методом математической индукции.

1. При $n=1$ эта формула верна: $a_1=a$.

2. Предположим, что формула (2) верна при $n = k$, $k > 1$, т.е. $a_k = a_1 + d(k - 1)$.

3. По определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_к + d$. Подставляя сюда выражение для k-го члена, получим $a_{k+1} = a_1 + d(k - 1) + d = a + dk$, а это есть формула (2) при $n = k + 1$.

Из принципа математической индукции следует, что формула (2) верна для любого натурального n.

Что и требовалось доказать.

Приведем примеры решения задач с использованием этой формулы.

<u>Пример 1</u>. Последовательность (c_n) - арифметическая прогрессия, в которой $c_1 = 2,3$ и $d=0,45$. Найдем десятый и сотый член этой прогрессии.

Имеем: $c_{10} = 2,3 + 0,45 - 9 = 2,3 + 4,05 = 6,35$

$c_{100} = 2,3 + 0,45 - 99 = 2,3 + 44,55 = 46,85$.

<u>Пример 2</u>. Выясним, является ли число 71 членом арифметической прогрессии (x_n): $-10, -5,5, -1, 3,5, \ldots$.

В данной арифметической прогрессии $x_n = -10$ и $d = x_2 - x_1$, $d=-5,5-(-10) = 4,5$. Запишем формулу n-го члена прогрессии:

$x_n = -10 + 4{,}5(n - 1)$, т.е. $x_n = 4{,}5n - 14{,}5$.

Число 71 является членом арифметической прогрессии (x_n), если существует такое натуральное числи n, при котором значение выражения $(4{,}5n - 14{,}5)$ равно 71. Решим уравнение $4{,}5n - 14{,}5 = 71$.

Получим: $4{,}5n = 85{,}5$, $n = 19$.

Значит, число 71 является членом данной арифметической прогрессии.

Формулу n - го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ можно записать иначе: $a_n = dn + (a_1 - d)$.

Отсюда ясно, что любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида $a_n = кn + b$, где k и b - некоторые числа.

Верно и обратное: последовательность (a_n), заданная формулой вида

$A_n = kn + b$, где k и b - некоторые числа, является арифметической прогрессией.

Действительно, найдем разность $(n+1)$-го и n-го членов последовательности (a_n):

$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b) = kn + k + b - kn - b = k$

Значит, при любом n справедливо равенство $a_{n+1} = a_n + k$, и по определению последовательность (a_n) является арифметической прогрессией. Заметим, что разность этой прогрессии равна k.

Свойства арифметической прогрессии.

1. Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т.е. при $k > 2$ верной является формула

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}. \qquad (3)$$

Действительно, при $k \geq 2$ имеем $a_k = a_{k-1} + d$ и $a_k = a_{k+1} - d$. Складывая почленно эти равенства, получим $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, откуда следует (3).

2. У конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сумма членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов, т.е. для $k = 1, 2, \ldots, n$ верной является формула $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$. (4)

Действительно, в конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$ члены a_k и a_{n-k+1}равноотстоят от концов. По формуле (2) $a_k = a_1 + d(k - 1)$ и $a_{n-k+1} = a_1 + d(n - k)$. Сумма этих членов равна $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + d(n - 1)$ и равна сумме крайних членов $a_1 + a_n = 2a + d(n - 1)$ [12,15].

Пусть требуется найти сумму первых ста натуральных чисел. Покажем, как можно решить, эту задачу, не выполняя непосредственного сложения чисел.

Обозначим искомую сумму через S и запишем ее дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания, а во втором - в порядке убывания: $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$,

$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$.

Каждая пара чисел, расположенных друг под другом, в сумме дает 101. Число таких пар равно 100. Поэтому, сложив равенства почленно, получим:

$2S=101*100$, $s = \frac{101*100}{2} = 5050$.

Итак, $1+ 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = 5050$.

С помощью аналогичных рассуждений можно найти сумму первых членов любой арифметической прогрессии.

Сумма членов конечной арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов, т.е. если

$S_n = a_1 + a_2 + - + a_{n-1} + a_n$, то $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}$. (5) Действительно, если $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$, то $S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$.

Складывая почленно эти равенства и используя свойство 2, получаем $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$, откуда следует формула (5).

Приведем примеры:

<u>Пример 1</u>. Найдем сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии $1,3,5,\ldots$.

В данной арифметической прогрессии $a_1 = 1$, $d = 3,5 - 1 = 2,5$. По формуле n - го члена найдем двадцатый член прогрессии:

$$a_{20} = 1 + 2{,}5 \cdot 19 = 48{,}5$$

Теперь вычислим сумму первых двадцати членов:

$$S_{20} = \frac{1+48.8 \ *20}{2} = 49.5 * 10 = 495.$$

Заметим, что если заданы первый член и разность арифметической прогрессии, то удобно пользоваться формулой суммы, представленной в другом виде. Подставим в формулу (5) вместо $(a_п)$ выражение $a_1 + d(n - 1)$

получим: $S_n = \frac{a_1 + a_2 + d(n-1))n}{2}$, т.е. $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1))}{2} n$ (6)

Если для решения рассмотренной задачи воспользоваться формулой (6), то вычисления будут выглядеть так:

$$S_{20} = \frac{2*1+2.5*19}{2} * 20 = \ 2 + 47.5 \ * 10 = 495$$

<u>Пример 2</u>. Найдем сумму первых тридцати членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 5n - 4$.

Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, так как она задана формулой вида $a_n = kn + b$, где $k = 5$ и $k = -4$.

Найдем первый и тридцатый члены этой арифметической прогрессии:

$a_1 = 5*l - 4 = 1$, $a_2 = 5 * 30 - 4 = 146$.

Теперь по формуле (5) вычислим S_{30}:

$$S = \frac{1 + 146 \ * 30}{2} = 147 * 15 = 2205.$$

<u>Пример 3</u>. Найдем сумму 1 + 2 + 3 +…+ n, слагаемыми в которой являются все натуральные числа от 1 до n.

Применив формулу (5) к арифметической прогрессии 1; 2; 3;..., получим, что $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1+n \ *n}{2}$.

<u>Пример 4</u>. Найдем сумму всех натуральных чисел, кратных шести и не превосходящих 250.

Натуральные числа, кратные шести, образуют арифметическую прогрессию, которую можно задать формулой $a_n = 6n$. Чтобы выяснить, сколько членов этой прогрессии не превосходит 250, решим неравенство 6n < 250. Получим $n \leq 41\frac{2}{3}$.

Значит, число членов прогрессии, сумму которых надо найти, равно 41.

Имеем: $a_1 = 6, a_{41} = 6 * 41 = 246, S_{41} = \frac{6+246 \ *41}{2} = 5166.$

1.2 Геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательность, членами которой являются степени числа 2 с натуральными показателями: 2; 2^2; 2^3;2^4; …;

Каждый член этой последовательности, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на 2. Эта последовательность является примером геометрической прогрессии [1,3].

<u>Определение.</u> Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

Иначе говоря, последовательность (b_n) - геометрическая прогрессия, если для любого натурального n выполняются условия:

$$b_n \neq 0 \text{ и } b_{n+1} = b_n *q \qquad (1)$$

где q - некоторое число. Обозначим, например, через (b_n) последовательность натуральных степеней числа 2. В этом случае для любого натурального n верно равенство $b_{n+1} = b_n *2$; здесь $q = 2$.

Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т.е. при любой натуральном n верно равенство: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Число q называют знаменателем геометрической прогрессии.

Очевидно, что знаменатель геометрической прогрессии отличен от нуля.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и знаменатель.

Приведем примеры:

Пример 1. Если $b_1 = 1$ и $q = 0,1$, то получим геометрическую прогрессию: 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, ….

Пример 2. Условиями $b_1 = —2$ и $q = 3$ задается геометрическая прогрессия —2, —6, —13, —54, —162, ...

Пример 3. Если $b_1 = 4$ и $q = —3$, то имеем прогрессию: 4,-12,36,-103, 324,… .

Пример 4. Если $b_1 = 8$ и $q = 1$, то получим геометрическую прогрессию 8,8,8,... .

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии, можно найти последовательно второй, третий, а также любой её член:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q)q = b_1 \cdot q^2,$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2)q = b_1 \cdot q^3,$$
$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3)q = b_1 \cdot q^4.$$

Точно так же находим, что $b_6 = b_1 * q^5$ и т. д. Вообще, чтобы найти (b_n), мы должны b_1 умножить на q^{n-1}, т. е. $b_n = b_1 * q^{n-1}$. (2)

Мы получили формулу n-го члена геометрической прогрессии. Докажем ее методом математической индукции.

1. Формула (2), очевидно, верна при $n = 1$.

2. Предположим, что она верна и при $n = k$, $k \geq 1$, т.е. $b_k = b_n \bullet q^{k-1}$.

3. Из (1) следует $b_{k+1} = b_1 q^k$, то есть формула (2) верна и при $п = к + 1$.

Из принципа математической индукции следует, что формула (2) справедлива для любого натурального n [7].

Что и требовалось доказать.

Приведем примеры решения задач с использованием этой формулы. Пример 1. В геометрической прогрессии $b_1 = 0,8$ и $q = \frac{1}{2}$.Найдем b_{10}. По формуле n -го члена геометрической прогрессии

$$b_{10} = 0.8 * \frac{1}{2}^{10-1} = \frac{2^3}{10} * \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2^6 * 10} = \frac{1}{640}.$$

Пример 2. Найдем восьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 162$ и $b_3 = 18$.

Зная первый и третий члены геометрической прогрессии, можно найти ее знаменатель. Так как $b_3 = b_1 * q^2$, то $q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}$.

Решив уравнение, $q^2 = \frac{1}{9}$, найдем, что $q = \frac{1}{3}$ или $q = -\frac{1}{3}$.

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.

Если $q = \frac{1}{3}$, то $b_8 = b_1 * q^7 = 162 * (\frac{1}{3})^7 = \frac{2*3^4}{3^7} = \frac{2}{27}$.

Если $q = -\frac{1}{3}$, то $b_8 = b_1 * q^7 = 162 * (-\frac{1}{3})^7 = -\frac{2*3^4}{3^7} = -\frac{2}{27}$.

Задача имеет два решения: $b_8 = \frac{2}{27}$ или $b_8 = -\frac{2}{27}$.

Пример 3. После каждого, движения поршня разрежающего насоса из сосуда удаляется 20% находящегося в нем воздуха. Определим давление воздуха внутри сосуда после шести движений поршня, если первоначальное давление было 750 мм рт. ст.

Так как после каждого движения поршня из сосуда удаляется 20% имевшегося воздуха, то остается 80% воздуха. Чтобы узнать давление воздуха в сосуде после очередного движения поршня, нужно давление после предыдущего движения поршня умножить на 0,8.

Мы имеем геометрическую прогрессию, первый член которой равен 760, а знаменатель равен 0,8. Число, выражающее давление воздуха в сосуде (в мм рт. ст.) после шести движений поршня, является седьмым членом этой прогрессии. Оно равно $750*(0,8)^6$.

Произведя вычисления, получим:

$750 * (0,8)^6 \approx 750 * 0,26 \approx 200$ (мм. рт. ст.)

Свойства геометрической прогрессии.

1. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних членов, то есть при $k \geq 2$ верной является формула

$$b_k^2 = b_{k-1} * b_{k+1} \qquad (3)$$

Если все члены геометрической прогрессии положительны, то это свойство формулируется так: каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому его соседних членов, т.е. $b_k = \sqrt{b_{k-1} * b_{k+1}}$.

Действительно, при $k \geq 2$ имеем $b_k = b_{k-1} * q$ и $b_k = b_{k+1} * q^{-1}$. Перемножая почленно эти равенства, получим $b_k^2 = b_{k-1} * b_{k+1}$. А это и есть равенство (3).

2. У конечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, ..., b_n$ произведение членов, равноотстоящих от ее концов, равно произведению крайних членов, т.е.

$$b_k * b_{n-k+1} = b_1 * b_n \qquad (4)$$

Действительно, в конечной геометрической прогрессии $b_l, b_2, \ldots, b_n$ члены b_k и b_{n-k+1} равноотстоят от концов. По формуле (2) $b_k = b_1 * q^{k-1}$ и $b_{n-k+1} = b_1 * q^{n-k}$. Произведение этих членов $b_k * b_{n-k+1} = b_1^2 * q^{n-1}$и равно произведению крайних членов $b_1 * b_n = b_1^2 * q^{n-1}$.

Значит, $b_k * b_{n-k+1} = b_1 * b_n$. А это и есть равенство (4).

Древняя индийская легенда рассказывает, что изобретатель шахмат попросил в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую - в два раза больше, т. е. 2 зерна, на третью - еще в два раза больше, т. е. 4 зерна, и т. д. до 64-й клетки. Сколько зерен должен был получить изобретатель шахмат?

Число зерен, о которых идет речь, является суммой шестидесяти четырех членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен 2. Обозначим эту сумму через S:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Умножим обе части записанного равенства на знаменатель прогрессии, получим: $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}$.

Вычтем из второго равенства первое и проведем упрощения:

$$2S - S = (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63})$$

$$S = 2^{64} - 1.$$

Масса такого числа пшеничных зерен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Выведем теперь формулу суммы n первых членов произвольной геометрической прогрессии. Воспользуемся тем же приемом, с помощью которого была вычислена сумма S.

Пусть дана геометрическая прогрессия (b_n). Обозначим сумму n первых ее членов через S_n :

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n \qquad (5)$$

Умножим обе части этого равенства на q: $S_nq = b_1q+b_2q +...+b_{n-1}q+b_nq$.

Учитывая, что $b_1q = b_2$, $b_2q = b_3$, $b_{n-1}q = b_n$, получим:

$$S_nq = b_1 + b_2 + \dots + b_n + b_nq \qquad (6)$$

Вычтем почленно из равенства (6) равенство (5) и приведем подобные

$$S_nq - S_n = b_1q + b_2q + \dots + b_{n-1}q + b_nq - b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n ,$$

$$S_nq - S_n = b_nq - b_1.$$

Пусть $q \neq 1$, тогда $S_n = \frac{b_nq - b_1.}{q-1}$ (7)

Мы получили формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии, в которой $q \neq 1$. Если q = 1, то все члены прогрессии равны

первому члену и $S_n = nb_1$.

Заметим, что при решении многих задач удобно пользоваться формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии, записанной в другом виде. Подставим в формулу (7) вместо b_n выражение b_1q^{n-1} .

Получим: $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ если $q \neq 1$ (8)

<u>Пример 1</u>. Найдем сумму первых десяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 3$ и $q = \frac{1}{2}$.

Так как известны первый член и знаменатель прогрессии, то для решения задачи удобно воспользоваться формулой (8). Получим:

$$S_{10}=\frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{3\left(\frac{1}{1024}-1\right)}{-\frac{1}{2}}=-6\left(\frac{1}{1024}-1\right)=6-\frac{3}{512}=5\frac{509}{512}.$$

Пример 2. Найдем сумму $1+x+\ldots+x^{n-1}$ $(x\neq 1)$, слагаемые которой являются последовательными членами геометрической прогрессии $1; x; x^2, \ldots$

Первый член прогрессии равен 1, а знаменатель ранен x. Так как x^{n-1} является членом этой прогрессии с номером n, то задача состоит в нахождении суммы n первых её членов. Воспользуемся формулой (7):

$$S_n=\frac{x^{n-1}\cdot x-1}{x-1}=\frac{x^n-1}{x-1}.$$

Таким образом, $1+x+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$.

Умножим левую и правую части последнего равенства на x-1. Получим тождество $x^n-1=(x-1)(1+x+\ldots+x^{n-1})$.

Если по аналогии с конечной десятичной дробью разложить бесконечную десятичную дробь 0,3333... по разрядам, то получим сумму с бесконечным числом слагаемых: 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ...

Слагаемые в этой сумме являются членами геометрической прогрессии 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; …, у которой q = 0,1.

По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии имеем:

$S_n=\frac{0{,}3(0{,}1^{\,n}-1)}{0{,}1-1}=\frac{(0{,}1)^n-1}{-3}=\frac{1}{3}-\frac{(0{,}1)^n}{3}$.

При неограниченном увеличении числа слагаемых n выражение $(0{,}1)^n$ становится сколь угодно близким к нулю, а значит, и вся дробь неограниченно приближается к нулю, а значит, и вся дробь $\frac{(0{,}1)^n}{3}$ неограниченно стремится к нулю [11].

Действительно, если n = 2, то $\frac{(0{,}1)^n}{3}=\frac{0{,}01}{3}=\frac{1}{300}$; если n=3, то

$\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,001}{3} = \frac{1}{3000}$; если n=4, то $\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,001}{3} = \frac{1}{30000}$, если n=5, то $\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,00001}{3} = \frac{1}{300000}$;

Поэтому при неограниченном увеличении n разность $\frac{1}{3} - \frac{0,1^{\ n}}{3}$ становится сколь угодно близкой к числу 3 или, как говорят, стремится к числу $\frac{1}{3}$.

Таким образом, сумма n первых членов геометрической прогрессии 0,3;

0,03; 0,003; 0,0003; ... при неограниченном увеличении n стремится к числу $\frac{1}{3}$. Это утверждение записывают в виде равенства 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + … = $\frac{1}{3}$.

Число $\frac{1}{3}$ называют суммой бесконечной геометрической прогрессии 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; ... .

Рассмотрим теперь произвольную геометрическую прогрессию b_1; b_1q; b_1q^2; …, у которой |q| < 1.

Запишем формулу суммы n первых членов прогрессии: $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$.

Преобразуем выражение в правой части равенства:

$$\frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{b_1-b_1q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n.$$

Заметим, $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n$.

Можно доказать, что если |q| < 1, то при неограниченном увеличении n множитель q^n стремится к нулю, а значит, стремится к нулю и произведение $\frac{b_1}{1-q}q^n$. Поэтому при неограниченном увеличении n сумма S, стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$.

Число $\frac{b_1}{1-q}$ называют суммой бесконечной геометрической прогрессии (bn), у которой q < 1.

Это записывают так: $b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... = \frac{b_1}{1-q}$

Обозначив сумму прогрессии (b_n) буквой S, получим формулу

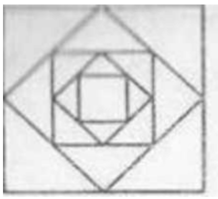
$$S=\frac{b_1}{1-q} \quad (9)$$

Заметим, что если |q| > 1, то сумма n первых членов геометрической прогрессии S_n при неограниченной увеличении n не стремится ни к какому числу. Бесконечная геометрическая прогрессия имеет сумму только при q < 1.

<u>Пример 1</u>. Найдем сумму бесконечной геометрической прогрессии 12; -4;$\frac{4}{3}$;…

У этой прогрессии q =-$\frac{1}{3}$. Значит, условие q <1выполняется. По формуле (9) получим: $S=\frac{12}{1+\frac{1}{3}}=\frac{12}{\frac{4}{3}}=9$.

<u>Пример 2</u>. Дан квадрат, сторона которого равна 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата, середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т. д. Найдем сумму площадей всех квадратов.



Из геометрических соображений ясно, что площадь каждого следующего квадрата равна половине площади предыдущего [16]. Таким образом, последовательность площадей квадратов является геометрической прогрессией, первый член которой равен 16, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$. Найдем сумму этой геометрической прогрессии: $S=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=32$.

Значит, сумма площадей всех квадратов равна 32 см^2.

<u>Пример 3</u>. Представим бесконечную десятичную периодическую дробь 0,(18) в виде обыкновенной дроби.

Запишем число 0,(18) в виде суммы:

0,(18)= 0,18 + 0,0018 + 0,000018 + …

Слагаемые в правой части равенства - члены геометрической прогрессии, у которой первый член равен 0,18, а знаменатель равен 0,01, т.е. q <1. Найдем сумму этой прогрессии: $S = \frac{0,18}{1-0,01} = \frac{0,18}{0,99} = \frac{2}{11}$.

Значит, 0,(18) =$\frac{2}{11}$.

Заметим, что аналогичным образом можно представить в виде обыкновенной дроби любую бесконечную десятичную периодическую дробь [20].

1.3 Анализ школьных учебников по изложению темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии»

Для более полного изучения теоритических основ темы «Последовательности» необходим анализ учебно-методической литературы.

Нами была рассмотрена следующая школьная литература: учебник по алгебре для 9 класса Ш.А. Алимова, учебник по алгебре для 9 класса Г.В. Дорофеева и учебник профильного уровня по алгебре для 9 класса (часть 1) А.Г. Мордковича. В рассмотренных учебниках исследуемая тема представлена примерно одинаково [21]. Изучение темы, например, начинается везде с четвёртой главы. Различия лишь в полноте изложения материала по тебе «Прогрессии».

Таблица 1. Сравнительный анализ темы «Последовательности» в школьном курсе математики.

	Ш.А. Алимов «Алгебра 9 класс»	**Г.В. Дорофеев «Алгебра 9 класс»**	**А.Г. Мордкович «Алгебра 9 класс. Часть 1» (проф. уровень)**
1.Понятие числовой последовательности.	Определение даётся на основе примера о лицевом счете в сберегательном банке. «Пусть на счете №1 лежит вклад рублей, на счете №2 лежит	Понятие числовой последовательност и рассматривается на примере чисел Фибоначчи. Определение однозначно не дается.	Функцию называют $y = f(x), x \in N$ функцией натурального аргумента или числовой последовательность ю и обозначают или (присутствует объяснение различных способов

	вклад рублей и т.д. Получается числовая последовательность $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$, где число всех счетов. Здесь каждому натуральному числу от 1 до n поставлено в соответствие число N- $nNa_{n.}$		задания числовой последовательности: аналитическое, словесное, рекуррентное, монотонная последовательность) $y=F(n)$ $y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n\ldots$
2.Определение арифметической прогрессии.	Числовая последовательность $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$, называется арифметической прогрессией, если для всех натуральных выполняется равенство: где $Na_{n+1}=a_n+d$, d-некоторое число.	Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная с второго, получается прибавлением к предыдущему одного и тоже числа.	Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа называют **d** арифметической прогрессией. Арифметическая прогрессия - это числовая последовательность заданная рекуррентно соотношениями: $(a_n)a_1=aa_n=a_{n+1}+d_n=2,3,4\ldots$
3. Свойства арифметической прогрессии.	Свойства арифметической прогрессии не выделены.	1.В последовательности каждый член больше предыдущего, следовательно, она возрастающая. 2.Каждый член последовательности меньше предыдущего, следовательно, она убывающая. (Свойства сформулированы неявно.)	1. Арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если $d > 0$ 2. Арифметическая прогрессия является убывающей последовательностью, если $d < 0$.
4.Сумма первых членов	Сумма первых членов	Сумма первых n членов	Сумма первых n членов арифметической

арифметической прогрессии.	арифметической прогрессии представлена в виде теоремы. Доказательство проводится на основе определения арифметической прогрессии n	арифметической прогрессии представлена в виде формулы. Вывод формулы предоставляется на примете метода Гаусса.	прогрессии представлена в виде формулы. Вывод формулы предоставляется на основе определения арифметической прогрессии.
5.Характеристическое свойство арифметической прогрессии.	Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов.	Характеристическое свойство арифметической прогрессии не выделено.	Теорема. Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, кроме первого (и последнего - в случае конечной последовательности) равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов.
б. Определение геометрической прогрессии.	Числовая последовательность $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$, называется геометрической прогрессией, если для всех натуральных выполняется равенство: $nb_{n+1}=b_nqb_n\neq0q$	Геометрической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одного и тоже не равное нулю число.	Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и тоже число, называют q геометрической прогрессией. Геометрическая прогрессия - это числовая последовательность, заданная рекуррентно соотношениями: $(b_n)b_1=b$, $b_n=b_{n-1*}qn=2,3,4\ldots bqb\neq0,q\neq0$
7.Свойства геометрической прогрессии.	Свойства геометрической прогрессии не выделены.	1. Если $q > 1$, то такая прогрессия является возрастающей. 2. Если $0 < q < 1$,	1. Геометрическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если $b_1 > 0 > q > 1$

		то такая прогрессия является убывающей. (Свойства сформулированы неявно.)	2. Геометрическая прогрессия является убывающей последовательностью, если $b_1 > 0 >$ $0 < q < 1$
8.Сумма первых членов геометрической прогрессии n	Сумма первых членов арифметической прогрессии представлена в виде теоремы. Доказательство проводится на основе определения геометрической прогрессии n	Сумма первых членов геометрической прогрессии представлена в виде формулы n	Сумма первых членов геометрической прогрессии представлена в виде формулы n
9.Характеристическое свойство геометрической прогрессии	Если все члены геометрической прогрессии положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, т.е. каждый член прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов.	Характеристическое свойство геометрической прогрессии не выделено.	Теорема. Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, кроме первого (и последнего - в случае конечной последовательности, равен произведению Предшествующего и последующего членов.

Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений.

Изучение арифметической и геометрической прогрессий в данном учебнике начинается с главы IV «Прогрессии».

В §17 «Числовая последовательность» вводится определение числовой последовательности, а так же бесконечной последовательности и - го члена последовательности, рассматриваются примеры.

В §18 «Арифметическая прогрессия» дается определение арифметической прогрессии, формулировка характеристического свойства арифметической прогрессии. Далее вводится формула - го члена арифметической прогрессии, рассматриваются примеры.

В §19 «Сумма первых n членов арифметической прогрессии» теорема о сумме первых n членов арифметической прогрессии. Приводится её доказательство. Рассматриваются примеры.

§20 «Геометрическая прогрессия». В этом параграфе рассказывается определение геометрической прогрессии, характеристическое свойство геометрической прогрессии. Далее вводится формула - го члена геометрической прогрессии, рассматриваются примеры.

В §21 «Сумма первых членов геометрической прогрессии» приводится теорема о сумме первых членов геометрической прогрессии, и её доказательство.

В конце главы выделены отдельным пунктом «Упражнения к главе IV».

Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. Алгебра. 9 класс [7].

В данном учебнике изучение прогрессий начинается с 4 главы «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

В пункте 4.1. «Числовые последовательности», понятие числовой последовательности рассматривается на примере чисел Фибоначчи. Определение однозначно не дается. Далее приводятся примеры.

В пункте 4.2. «Арифметическая прогрессия» приводятся определение арифметической прогрессии, и объясняется что такое разность арифметической прогрессии. Приводятся примеры.

В пункте 4.3. «Сумма первых членов арифметической прогрессии» водятся формула суммы первых n членов арифметической прогрессии. Вывод формулы предоставляется на примете метода Гаусса. Рассматриваются примеры.

В пункте 4.4. «Геометрическая прогрессия» на примере графика функции даётся определение геометрической прогрессии, объясняется, что такое знаменатель геометрической прогрессии. Затем выводится формула n-го члена геометрической прогрессии.

Пункт 4.5. «Сумма первых членов геометрической прогрессии» содержит формулу суммы первых членов арифметической прогрессии и её вывод. Также в пункте рассматриваются примеры решений различных заданий.

Также в главе содержатся пункты 4.6. «Простые и сложные проценты», 4.7 «Сумма квадратов первых n натуральных чисел» и пункт 4.8 «Треугольник Паскаля» с пометкой «для тех, кому интересно».

После каждого пункта приведен ряд упражнения, которые имеют разный уровень сложности: часть А и часть В.

Также в конце главы выделены отдельным подпунктом «Дополнительные задания к главе».

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра. 9 класс [4].

Арифметическая и геометрическая прогрессии начинают изучаться с 4 главы «Прогрессии».

Параграф 15 «Числовые последовательности» делится на 5 пунктов: 1 - Определение числовой последовательности; 2 - Аналитическое задание последовательности; 3 -Словесное задание последовательности; 4 - Рекуррентное задание последовательности; 5 - Монотонные последовательности. В 1 пункте дается определение последовательности и говорится о существующих способах её задания. Во 2-4 пунктах подробно объясняются способы задания последовательностей, а в 5 пункте приводятся свойства последовательности. Также в пунктах рассматриваются различные примеры.

Параграф 16 «Арифметическая прогрессия» состоит из 4х пунктов: 1 - Основные понятия; 2 - Формула n-го члена арифметической прогрессии; 3 - Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии; 4 - Характеристическое свойство арифметической прогрессии. В первом пункте говорится о том, что такое арифметическая прогрессия, что называют разностью прогрессий, приводятся примеры. Во 2 пункте выводится формула n-го члена арифметической прогрессии, арифметическая прогрессия рассматривается как линейная функция. В 3 пункте приводится вывод формулы «сумма членов конечной арифметической прогрессии» и различные примеры для усвоения этой формулы. В 4 пункте представлено характеристическое свойство арифметической прогрессии в виде теоремы с доказательством. Далее рассматривается примеры.

В 17 параграфе «Геометрическая прогрессия» представлено 5 пунктов. В 1 пункте «Основные понятия» говорится, что такое геометрическая прогрессия, что называется конечной геометрической прогрессией. В пункте 2 «Формула n-го члена геометрической прогрессии» представлен вывод формулы. В пункте 3 «Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии» выводится формула суммы членов конечной геометрической прогрессии, и приводятся различные примеры для её усвоения. 4 пункт – характеристическое свойство геометрической прогрессии» содержит непосредственно само характеристическое свойство с доказательством и различные примеры для понимания. 5 пункт - «Прогрессии и банковские расчеты» содержит пример практического характера. В нём описывается использование геометрической прогрессии в повседневной жизни, в данном случае, в банковской сфере.

Также в конце главы выделен отдельный подпункт «Основные результаты», в котором кратко написано всё, что должны были усвоить учащиеся при изучении данной темы.

В задачнике «Алгебра 9 класс» к данному учебнику к каждому параграфу приведены задания трех уровней: обязательные задачи, более сложные задачи и трудные задачи. Большое количество и разнообразие упражнений дает возможность закрепить изученный материал [1,2,3,4,5,6,7,8].

Анализ учебников показал, что в школьном курсе математики тема «Последовательности» имеет достаточно большое значение. Стоит обратить особое внимание на то, что тема изучается только в девятом классе. А это значит, что для подготовки и успешного написания ЕГЭ учащимся необходим дополнительные упражнения по теме «Прогрессии».

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

2.1 Методические рекомендации к изучению теоретического материала темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии»

Согласно методике изучения понятий, важной является работа с признаками понятия, зафиксированными в его определении. Выделению этих признаков способствует логико-математический анализ определения. Выделенные признаки помогают составить упражнения на подведение под понятие (упражнения на «да» и «нет»). Для этого полезно составить таблицу учета (или опровержения) соответствующих признаков. К тому же таблица позволяет проанализировать составленные примеры по объему (рассмотрены ли все частные случаи, учтены ли все существенные признаки и т.д.).

При подготовке к уроку учителю необходимо провести анализ логико-математической структуры определения с целью выделения существенных признаков понятия, положенных в основу определения, что позволит составить примеры на подведение объектов под определение.

Проведем анализ определения: арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом,

Термин - арифметическая прогрессия.

Род - последовательность.

Видовые отличия - каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (или в таком виде: $a_{n+1} = a_n+d$ где a_1 и d заданы, n -любое натуральное),

Это определение рекурсивное, так как в видовых отличиях указаны действия получения последующего члена, если известен предыдущий. Видовые отличия можно расписать подробнее: второй член равен сумме первого и какого-то числа, третий равен второму, сложенному с этим же числом, и т.д.

Выполним действия подведения объектов под определение, результаты занесем в таблицу (табл. 2).

Таблица 2. Математический анализ определения

№ п/п	Примеры	Последовательность (да – «+», нет – «-»)	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (да – «+», нет – «-»)	Вывод: данный объект есть арифметическая прогрессия (да – «+», нет – «-»)
1	0;-5;-10;-15; …;-5(n-1), …	+	+	+
2	1;3;5;10; …;	+	-	-
3	x+7…;	-	-	-
4	7;7;7;7; …;	+	+	+
5	$\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,1,\frac{1}{3}\ldots$;	+	+	+

В таблице представлены вес виды арифметической прогрессии; возрастающая, убывающая, постоянная, конечная, бесконечная, разность может быть положительным, отрицательным числом и нулем; члены прогрессии могут быть натуральными, целыми, дробными [,2,3,4,5,6,7,8,9].

Приведем фрагмент урока по введению понятия арифметической прогрессии.

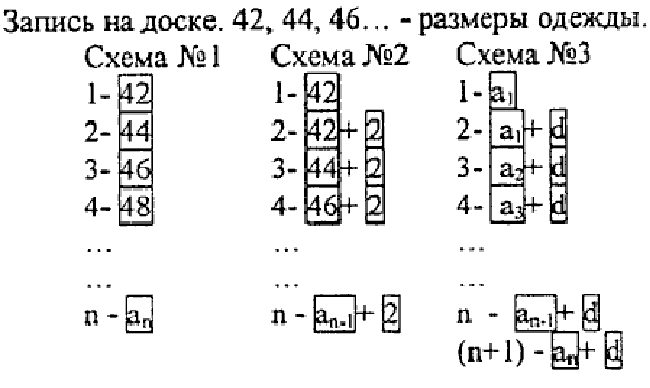


Рис. 1 Схема прогрессии

Рассмотрим последовательность размеров одежды. Назовите первый, второй, третий и так далее члены заданной последовательности. (Ученики отвечают по очереди. Учитель заполняет окошки схемы №1).

Какая закономерность прослеживается в записи членов этой последовательности? Если возникает затруднение в ответе на этот вопрос, то предлагается дополнительное задание. Сравним каждый последующий член последовательности с предыдущим, заполнив окошки рисунка №1.

Итак, каждый член последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 2, Такая последовательность является примером арифметической прогрессии.

Определение. Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Это определение можно записать в виде формулы, которую получим, заполнив окошки схемы №3.

Пусть члены прогрессии записаны в виде: a_1; a_2; a_3;...; a_n..

Число, которое прибавляется к каждому члену прогрессии, может быть не только 2, обозначим его буквой d (заполняются окошки схемы №3).

Итак, для любого натурального n выполняется условие $a_{n+1}=a_n+d$, где d - некоторое число.

d - называют разностью арифметической прогрессии, так как $d=a_{n+1}-a_n$.

Требования, которые предъявляются школьной программой по математике, рассчитаны на, так называемого, «среднего» ученика. Однако уже с начальных классов происходит расслоение ученического коллектива: на тех, кто легко и с интересом усваивает программный материал по математике, на тех, кто добивается лишь удовлетворительных результатов при изучении, и тех, кому с легкость даётся успешное изучение математики.

При подборе заданий для данной темы учитель может воспользоваться предложенным набором задач, может дополнять этот набор и видоизменять его, основываясь на уровне подготовленности учащихся, на анализе учебно-методического комплекта и на рефлексии собственного опыта.

Представим в качестве примера урок-лекцию «Сравнение арифметической и геометрической прогрессий».

Тема урока	Сравнение арифметической и геометрической прогрессий
Тип урока	Урок-лекция
Цель урока	сформировать понятие арифметической прогрессии и ее компонентов; научить применять полученные знания при решении основных типов задач на арифметическую прогрессию.
Задачи	Обучающая - ввести определения арифметической, геометрической прогрессий; вывести формулы n-го члена, суммы n первых членов, суммы бесконечной геометрической прогрессии при $\|q\| < 1$; познакомить учащихся с характеристическим свойством, которым обладают члены прогрессий; выработать общие рекомендации по выполнению заданий, содержащих данные прогрессии. Развивающая - продолжить дальнейшую работу по выработке умения сравнивать математические понятия, находить сходства и различия, умения наблюдать, подмечать закономерности, проводить рассуждения по аналогии; сформировать умение строить и интерпретировать математическую модель некоторой реальной ситуации. Воспитывающая - содействовать воспитанию интереса к математике и ее приложениям, активности, умению общаться, аргументировано отстаивать свои взгляды.
Планируемые результаты обучения	Предметные: • Знать определения арифметической и геометрической прогрессий, характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий, формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессий, формулы для нахождения суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий, • Уметь применять теоретические знания для решения основных типов заданий по теме. Личностные: стремление к саморазвитию, формирование самооценки Метапредметные: освоение обучающимися компонентов учебной деятельности, умение учиться в общении со сверстниками.
УУД	Личностные УУД: развитие познавательных интересов, учебных мотивов, оценка и самооценка; Регулятивные УУД: целеполагание - как способность соотносить то, что уже известно и усвоено, и то, что еще неизвестно; планирование - как определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата; оценка - как выделение и осознание того, что уже освоено и что еще подлежит усвоению; осознание качества и уровня усвоения; Коммуникативные УУД: включаемость в коллективное обсуждение

	вопросов, постановка вопросов, умение слушать и вступать в диалог, инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации, умение аргументировать свою точку зрения Познавательные УУД: выделение и формулирование познавательной цели, поиск и выделение необходимой информации, выбор способа действия, умение осознанно применять полученные знания на практике, умение осознанно строить речевое высказывание в устной форме.
Основные понятия	Арифметическая и геометрическая прогрессии, разность арифметической прогрессии, знаменатель геометрической прогрессии, сумма n-членов прогрессии.
Ресурсы	Рисунки к задачам, сравнительная таблица «Виды последовательности», портреты Гаусса, Л.Н. Толстого, презентация к уроку.

Ход урока

Эпиграф к уроку: *«Сравнение есть основа всякого понимания и всякого мышления, чтобы какой-нибудь предмет был понят ясно, отличайте его от самых сходных с ним предметов и находите сходство с самыми отдельными от него предметами, тогда только вы выясните себе все существенные признаки, а это значит - понять предмет»*. (К.Д. Ушинский)

1. Подготовительная работа.

Формулирование определения умения сравнивать: «Сравнение - сопоставление объектов с целью выявления черт сходства и черт различия между ними. Суждения, выражающие результат сравнения, служат цели раскрытия содержания понятий сравниваемых объектов». (Философский словарь)

1. Выделение объектов исследования.

Сравнить между собой последовательности:

1) 2, 7, 9, 12,…;

2) 3, 5, 7, 9, 11, …;

3) 4, 8, 16, 32, …;

4) -17, 25, 36, 2, 18, …;

5) -1, 2, -4, 8, -16, …;

6) 10, 9, 8, 7, 6, …;

7) 1,$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …;

8) $6,2,\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$;

9) 3,3,3,…;

10) $4,2,1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$;

11) 1, -3, 9, -27, 81, …;

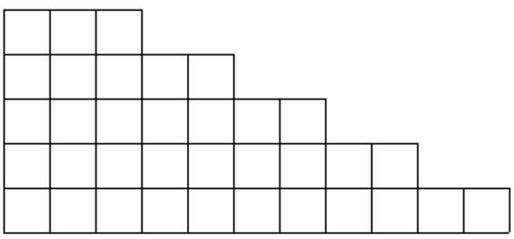
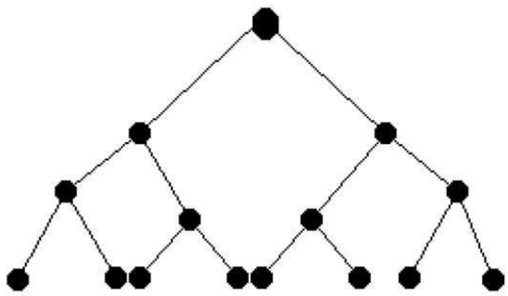
12) -1, -1, -1, . …

а) Опишите закономерность, с помощью которой вы это сделали?

б) Объедините последовательности в группы.

Вывод: Сравнивая между собой эти последовательности, учащиеся обнаружат среди них такие, которые образованы при помощи одного и того же общего для всех свойства, а затем установят способ их конструирования.

<u>2. Обнаружение свойств изучаемых объектов, которые являются основанием для определения.</u>

На доску слева проецируется задача, приводящая к арифметической, а справа - к геометрической прогрессии. **Задача.** Рабочий выложил плитку следующим образом: в первом ряду - 3 плитки, во втором - 5 плиток и т.д., увеличивая каждый ряд на 2 плитки. Сколько плиток понадобиться для седьмого ряда? 	**Задача** В благоприятных условиях бактерии размножаются так, что на протяжении одной минуты одна из них делится на две. Указать количество бактерий, рожденных одной бактерией за 7 минут. 

Вопросы к задачам:

1. Записать последовательность в соответствии с условием задачи.
2. Указать последующий, предыдущий члены. Чем они отличаются?

3. Найти разность между предыдущим и последующими членами в первой задаче и частное от деления последующего члена на предыдущий во второй задаче.

4. Дать определение арифметической (геометрической) прогрессии.

2. Учебно-познавательная работа учащихся по самостоятельному приобретению новых знаний.

«Прогрессия» - латинское слово, означающее «движение вперед», было введено римским автором Боэцием (VI век) и понималось в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Предлагается разделить страницу тетради на две части и слева написать «Арифметическая прогрессия», а справа «Геометрическая прогрессия». Всю работу школьники проделывают на доске и в тетрадях одновременно для обеих прогрессий (табл. 3).

Таблица 3. Сравнение прогрессий.

Арифметическая прогрессия	**Геометрическая прогрессия**
Определение	
3, 5, 7, 9 ,11 ,13 ,15 ,… 5 = 3 + 2; 7 = 5 + 2; … Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом a_n . $a_{n+1}=a_n+d$ *d* - разность прогрессии, где $d=a_{n+1}-a_n$	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … 2 = 12; 4 = 2 • 2; 8 = 4 • 2; ... Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число b_n $b_1; b_2; b_3; \ldots$ $b_{n+1}=b_n * q$ *q* - знаменатель прогрессии, где
(В задании № 1 указать разность (знаменатель) прогрессии, дать понятие возрастающей или убывающей прогрессии)	
Задание прогрессии	
a_1 и d a) $a_1=3$, d=2 3;5;7;9;… b) a_{20} - ? ($a_{20}=41$)	b_1 и q a) $b_1=1$, d=2 1;2;4;8;16;… b) b_{10} - ? ($b_{10}=215$)

Работа по выводу формулы n - ого члена проводится самостоятельно по вариантам, затем делаем вывод и записываем формулы $a_n(b_n)$. Далее предложить учащимся сравнить прогрессии, изобразив графически, зависимость *n* - ого члена от порядкового номера, используя данные приведенных выше задач.

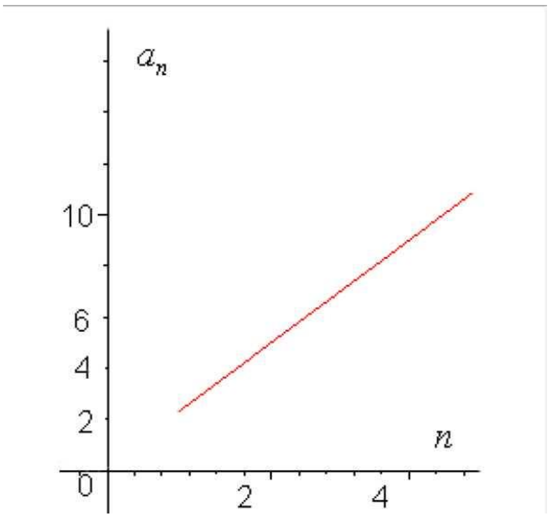
<table>
<tr>
<td>

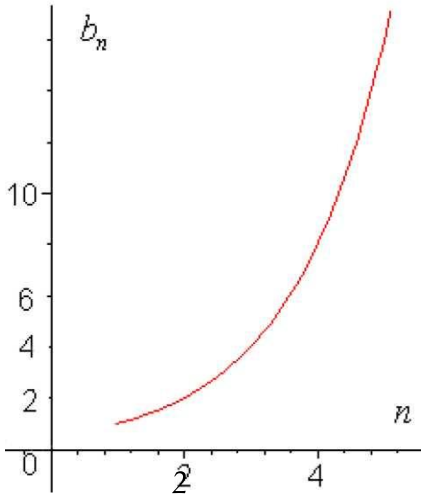
Рис. 4</td>
<td>

Рис.5</td>
</tr>
<tr>
<td>Разность двух рядом стоящих членов остается одно и та же, вследствие чего члены прогрессии возрастают (убывают) равномерно.
Отсюда ясно, что любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида an=kn+b, где k,b – некоторые числа. Верно и обратное.</td>
<td>Разность двух соседних членов увеличивается по мере удаления их от начала ряда; вследствие этого, члены такой прогрессии, по мере их удаления от начала ряда, возрастают все быстрее и быстрее, что наглядно изображено на рис. 5. Данная зависимость представляет собой показательную функцию, с которой учащиеся познакомятся в старших классах.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Характеристическое свойство.
Вопросы и задания учащимся:
1) Найти среднее арифметическое (геометрическое) чисел 2 и 8. Записать найденное число с данными в порядке возрастания. Образуют ли эти числа арифметическую (геометрическую) прогрессию?</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{2+8}{2} = 5; 2; 5; 8;$</td>
<td>$\sqrt{2 * 8} = 4; 2; 4; 8;$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">2) Справедлива ли эта зависимость для трех последовательных членов рассматриваемых последовательностей?</td>
</tr>
<tr>
<td>3;5;7;9;11;…;
$\frac{3+7}{2} = 5;\ \frac{5+9}{2} = 7; \dots;$</td>
<td>1;2;4;8;16;…;
$\sqrt{1 * 4} = 2;\quad \sqrt{2 * 8} = 4; \dots;$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">3)Доказать, что для всех прогрессий справедлива закономерность:</td>
</tr>
<tr>
<td>$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$</td>
<td>$b_{n+1}^2 = b_n * b_{n+2};$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Доказательство провести по вариантам и обменяться мнениями:</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$;
$2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$;
$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$</td>
<td>$b_{n+1}+b_n=b_{n+2}+b_{n+1}$;
$b_{n+1}^2=b_n * b_{n+2}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

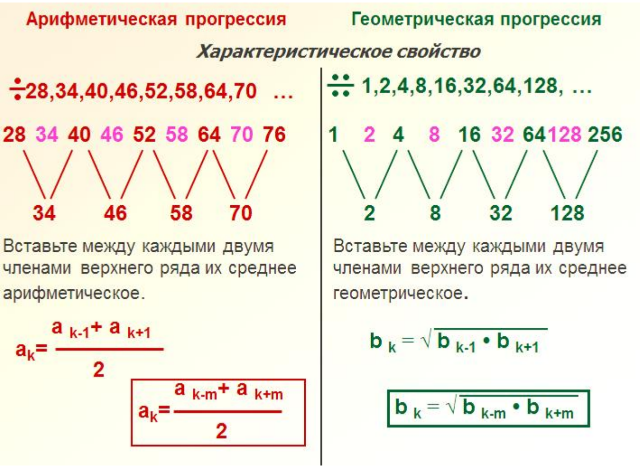


Рис.6
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Следствие</td>
</tr>
<tr>
<td>Из определения разности следует, что $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots$, т.е. сумма членов, равноудаленных от концов прогрессии, есть величина постоянная.</td>
<td>Из определения знаменателя следует, что $b_1*b_2=b_2*b_{n-1}=\ldots$, т.е. произведение членов, равноудалённых от концов прогрессии, есть величина постоянная.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Формула суммы n первых членов
S_n - сумма</td>
</tr>
<tr>
<td>Вернемся задаче: Сколько потребуется рабочему плиток, чтобы выложить 5 рядов? Рассуждение поясним на рис. 6.

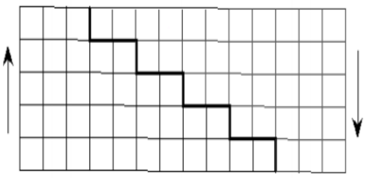


Рис. 7

Сумму 3+5+7+9+11 можно изобразить так, как показано на рис. 6 и из двух таких фигурок составить прямоугольник , тогда рабочему потребуется (5 *14) +2 плиток. Продолжим рассуждения: S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11. Напишем в обратном порядке: S = 11 + 9 + 7 + 5 + 3. И сложим эти равенства: S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + + 11 + 9 + 7 + 5+ 3.

В каждом столбце стоят 2 числа, дающие в сумме 14. Поэтому:

$2S=5*14$, $S=\frac{5*14}{2}=35$.

Вывод: в общем случае будет n столбцов с</td>
<td>Учащимся предлагается задача, при решении которой возникает необходимость в выводе новой формулы. «Индийский царь Шерам призвал к себе изобретателя шахмат, ученого Сету, и предложил, чтобы он сам выбрал себе награду за создание интересной и мудрой игры. Царя изумила скромность просьбы, услышанной им от изобретателя: тот попросил выдать ему за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую - два, за третью - еще в два раза больше и т.д. Сколько зерен должен получить изобретатель шахмат?» Возникает необходимость найти S_{64}, где

$a_1=1;\ q=2;\ n=64$. Имеем:

$S_{64}=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{62}+2^{63}$.

Умножим обе части равенства на знаменатель $q=2$; получим $2S=2+2^2+2^3+2^4\ldots+2^{63}+2^{64}$. Вычтем почленно</td>
</tr>
</table>

одинаковой суммой, равной сумме первого и последнего членов. Поэтому $S_n = \frac{a_1+a_n \ *n}{2}$. **Задача:** найти сумму первых ста натуральных чисел 1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100? Используя исторический материал, рассказать ребятам историю о знаменитом немецком математике К. Гауссе (1777-1855 г.г.), который обнаружил выдающиеся способности к математике. Учитель предложил сложить все натуральные числа от 1 до 100. Маленький Гаусс решил эту задачу за минуту. Сообразив, что 1 + 100, 2 + 99 и т.д. равны, он умножил 101 • 50 = 5050. Иначе говоря, он заметил закономерность, которая присуща арифметической прогрессии. Заметим, что если заданы первый член и разность, то удобно пользоваться формулой суммы, представленной в другом виде. Так как $a_n = a_1 + \ n-1 \ * d,$ то $S_n = \frac{a_1+a_2+d(n-1)}{2} * n,$ $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} * n$	из второго равенства первое и проведем упрощения: *2S- S=(2 +2^2 +2^3 +2^4..Л2^{63} +2^{64})--* *(1+2+2^2+2^3+...+2^{62}+2^{63}X S$_{64}$=2^{64}* Эта задача привлекла внимание Л.Н. Толстого. Приведем часть его расчета (кодоскоп): 1кл. - 1 2кл. - 2 3кл. – 4 … 3,5 кл. - 17 179 869 184 … 6,4 кл. – 9 223 372 036 854 775 808 Общее число зерен 18 446 744 073 709 551 615. Масса такого числа зерен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени. Воспользуемся тем же приемом, с помощью которого была вычислена сумма $\boldsymbol{S_{64}}$ (Предложить учащимся самостоятельно получить формулу суммы n первых членов). $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, если q≠1, $S_n = \frac{b_1(q-b_1)}{q-1}$, если q≠1, Если q=1, то $b_1=b_2=b_3=\ldots$, то $S_n=n*b_1$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при |q| < 1

Особого внимания заслуживает бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, где |q| < 1, и формула суммы членов такой последовательности. При сознательном и глубоком изучении математики у учащихся может возникнуть вопрос: каким образом сумма бесконечного числа слагаемых может быть конечным, вполне определенным числом? Это лучше всего объяснить на примерах. Один из «парадоксов Зенона» (древнегреческого философа) состоит в следующем (в изложении Льва Толстого в «Войне и мире», т. 3, ч. 3). … Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллесидет в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, черепаха пройдет одну сотую и т.д. до бесконечности. Задача представлялась древним неразрешимой.

Отрезки, последовательно пробегаемые Ахиллесом, составляют геометрическую прогрессию

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

со знаменателем 0,1. (за единицу принимаем начальное расстояние между Ахиллесом и черепахой). Общее расстояние, пройденное Ахиллесом до встречи с черепахой, есть «сумма бесконечного числа членов»:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

Способ 1. Обозначим сумму через S:

Тогда $S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$, тогда $10S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 10 + S,$

$S = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

Способ 2. Будем добавлять слагаемые по одному:

$$1 + \frac{1}{10} = 1,1$$

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = 1,11$$

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = 1,111$$

В итоге получится 1,1111…, что равно $1\frac{1}{9}$. (так как $\frac{1}{9}$.= 1,1111…).

Способ 3. По формуле суммы геометрической прогрессии:

$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$. В нашем случае $q = \frac{1}{10}$, а n – бесконечно. Тогда q^n бесконечно мало (ведь с ростом n число $(\frac{1}{10})^n$ быстро убывает и им можно пренебречь. Получаем формулу: $1+q+q^2+q^3+\ldots q^{n-1}$.

Способ 4: Здравый смысл подсказывает, что Ахиллес догонит черепаху, пробежав некоторое расстояние S. За это время черепаха, скорость которой в 10 раз меньше, проползает расстояние S/10 и расстояние между ними уменьшится на

$$S - \frac{S}{10} = \frac{9}{10}S.$$

Сначала оно равнялось 1, а в момент встречи стало нулевым, так что

$$\frac{9}{10}S = 1 \text{ и } S = \frac{10}{9}.$$

Затем предложить учащимся ознакомиться с выводом формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии при |q| < 1.

$$S = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots = \frac{b_1}{1-q}$$

и рассмотреть в учебнике задания на применение данной формулы.

3. Подведение итогов урока.

Предложить учащимся ответить на вопросы:

1) по какому плану сравнивали изучаемые понятия «Арифметическая и геометрическая прогрессии»;

2) укажите их общие существенные признаки;

3) определите существенные различия между ними;

4) сделайте вывод, вытекающий из сравнения.

Результаты можно оформить в виде таблицы «Вид последовательности» (табл. 4).

Таблица 4. Вид последовательности

Арифметическая прогрессия	**Геометрическая прогрессия**
Определение	
+ (a_n); a_{n+1} — $a_n + d$	- (b_n); $b_{n+1} = b_n * q$
d - разность.	q - знаменатель.
Формула и-ого члена	
$a_n = a_1 + (n-l)\ d$	$b_n = b_1 q^{n-1}$
Характеристическое свойство	
$\mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} = \frac{\mathrm{a}_{\mathrm{n}+2}}{2}, \mathrm{n} > 1$	$b_n^2 = b_{n-1} * b_{n+1}, n > 1$

Формула суммы n первых членов	
$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} * n$ $S_n = \frac{2 + d(n-1)}{2} * n$	Сумма бесконечной геометрической прогрессии при q < 1 $S_n = \frac{b_1 * q - b_1}{q-1}$, если $q \neq 1$ $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, если $q \neq 1$ $S_n = nb_1$, если q=1. Сумма бесконечно геометрической прогрессии при q =1 $S = \frac{b_1}{1-q}$

2.2 Тестовые задания по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»

В связи с введением ОГЭ и ЕГЭ все большее значение приобретает такая форма контроля и учета знаний учащихся, как тестирование. Систематический тестовый контроль формирует у учащихся мотивацию постоянно готовиться к урокам, не запускать пройденный материал, дисциплинирует их. В процессе тематической и итоговой проверки тесты дают возможность за сравнительно небольшой отрезок времени проверить усвоение большого объема учебного материала у всех учащихся группы, получить объективные данные для сравнения результатов учебной подготовки учащихся одной или нескольких групп.

На базе МБОУ «СОШ №31» мы провели первичную диагностику знаний, умений и навыков учеников по математике. Для этого было разработано вводное диагностическое тестирование (приложение 1).

Количество учащихся в классе: 21. Количество присутствующих на занятии: 21. Самостоятельную работу написали на:

- «отлично» - 1 человек.
- «хорошо» - 8 человек.
- «удовлетворительно» - 12 человек.
- «неудовлетворительно» - 0 человек.

Анализируя контрольные работы, мы выяснили, что в целом, все обучающиеся усвоили материал по этой теме на уровне не ниже удовлетворительного (рис.8). Но количество учеников, получивших «удовлетворительно», еще достаточно высок, поэтому необходимо составить систему тестовых заданий по данной теме.

Рис. 8 Результаты первичной диагностики по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия»

По результатам учебной деятельности обучающихся было решено разработать тестовые задания по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия».

На основе анализа школьных учебников и материалов ЕГЭ нами был разработан тест. В данном тесте задания разбиты на секции по уровню сложности. Это позволяет использовать один и тот же тест для учащихся с разным уровнем подготовки. Данный тест можно использовать на уроках или элективных курсах, как в обычных классах, таки в классах с углублённым изучением математики.

Первая часть (часть А) состоит из двенадцати заданий базового уровня сложности по теме «Прогрессии». Содержатся задания, как с выбором ответа, так с открытой формы ответа.

Вторая часть (часть В) содержит пять более сложных заданий по данной теме. Задания исключительно открытой формы, где учащимся необходимо записать краткий ответ.

Третья часть (часть С) включает два задания повышенной сложности. Ответ подразумевает запись полного решения.

Часть А.

А1. Какое из нижеперечисленных всегда является членом арифметической прогрессией?

1) n^2+2 2)5n+1 3)$\frac{n+2}{n+1}$ 4) $(n+1)^2$ 5)$\frac{1}{n}$-n

А2. В арифметической прогрессии a_2=-1, a_5=8. Найти a_{10}.

А3. Четвертый и седьмой члены арифметической прогрессии равны 3/2 и 3/16, соответственно. Чему равная сумма первых трёх членов этой прогрессии?

А4. В арифметической прогрессии $a_4+a_5+a_6=12$. . Найти a_5.

А5. (b_n) – геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_7}{b_4}=8$, $S_{10}=\frac{8}{41}$. Найти S_{20}.

А6. Вычислите 3-6+12-24+48-…+3072.

А7. Сумма первого 21 члена арифметической прогрессии равна 252. Чему равен 11й член прогрессии?

А8. (b_n) – геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_3}{b_5}=2\frac{b_{10}}{b_{13}}$, то чему равен знаменатель этой прогрессии?

А9. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $\frac{s_{25}}{s_{17}}=\frac{125}{17}$. Найти a_8.

А10. (b_n) – геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_1+b_2+b_3}{b_1+b_2}=\frac{7}{6}$, то чему равен знаменатель этой прогрессии?

А11. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_{21}-a_{12}=18$ и $S_{11}=11$. Чему равен седьмой член этой прогрессии?

А12. Шесть чисел образуют арифметическую прогрессию. Произведение наименьшего и наибольшего чисел равно 3. Чему равно произведение всех членов?

Часть В.

В1. При каких x числа $\frac{1-x}{2}$, $\frac{3x-1}{2}$, 3x образуют арифметическую прогрессию?

В2. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Если один из углов равен 75°, то чему равен наименьший из углов?

В3. В геометрической прогрессии (Ь$_{\text{п}}$) известно, что $\frac{S_{12}}{S_6}$=$\frac{65}{64}$. Чему равен третий член этой прогрессии, если первый член равен 20?

В4. В арифметической прогрессии (a_n) известно: S_{11} = 77, а a_7 = 10. Найти разность прогрессии.

В5. Сумма первых 25 членов арифметической прогрессии равна 350, а сумма первых 17 членов этой же прогрессии равна 204. Чему равен одиннадцатый член этой прогрессии?

Часть С.

С1. Сумма первых 10 членов арифметической прогрессии равна 23, а сумма следующих 10 членов 63. Чему равна сумма с 5 по 14 член этой прогрессии?

С2. (a_n) - арифметическая прогрессия. Если $a_1 + a_3 + a_5 +\ldots+ a_{23} = 96$ и a_{14} = 10, то чему равно $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots+ a_{36}$?

Решение тестовых заданий.

При решении данного теста использовались следующие свойства и формулы (табл.5):

Таблица 5. Формулы прогрессий.

	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	$a_{n+1}=a_n+d$	$b_{n+1}=b_n*q,(q\neq0)$
Формула n-го члена	$a_n=a_1=+d(n-1)$	$b_n=b_1*q^{n-1}$
Формула суммы n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_2}{2} n$ $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$	$S_n = \frac{b_1 * (1-q^n)}{1-q}, (q \neq 1)$ $S_n = \frac{b_n * q - b_1)}{1-q}, (q \neq 1)$
Свойства	$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$	$b_n = \overline{b_{n-k} * b_{n+k}}$

Часть А.

А1. Какое из нижеперечисленных всегда является членом арифметической прогрессией?

1) n^2+2 2)5n+1 3)$\frac{n+2}{n+1}$ 4) $(n+1)^2$ 5)$\frac{1}{n}$-n

Решение:

$a_{n+1}=a_n+d$

5n+1

n=1, a_2=5+1=6

n=2, a_3=10+1=11

n=3, a4=15+1=16

$d=a_{n+1}-a_n$

$d=a_4-a_3=a_3-a_2=5$

Ответ 2.

А2. В арифметической прогрессии a_2=-1, a_5=8. Найти a_{10}.

Решение:

$$a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5$$

$$a_5 \xrightarrow{+d} a_6 \xrightarrow{+d} a_7 \xrightarrow{+d} a_8 \xrightarrow{+d} a_9 \xrightarrow{+d} a_{10}$$

$a_5=a_2+3d$

8=-1+3d

8-(-1)=3d

9=3d

d=$\frac{9}{3}$

d=3

$a_{10}=a_5+5d$

$a_{10}=8+15+a_{10}=23$

Ответ: $a_{10}=23$

А3. Четвертый и седьмой члены арифметической прогрессии равны 3/2 и 3/16, соответственно. Чему равная сумма первых трёх членов этой прогрессии?

Решение:

$$b_n = b_1 * q^{n-1}$$

$$\frac{3}{2} = b_1 * q^3, \frac{3}{16} = b_1 * q^6$$

$$b_1 = \frac{3}{2q^3}, \; b_1 = \frac{3}{16q^6}$$

$$\frac{3}{2q^3} = \frac{3}{16q^6}, q^3 = \frac{1}{8}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{3 * 8}{2} = 12$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n}{1-q}, S_3 = \frac{12*(1-\frac{1}{8})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{12*7*2}{8}=21$$

Ответ: 21.

А4. В арифметической прогрессии $a_4+a_5+a_6=12$. Найти a_5.

Решение:

$a_4+a_5+a_6=12$

$a_1+3d+a_1+4d+a_1+5d=12+3a_1+12d=12$

$a_1=4-4d$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_5=a_1+4d$

$a_5=4-4d+4d$

$a_5=4$

Ответ: a5=4.

А5. (b_n) – геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_7}{b_4} = 8$, $S_{10}=\frac{8}{41}$. Найти S_{20}.

Решение:

$$S_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}, S_{20} = \frac{b_1(1-q^{20})}{1-q},$$

$$b_7=b_1q_6,\ b_4=b_1q^3$$

$$\frac{b_1q^6}{b_1q^3} = 8, q^3 = 8, q = 2$$

$$\frac{8}{41} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}, -\frac{8}{41} = b_1(1-q^{10})$$

$$b_1 = -\frac{8}{41(1-q^{10})}$$

$$S_{20} = \frac{8* \ -2 \ *(1-q^{20})}{41* \ 1-q^{10} \ *(-2)} = \frac{8* \ 1-q^{20} \ *(1+q^{10})}{41* \ 1-q^{10} \ *(1+q^{10})} = \frac{8*(1+q^{10})}{41} = 8 * \frac{1-2^{10}}{41} = 200$$

Ответ: S_{20}=200.

А6. Вычислите 3-6+12-24+48-…+3072.

Решение:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -2$$

$$q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{-24}{12} = -2$$

-2=-2=-2, ч.т.д.

b_1=3, b_2=-6, b_3=12, b_4=-24, b_5=48

$$b = \frac{3072}{-2} = -1536 = b_{10}$$

$$b = \frac{1536}{-2} = 768 = b_9$$

$$b = \frac{768}{-2} = -384 = b_8$$

$$b = \frac{384}{-2} = -192 = b_7$$

…

b_{11}=3072, n=11

$$S_{11} = \frac{b_1(1 - q^{11})}{1 - q} = \frac{3(1 - (-2)^{11}}{1 - (-2)} = 1 + 2^{11}$$

Ответ: $1 + 2^{11}$

А7. Сумма первого 21 члена арифметической прогрессии равна 252. Чему равен 11й член прогрессии?

Решение:

$a_n=a_1+(n-1)d$, $a_{11}=a_1+10d$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$$

$$S_{21}=\frac{a_1+a_{21}}{2}*21\ ,\ 252=\frac{a_1+a_1+20d}{2}*21$$

$$\frac{252}{21}=a_1+10d$$

$$a_{11}=\frac{252}{2}=12$$

Ответ: 12.

А8. (b_n) – геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_3}{b_5}=2\frac{b_{10}}{b_{13}}$, то чему равен знаменатель этой прогрессии?

$$b_n=b_1*q^{n-1}$$

$$b3=b_1*q^2$$

$$b_5=b_1*q^4$$

$$b_{10}=b_1*q^9$$

$$b_{13}=b_1*q^{12}$$

$$b_5=b_3*q^2,\ b_{13}=b_{10}*q^3$$

$$\frac{b_3}{b_3*q^2}=2\frac{b_{10}}{b_{10}*q^3}$$

$$1=2\frac{1}{q},\frac{1}{2}=\frac{1}{q}$$

$$q=2$$

Ответ: 2.

А9. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $\frac{s_{25}}{s_{17}}=\frac{125}{17}$. Найти a_8.

Решение:

$$S_{25}=\frac{a_1+a_{25}}{2}=125, S_{17}\frac{a_1+a_{17}}{2}17=17$$

$$a_1+a_{25}=\frac{125*2}{25}=10\ ,\ \ a_1+a_{17}=\frac{17*2}{17}=2$$

$$a_{25}=a_{17}+8d$$

$$a_{1+}a_{17}+8d=10,\ 2+8d=10,\ d=1$$

$$a_1+a_{17}=2a_1+16d=2,\ a_1=-7$$

$$a_8=a_1+7d=-7+7=0$$

Ответ: $a_8=0$

A10. (b_n) – геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_1+b_2+b_3}{b_1+b_2}=\frac{7}{6}$, то чему равен знаменатель этой прогрессии?

$$q=\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$b_n=b_1*q^{n-1}$$

$$b_1+b_2+b_3=7,$$
$$b_1+b_2=6.$$

$$6+b_3=7,\ b_3=1$$

B3=b1*bq2, $1=b_1*(\frac{b_2}{b_1})^2$, $1=\frac{b_2^2}{b_1}$, $b_1=b_2^2$

$$b_3=b_2{}^2*q^2$$

$$q^2=\frac{b_3}{b_2^2}=\frac{1}{b_2^2}$$

$$q=\overline{\frac{1}{b_2^2}}=\frac{1}{b_2^2}$$

$$b_3=b_1*\frac{1}{b_2},1=\frac{b_1}{b_2},b_2=b_1$$

$$b_1+b_1+b_3=7$$

$$2b_1+1=7$$

$$2b_1=6$$

$$b_1=3=b_2$$

$$q=\frac{1}{3}$$

Ответ: $q=\frac{1}{3}$

A11. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что a_{21}-a_{12}=18 и S_{11}=11. Чему равен седьмой член этой прогрессии?

Решение:

$$S_n = \frac{2a_1 + \ n-1\ d}{2} * n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + 10d}{2} 11$$

$$a_1+5d=1$$

$$a_1=1-5d$$

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$a_7=a1+6d$$

$$a_7=1-5d+6d$$

$$a_7=1+d$$

$$a_{21}-a_{12}=18$$

$$a_{12}+9d-a_{12}=18$$

$$9d=18$$

$$d=2$$

$$a_7=3$$

Ответ: $a_7=3$

A12. Шесть чисел образуют арифметическую прогрессию. Произведение наименьшего и наибольшего чисел равно 3. Чему равно произведение всех членов?

Решение:

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$$

$$a_1*a_6=3$$

$$a_1*a_6=a_2*a_5=a_3*a_4$$

3*3*3=27

Ответ: 27

Часть В.

В1. При каких х числа $\frac{1-x}{2}$, $\frac{3x-1}{2}$, 3x образуют арифметическую прогрессию?

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

$$a_n = a_1 + \ \ n - 1 \ \ * d$$

$$a_1 = \frac{1 - x}{2}$$

$$a_2 = \frac{3x - 1}{2}$$

$$a_3 = 3x$$

$$a_1 = \frac{a_3 + a_1}{2}$$

$$\frac{6x - 1 - x}{4} = \frac{1 + 5x}{4}$$

$$\frac{1 + 5x}{4} = \frac{3x - 1}{2}$$

$$1+5x=6x-2$$

$$x=3$$

Ответ: 3.

В2. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Если один из углов равен 75°, то чему равен наименьший из углов?

$$S_3 = \frac{a_1 + a_3}{2} * 3$$

$$\frac{180}{3} = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$60*2=a_1+a_3$$

$$120=75-a_3$$

$$a_3=120-75$$

$$a_3=45$$

$$a_1+a_2+a_3=180°$$

$$75°+a_2+45°=180°$$

a_2=60°

Ответ: 45°

В3. В геометрической прогрессии ($b_{\text{п}}$) известно, что $\frac{S_{12}}{S_6}$=$\frac{65}{64}$. Чему равен третий член этой прогрессии, если первый член равен 20?

$$S_n = \frac{b_n(1-q^n)}{1-q},\ S_{12} = \frac{b_1(1-q^{12})}{1-q},\ S_6 = \frac{b_1(1-q^6)}{1-q}$$

$\frac{S_{12}}{S_6} = \frac{65}{64}$, S_{12}=65, S_6=64

S_6=S_{12}-1, S_{12}-S_6=1

$$\frac{b_1 * (1-q^{12})}{1-q} - \frac{b_1 * \ 1-q^6}{1-q} = 1$$

1-q^{12}-1+q^6=1-q

-q^6+q=1, q^5=-1, q=-1

b_n=b_1*q^{n-1}, b_3=b_1*q2

b_3=20*$(-1)^2$=20

Ответ: 20.

B4. В арифметической прогрессии (a_n) известно: S_{11} = 77, а a_7 = 10. Найти разность прогрессии.

$$d = \frac{a_n - a_k}{n-k}$$

$$S_n = \ a_1 + a_n \ * \frac{n}{2}$$

$$S_{11} = \ a_1 + a_{11} \ * \frac{11}{2} = 77$$

$$a_1 + a_{11} = \frac{2*77}{11} = 14$$

a_n=a_1+(k-1)d

a_{11}=a_1+10d

a1+a1+10d=14

2a_1+10d=14

a_1+5d=7=a_6

$$d = \frac{a_7 - a_6}{7-6} = \frac{10-6}{1} = 4$$

Ответ:4

B5. Сумма первых 25 членов арифметической прогрессии равна 350, а сумма первых 17 членов этой же прогрессии равна 204. Чему равен одиннадцатый член этой прогрессии?

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} * n, S_{25} = \frac{a_1+a_{25}}{2} * 25, S_{25} = \frac{a_1+a_{17}}{2} * 17$$

$$\frac{350}{25} = \frac{a_1+a_{17}+8d}{2}, 28=a_1+a_{17}+8d,$$

$$a_1+a_{17}=28-8d$$

$$\frac{204}{17} = \frac{a_1 + a_{17}}{2}$$

$$24=28-8d, 12=14-4d, -2=-4d$$

$$d=\frac{1}{2}$$

$$350 = \frac{a_1 + a_1 + 24d}{2} * 25, 28 = 2a_1 + 24d, 14 = a_1 + 12d$$

$$a_1 = 8$$

$$a_n = a_1 + \ \ n - 1 \ \ * d, a_{11} = a_1 + 10d$$

$$a_{11}=8+10*\frac{1}{2} = 13$$

Ответ:13.

Часть С.

С1. Сумма первых 10 членов арифметической прогрессии равна 23, а сумма следующих 10 членов 63. Чему равна сумма с 5 по 14 член этой прогрессии?

Решение:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} * n, a_{10}=a_1+9d$$

$$S_{10} = \frac{a_1+a_{10}}{2} * 10=5(a_1 + a_{10}) = 5 \ \ 2a_1 + 9d \ \ = 10a_1 + 45d$$

$$23=10a_1 + 45d$$

$$a_1 = \frac{23 - 45d}{10}$$

$$S_{20}-S_{10}=63$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} * 20 = 10 \ \ a_1 + a_{20} \ \ = 10 \ \ 2a_1 + 19d \ \ = 20a_1 + 190d$$

$$(20a_1 + 190d) - \ \ 10a_1 + 45d \ \ = 63$$

$$10a_1 + 145d = 63$$

$$a_1 = \frac{63 - 145d}{10}$$

$$\frac{23-45d}{10}=\frac{63-145d}{10}, 40=100d$$

d=$\frac{4}{10}$, $a_1=\frac{23-45d}{10}=\frac{5}{10}$

$$S_{14}-S_5=?$$

$$S_{14}=\frac{a_1+a_{14}}{2}*14=7(2a_1+13d)$$

$$S_4=\frac{a_1+a_4}{2}*4=2(2a_1+3d)$$

$$S_{14}-S_5=14a_1+91d-4a_1-6d=10a_1+85d$$

$$S_{14}-S_5=10*\frac{5}{10}+85*\frac{4}{10}=5+34=39$$

Ответ: 39.

С2. (a_n) - арифметическая прогрессия. Если $a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{23}=96$ и $a_{14}=10$, то чему равно $a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{36}$?

Решение:

$$a_{14}=a_1+13d$$

$$10=a_1+13d \rightarrow a_1=10-13d$$

$$\frac{96}{6}=16 \rightarrow a_1+a_{23}=16, a_3+a_{21}=16$$

$$a_1+a_{23}=16$$

$$2a_1+(a_1+22d)=16$$

$$2a_1+22d=16$$

$$a1+11d=8 \rightarrow a_{12}=8$$

$$10-a_{13}=d$$
$$a_{13}-8=d$$

$$10-a_{13}=a_{13}-8$$

$$2a_{13}=18 \rightarrow a_{13}=9$$

$$9-1=1 \rightarrow d=1$$

$$a_1=10-13d=-3$$

$$(a_2+a_{36})*9=a_2+\ldots+a_{36}$$

$$a_2+a_{36}=a1+d+a1+35d=-3+1-3+35=30$$

$a_2+a_4+\ldots+a_{36}=30*9=270.$ Ответ: 270.

2.3 Реализация методических рекомендаций по основам изучения последовательностей в школьном курсе математики

Апробация подготовленных заданий занятий проводилась в период педагогической практики в г. Белгорода в 9 классе. Было разработано и проведено одно занятие (1 час) на тему: «Сравнение арифметической и геометрической прогрессий».

Предложенные тестовые задания и система заданий по основам изучения последовательностей может быть полезен школьникам при изучении темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии», для актуализации знаний.

Контроль был проведен в письменной форме, учащимся необходимо было решить задания разного уровня сложности по данной теме. В ходе проведения занятий было выявлено повышение познавательного интереса к изучению последовательностей. Тестовые задания представлены для разного уровня успеваемости учеников, более сложные желательно предложить сильным учащимся. В данном случае все ученики приступали заданиям части С.

Количество учащихся в классе: 21. Количество присутствующих на занятии: 20. Самостоятельную работу написали на:

- «отлично» - 5 человек.
- «хорошо» - 8 человек.
- «удовлетворительно» - 7 человек.
- «неудовлетворительно» - 0 человек.

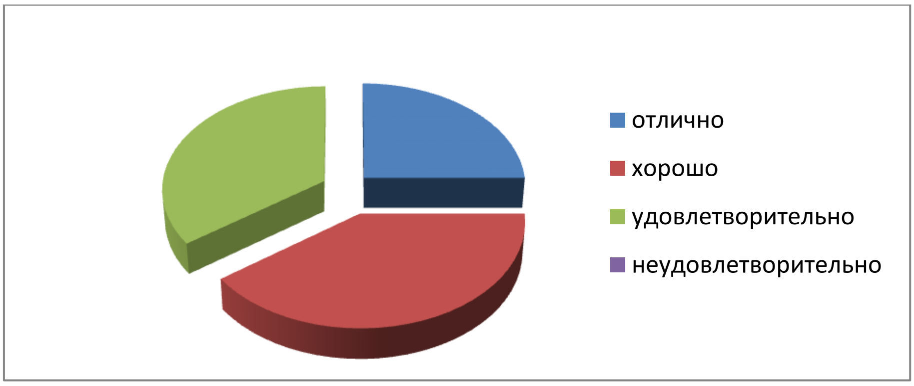


Рис.9 Результат выполнения итоговой самостоятельной работы

Результат работы наглядно представлены на рисунке 9. Ребята продемонстрировали достаточно высокий уровень владения материалом. Об этом свидетельствуют высокий уровень самостоятельности учащихся на занятии; наблюдались навыки выполнения работы через организацию групповой деятельности, ученики продемонстрировали умение применять полученные теоретические знания об арифметической и геометрической прогрессии на практике.

Занятие показало, что ученики занимались с интересом, проявляли инициативу, творчество. Это доказывается результатами самостоятельной работы - большая часть класса написала на 4 и 5, неудовлетворительных оценок не было.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что подобранные учебные материалы для преподавания темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии», а также разработанные нами тестовые задания и система задач для указанной темы с полным решением эффективны для обучения школьников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«Последовательности» - одна из тем школьного курса математики. Учащиеся испытывают сложности при изучении материала, содержащего арифметическую и геометрическую прогрессии. Связанно это, прежде всего, с тем, что в школьной программе недостаточно времени уделяется изучению темы.

В данной работе рассмотрены основные теоретические основы прогрессий: даны определения основных понятий, рассмотрены свойства прогрессий, суммы первых n — членов арифметической и геометрической прогрессий.

Проведённый нами анализ материалов ЕГЭ по математике показал, что заданий по теме «Прогрессии» в ЕГЭ встречается очень мало, но они повышенного уровня сложности. Поэтому, для качественной подготовки учащихся нами самостоятельно был разработан тест по типу ЕГЭ. В тесте мы разбили задания по уровню сложности. Что позволяет использовать один и тот же тест для учащихся с разным уровнем подготовки, т.е. делает его эффективнее.

Также нами был разработано учебное занятие по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» для подготовки к ЕГЭ, который направлен на расширение и углубление знаний учащихся по теме. В разработанных методических рекомендациях обобщенно представлен и систематизирован материал по теме «Последовательности». А именно даются основные понятия и определения арифметической и геометрической последовательности и их свойства, показано применение на практике. Далее приведены примеры задач на вычисление с подробными решениями, и представлены задачи для самостоятельного решения, которые помогут проверить уровень понимания темы после изучения пособия, а также закрепить навык вычисления.

Практическая значимость данной работы определяется тем, что в ней разработаны и проверены учебные материалы для преподавания темы

«Арифметическая и геометрическая прогрессии». Подобрана система задач для указанной темы с полным решением.

Таким образом, задачи выпускной квалификационной работы выполнены. Данная работа может быть использована как педагогами, так и учащимися при подготовке к написанию ЕГЭ по математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиев А. И. «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Издательский дом «Первое сентября», газета «Математика» № 23, 2004 г.
2. Алгебра 9 класс. /Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С./2014 г.
3. Алгебра. 9 класс. Задачник (повышенный уровень)/ Звавич Л .И., Рязановский А.Р., Семенов П.В. / 2008 г.
4. Алгебра. 9 класс. Задачник./ Мордкович А.Г. /2010 г.
5. Алгебра. 9 класс. Учебник для углубленного изучения. / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., и др./ 2008 г.
6. Алгебра. 9 класс. Учебник. (повышенный уровень)/ Мордкович А.Г., Николаев Н.П., /2008
7. Алгебра. 9 класс. Учебник./ Алимов Ш.А. и др. /2010 г.
8. Алгебра. 9 класс. Учебник./ Мордкович А.Г. /2010 г.
9. Алгебра. 9 класс. Учебник/ Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. / 2013 г.
10. Алгебра. 9 класс: Учебник для общеобразовательных учебных заведений [текст]/ К.С.Муравин, Г.К.Муравин, Г.В.Дорофеев. – М.: Дрофа, 2000. – 240 с.
11. Алгебра. 9кл. Учебник. /Макарычев Ю.Н, Миндюк Н.Г, Нешков К.И, Суворова С.Б. (под редакцией Теляковского С.А.) / 2009 г.
12. Алгебра: Учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягии и др. М., 2000. 256 с.
13. Асмолов А. Г. Системно - деятельный подход к разработке стандартов нового поколения. // Педагогика.- 2009.-№4.- С.18-22.
14. Бабанскиий Ю. К., Оптимизация учебно-воспитательного процесса: Методические основы. М., 1982. 192 с.
15. Буфеев С.В. Коллекция задач по арифметике целых чисел. - М.: Книжный дом «Либроком», 2013 г.

16. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2017 г. [Электронный ресурс]. – Электрон. текст. дан. – Москва: ФИПИ. – 2013. – Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

17. Зеленский А.С., Панфилов И.И. Решение уравнений и неравенств с модулем. – М.: Научно – технический центр «Университетский»: Универ-пресс, 2009 г.

18. Кравчук, Д.Н., Кравчук Е.В., С.И. Клемина. Сборник задач по математике с решениями / Д.Н. Кравчук. – Изд. ПКФ «БАО» Донецк, 1997.

19. Математика. ОГЭ (ГИА)–2015. Сборник заданий. /Лаппо Л.Д., Попов М.А. / 2014 г.

20. Мордкович А.Г. Алгебра 7 - 9кл. Методическое пособие для учителя, М: Мнемозина, 2001г.

21. Мордкович. А.Г. Алгебра 9кл. Учебник. М.: Мнемозина, 2009 г.

22. Полякова Е.А. Уравнения и неравенства с параметрами в профильном 11 классе. Методические рекомендации и поурочное планирование. – М.: Илекса, 2010.

23. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней. – Ростов – на – Дону: Легион, 2012 г.

24. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: нестандартные методы решения задач. – М.: .: Книжный дом «Либроком», 2009 г.

25. Шарыгин, И.Ф. Математика для школьников старших классов /И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа. – 1995 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вводная диагностика

1. Является ли последовательность 4, 6, 8, 10,… арифметической прогрессией?
   а) да,
   б) нет,
   в) затрудняюсь ответить.

2. Является ли последовательность 10, 20, 30, 40,…геометрической прогрессией?
   а) да,
   б) нет,
   в) затрудняюсь ответить.

3. Для арифметической прогрессии с первым членом $a_1=5$, заданной формулой $a_{n+1}=a_n-8$ указать три последующих члена.
   а) 3, 11, 19;
   б) -3, -11, -19;
   в) -3, -11, -18.

4. Для геометрической прогрессии 8, -4, 2,… найти знаменатель q.
   а) q= 1/2 ,
   б) q= -2,
   в) q= -1/2.

5. Найти сумму шести первых членов арифметической прогрессии -4 + 1 + 6 +… .
   а) 51,
   б) 54,
   в) -75.

Ключ ответов:

1	2	3	4	5
а	б	б	в	а

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Решение нестандартных задач на прогрессии

1) Доказать, что если числа $\frac{1}{a+в}, \frac{1}{в+c}, \frac{1}{c+a}$ образуют арифметическую прогрессию, то этим же свойством обладают числа c^2, a^2,b^2.

Решение: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}=\frac{2}{b+c}, \frac{c+a+a+в}{(a+b)(c+a)}=\frac{2}{b+c}$ $bc+2ab+b^2+c^2+2ac+cb = 2ac+2a^2+2bc+2ba$; $b^2+c^2=2a^2, a^2=\frac{b^2+c^2}{2}$, -характеристическое свойство, следовательно c^2, a^2, b^2-арифметическая прогрессия.

2) Доказать, что во всякой арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $S=a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots+a_{2к-1}^2-a_{2к}^2=\frac{к}{2к-1}(a_1^2-a_{2к}^2)$.

Доказательство: $a_1^2-a_2^2=(a_1-a_2)(a_1+a_2)=-d(a_1+a_2)$

$$a_3^2-a_4^2=(a_3-a_4)(a_3+a_4)=-d(a_3+a_4)$$

$$a_{2к-1}^2-a_{2к}^2=(a_{2к-1}-a_{2к})(a_{2к-1}+a_{2к})=-d(a_{2к-1}+a_{2к})$$

Складывая эти равенства получим : $S=-d(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{2к-1}+a_{2к})=-d\,\frac{a_1+a_{2к}}{2}2к$, но $a_{2к}=a_1+d(2к-1)$, $-d=\frac{a_1-a_{2к}}{2к-1}$, следовательно $S=\frac{a_1-a_{2к}}{2к-1}\cdot\frac{a_1+a_{2к}}{2}\cdot 2к=\frac{к}{2к-1}\cdot(a_1^2-a_{2к}^2)$.

3) Доказать, что в геометрической прогрессии, состоящей из четного числа членов, отношение суммы членов стоящих на четных местах, к сумме членов стоящих на нечетных местах равно знаменателю прогрессии.

Доказательство: $S_{чет.}=b_1q+b_1q^3+\ldots\ldots+b_1q^{2к-1}=b_1q(1+q^2+\ldots\ldots+q^{2к-2})$

$$S_{нечет.}= b_1+b_1q^2+\ldots\ldots+b_1q^{2к-2}=b_1(1+q^2+\ldots\ldots+q^{2к-2}),$$

$$\frac{S_{чет.}}{S_{неч}}=q.$$

4) Три числа, сумма которых равна $\frac{15}{2}$, составляют арифметическую прогрессию. Если к третьему числу прибавить первое, то числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

Решение: a, a + d, a+2d-арифметическая прогрессия, тогда геометрическая прогрессия имеет вид : a, a + d, 2a+2d. Имеем $\begin{cases} a+(a+d)+(a+2d)=7{,}5 \\ (a+d)^2=2a(a+d), \end{cases}$, $\begin{cases} a+d=2{,}5 \\ 5a=\frac{25}{4} \end{cases}$, a=$\frac{5}{4}, d=\frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{5}{4},\frac{5}{2},\frac{15}{4}$.

5) Сумма трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 26.Если к этим числам прибавить соответственно 1;6;3, то получим три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

Решение:$a_1,a_2,a_3,\quad a_1+a_2+a_3=26$.

$\div\ a_1+1, a_2+6, a_3+3,\quad a_2+6=\frac{a_1+1+a_3+3}{2}$

$a_1=18, a_3=2$ или $a_1=2, a_3=18$. Ответ:2,6,18 или 18,6,2.

6) Доказать, что числа $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{2-\sqrt{2}},\frac{1}{2}$, … образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и найти её сумму.

Решение:

Докажем, что $\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}<1$, $\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$, $\frac{b_3}{b_2}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

q=$\frac{1}{2+\sqrt{2}}<1$, S=$\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(1-\frac{1}{\sqrt{2}+2})}=4+3\cdot\sqrt{2}$

7) Найти сумму: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n-1)}$

Решение:

Представим каждую дробь в виде разности: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$; $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-...=1$. Ответ: S=1

8) Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, заключённую между положительными целыми числами a и b, (a < b)

Решение: Пусть a $=\frac{3a}{3}$ и b=$\frac{3}{3}$, тогда все дроби со знаменателем 3 имеют вид: a=$\frac{3a}{3},\frac{3a+1}{3},\frac{3a+2}{3},...,\frac{3b}{b}=b$ (1), ясно, что дроби вида a=$\frac{3a}{3},\frac{3a+3}{3},\frac{3a+6}{3},...,\frac{3b}{3}$ являются сократимыми и могут быть записаны в виде: a, a+1, a+2, …b (2). Их следует исключить из рассматриваемых чисел. Поэтому подсчитаем сначала сумму всех дробей вида (1) и отнимем от них сумму всех дробей вида (2). Дроби вида (1) представляют собой арифметическую прогрессию, в которой первый член равен a=$\frac{3a}{3}$, а последний $\frac{3b}{3}=b$ и d=$\frac{1}{3}$. Найдём число членов этой прогрессии b=a+$\frac{1}{3}\cdot(n-1), n=3b-3a+1.$ Значит сумма дробей вида (1): $\frac{(b+a)(3b-3a+1)}{2}$. Последовательность чисел вида (2) также является арифметической прогрессией с первым членом a и последним b и d=1, n=b-a+1, а сумма равна: $\frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$. Таким образом: S= $\frac{(b+a)(3b-3a+1)}{2}-\frac{(b+a)(b-a+1)}{2}=b^2-a^2$. Ответ: b^2-a^2

9)Найти такую арифметическую прогрессию, чтобы сумма n-первых ее членов равнялась (n+1) раз взятой половине n-ого члена.

Решение: $\frac{2a+d(n-1)}{2}\cdot n=\frac{a+d(n-1)}{2}\cdot(n+1)$ или (n-1)(a-d)=0, откуда a = d. В самом деле a+2a+……+na = a(1+2+3+……+n)=$\frac{a(1+n)}{2}\cdot n=\frac{na}{2}(n+1)$

10) Сколько одинаковых членов находится в двух арифметических прогрессиях :

÷5,8,1,…..и ÷3,7,11…..,если в каждой из них n=100?

Решение:пусть члены ÷(a_n) соответственно равны членам ÷($a_{m)}$,т.е 5+(n-1) $\cdot 3 = 3+(m-1)\cdot 4$,n=m+ $\frac{m}{3}-1$ (1) Чтобы n принимало только целые положительные значения, $\frac{1}{3}m$ должно равняться k (целому положительному числу),т.е m=3k.Но тогда из равенства (1) следует, что n=4k-1. По условию 1≤n≤100, следовательно, k=1,2,3,…,25.Значит, общих членов в рассматриваемой прогрессии будет 25:11,23,35,…,299.

10)Найти сумму:$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots..+(n-1)x^n$

Решение :пусть данная сумма будет S_n. Умножая каждое слагаемое этой суммы на x и вычитая полученную сумму из S_n ,получим: S_n-$xS_n=1+x+x^2+\ldots..+(n+1)x^{n+1}$,откуда при x≠1, $S_n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)x^{n+1}$, или $S_n=\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}$. Если x=1, то $S_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

12) Найти углы α, β, γ первой четверти, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{12}$,а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию.

Решение: из условия $\alpha=\beta-\frac{\pi}{12},\gamma=\beta+\frac{\pi}{12}$. Учитывая свойства геометрической прогрессии, имеем: $tg^2\beta=tg(\beta-\frac{\pi}{12})\cdot tg(\beta+\frac{\pi}{12})$

$tg^2\beta=\frac{tg\beta-tg\frac{\pi}{12}}{1+tg\beta\cdot tg\frac{\pi}{12}}\cdot\frac{tg\beta+tg\frac{\pi}{12}}{1-tg\beta\cdot tg\frac{\pi}{12}}$, $tg^2\beta=\frac{tg^2\beta-tg^2\frac{\pi}{12}}{1-tg^2\beta\cdot tg^2\frac{\pi}{12}}$.

$tg^4\beta=1$, учитывая, что $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $tg\beta=1$, $\beta=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{3}$.

13) Показать, что если треугольник имеет угол в 1200 и стороны его образуют арифметическую прогрессию, то эти стороны пропорциональны числам: 3,5,7.

Решение: сторона, лежащая против угла в 120^0, наибольшая. Поэтому если стороны, заключающие угол в 120^0, равны a и a+d, (гдеd>0), то $(a+2d)^2=(a+d)^2+a^2+a(a+d)$,

$3d^2+ad-2a^2=0$, $d=\frac{2a}{3}$, таким образом стороны треугольника равны : $\frac{3a}{3},\frac{5a}{3}\frac{7a}{3}$, т.е. относятся как 3:5:7.

14) Доказать, что если $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n$-суммы n-членов n-геометрических прогрессий, у которых первые члены равны 1,а знаменатели соответственно равны 1,2,3,….,n,то $S_1+S_2+2S_3+3S_4+\ldots+(n-1)S_n=1^n+2^n+3^n+\ldots+n^n$.

Решение:$S_1=n$, $S_2=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$, $S_3=\frac{3^n-1}{2}$, ..., $S_n=\frac{n^n-1}{n-1}$.

$S_1+S_2+2S_3+3S_4+\ldots+(n-1)S_n=n+(2^n-1)+(3^n-1)+\ldots+(n^n-1)=n+2^n+3^n+\ldots+n^n-(n-1)=1^n+2^n+3^n+\ldots+n^n$.

15)Доказать, что если положительные различные числа a, b, c являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, то имеет место равенство:$a^n+c^n>2b^n$, для $\forall n\in N$.

Решение: пусть a>b>c, $b^2=ac$ (1) ,имеем: $(a^n-c^n)^2>0$, или $a^{2n}-2a^nc^n+c^{2n}>0$ (2).

Прибавив к обеим частям неравенства (2) по $4a^nc^n$, получим: $(a^n+c^n)>4a^nc^n$,

$a^n+c^n>2\sqrt{(ac)^n}$, учитывая (1), получим $a^n+c^n>2b^n$

16)Доказать, что нет такого треугольника, у которого и углы, и стороны составляли бы одновременно арифметические прогрессии с отличными от нуля разностями.

Решение: пусть имеется такой треугольник, у которого стороны равны a,a+d,a+2d, а углы $\alpha,\alpha+\beta,\alpha+2\beta$, где $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$. Тогда, согласно теореме синусов, имеем: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{a+d}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a+2d}{\sin(\alpha+2\beta)}$,откуда на основании свойства ряда равных отношений имеем: $\frac{a+a+2d}{\sin\alpha+\sin(\alpha+2\beta)}=\frac{a+d}{\sin(\alpha+\beta)}$, или $\frac{2(a+d)}{2\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta)}=\frac{a+d}{\sin(\alpha+\beta)}$,

$\frac{1}{\cos\beta}=1,$ $\cos\beta=1, \beta=0$, что противоречит предположению.

17) Доказать, что число вида:$(10^{n}+10^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+10+1)(10^{n+5}+5)+1$ есть точный квадрат.

Решение: выражение $10^{n}+10^{n-1}+\ldots\ldots..+10+1$ есть сумма n+1 членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен 10. Поэтому это выражение равно $\frac{10^{n+1}-1}{9}$. Следовательно, исследуемое число можно переписать в виде $\frac{10^{n+1}-1}{9}(10^{n+1}+5)+1$ или $\frac{10^{2(n+1)}+4\cdot10^{n+1}+4}{9}=(\frac{10^{n+1}+2}{3})^2$. Остается заметить, что число $\frac{10^{n+2}+2}{3}$ целое (т. к сумма цифр числа $10^{n+2}+2$ равна 3).

Приложение 2. **Прогрессии в задачах с древнейших времен до наших дней**.

Справочная таблица

	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	$a_{n+1}=a_n+d, \quad d\in R, n\in N.$	$b_{n+1}=b_n*q, \quad q\neq 0.$
Формула n-го члена	$a_n=a_1+(n-1)d,\ d\in R, n\in N.$	$b_n=b_1*q^{n-1},\ \ q\neq 0.$
Сумма n первых членов	$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n,\ \ n\in N.$	$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ \ q\neq 0, q\neq 1.$
		$S_\infty=\frac{b_1}{1-q},\ \ q\neq 0, \lvert q\rvert<1.$
Характеристическое свойство	$a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2},$ $n\in N, n\geq 2, n>k, k\in N.$	$b_n=\sqrt{b_{n-k}b_{n+k}},\ \ b_n>0,$ $n\in N, n\geq 2, n>k, k\in N.$

1. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 5/3, а произведение третьего и четвертого её членов равно 65/72. Найти сумму семнадцати первых членов этой прогрессии.

Ответ: 119/3.

2. В соревнованиях по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получает штрафное очко, а за каждый последующий на 1/2 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

Ответ: 21попадание в цель.

3. Найти три первых члена бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$, сумма которой равна 6, а сумма пяти первых членов равна

93/16.

Ответ: 3; 3/2; 3/4.

4. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии

равна15, если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему члену прибавить 1, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму 10 первых членов арифметической прогрессии и заданные числа.

Ответ: 3; 5; 7; S_{10}=120 .

5. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 500.

Ответ: 1) -35/3; -140/3; -560/3; -2240/3; 2) 7; -28; 112; -448.

4. Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому? (Задача, найденная на папирусе, 3 тыс. лет до н.э.)

Ответ: 5/3, 65/6, 20, 175/6, 115/3.

5. Некто продал лошадь за 156 рублей. Но покупатель, приобретя лошадь, раздумал её покупать и возвратил продавцу, говоря: Нет мне расчета покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит. Тогда продавец предложил другие условия: - Если, по-твоему, цена лошади высока, то купи только её подковные гвозди, лошадь же получишь в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего ¼ коп, за второй 1/2 коп, за третий 1коп. и т.д. Покупатель, соблазненный низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей. На сколько покупатель проторговался?

Ответ: 4194303 ¾ коп.~ 42тыс. рублей.

6. Артель землекопов подрядилась вырыть канаву. Если бы она работала в полном составе, канава была бы вырыта в 24 часа. Но в действительности к работе сначала приступил только один землекоп. Спустя некоторое время присоединился второй, еще через столько же времени – третий, за ним через такой же промежуток- четвертый и т.д. до последнего. Сколько времени работал последний?

Ответ:4 часа.

7. Садовник продал первому покупателю половину всех яблок и еще пол-яблока, второму покупателю половину оставшихся и еще пол-яблока; третьему - половину оставшихся и ещё пол-яблока и т.д. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблок и ещё пол-яблока; после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?

Ответ: 127 яблок.

8. В огороде 30 грядок, каждая длиной 16м. и шириной 2,5м. Поливая грядки, огородник приносит вёдра с водой из колодца, расположенного в 14м. от края огорода и обходит грядки по меже, причём воды, приносимой за один раз, достаточно для поливки только одной грядки. Какой путь по длине должен пройти огородник, поливая весь огород? Путь начинается и кончается у колодца.

Ответ: 4,125км.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Арифметическая и геометрическая прогрессии в геометрических задачах

1. Сторона квадрата равна ***a***. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с данным и т.д. Найти предел суммы периметров и предел суммы площадей этих квадратов.

Ответ: предел суммы периметра 4a(2+ $\sqrt{2}$), предел суммы площадей $\mathbf{2a^2}$

.

2. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1. Косинус среднего по величине угла этого треугольника равен 2/3. Найти периметр этого треугольника.

Ответ: P=3 $\sqrt{10}$.

3. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120˚, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5˚. Определить число сторон этого многоугольника.

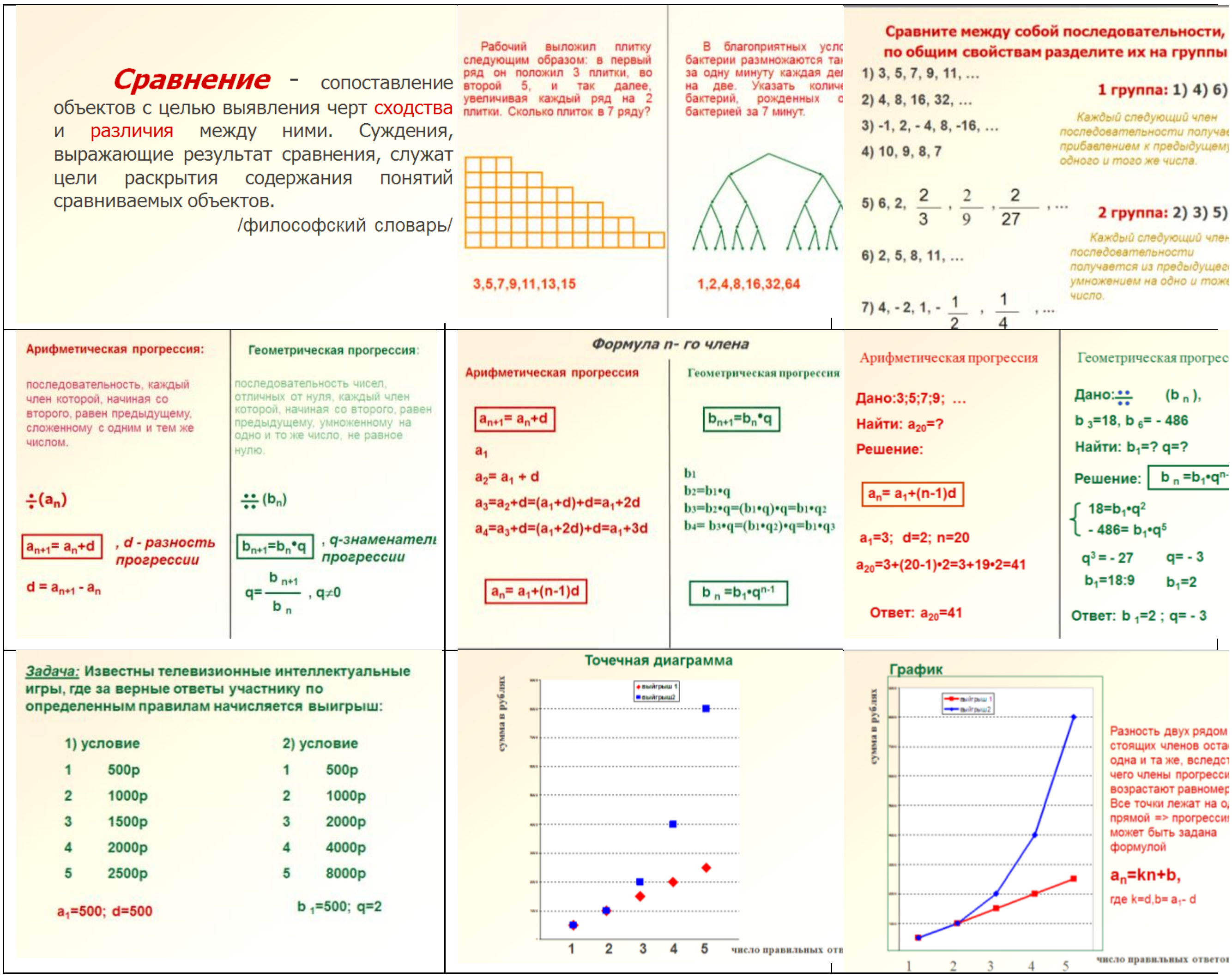
Ответ: 9 сторон**.**

4. У мальчика был один лист бумаги, который он разделил на 4 части. Четвёртую часть количества имеющихся кусков бумаги мальчик выбросил. Каждый из оставшихся кусков мальчик разделил опять на 4 части и опять выбросил четвёртую часть имеющихся кусков бумаги. После того как мальчик повторил такую процедуру ещё 5 раз, он выбросил все имеющиеся у него куски бумаги. Сколько всего кусков бумаги мальчик выбросил?

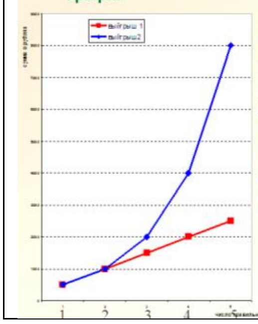
Ответ: 3280.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Презентация к уроку «Сравнение арифметической и геометрической прогрессии»



График



Разность двух рядом стоящих членов на каждом следующем шаге возрастает, вследствие чего скорость роста геометрической прогрессии все время увеличивается и точки, соответствующие её членам резко уходят «вверх». Все они лежат на кривой, которая называется _экспонента_.

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

Арифметическая прогрессия | **Геометрическая прогресс**

Характеристическое свойство

$\div$ 28,34,40,46,52,58,64,70 …

28 34 40 46 52 58 64 70 76

34 46 58 70

Вставьте между каждыми двумя членами верхнего ряда их среднее арифметическое.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

$$\boxed{a_k = \frac{a_{k-m} + a_{k+m}}{2}}$$

$\div\div$ 1,2,4,8,16,32,64,128,

1 2 4 8 16 32 64 12

2 8 32 12

Вставьте между каждыми дв членами верхнего ряда их ср геометрическое.

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$$

$$\boxed{b_k = \sqrt{b_{k-m} \cdot b_{k+m}}}$$

Индийский царь Шерам призвал к себе изобретателя шахм ученого Сету, и предложил, чтобы он сам выбрал себе награду создание интересной и мудрой игры. Царя изумила скромнос просьбы, услышанной им от изобретателя: тот попросил выда ему за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, вторую - два, за третью - еще в два раза больше и т.д. Скол зерен должен получить изобретатель шахмат?

1 кл. – 1
2 кл. - 2
3 кл. - 4

35 кл. - 17 179 869 184

64 кл.- 9 223 372 036 854 775 808

Общее число зерен: 18 446 744 073 709 551 615

Масса такого числа зерен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.