ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Выпускная квалификационная работа
обучающейся по направлению подготовки
010301.62 Математика
очной формы обучения, группы 07001413
Колодченко Алены Александровны

Научный руководитель
д. ф. - м. н., профессор,
Васильев В.Б.

Белгород 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория обобщенных функций – область функционального анализа, которая возникла и развивалась в связи с потребностями современной математической физики и позволила правильно поставить и решить ряд теоретических и прикладных задач. Если возникает необходимость серьезно заниматься исследованием математических моделей физических явлений, то обязательно потребуется изучить основной язык современной математической физики – теорию обобщенных функций.

Необходимость во введении понятий, называемых обобщенными функциями, возникла при попытке дать строгое описание сосредоточенных объектов, которые являются удобными физическими идеализациями. С другой стороны, обобщенные функции позволяют также с единой точки зрения рассматривать производные гладких и разрывных функций, преобразование Фурье убывающих и растущих функций и др., то есть в них имеется и чисто математическая потребность.

Дифференциальное исчисление и теория дифференциальных уравнений базируются на понятии производной, которая первоначально вводится в классическом смысле. Например, любая монотонно неубывающая функция имеет не более чем счетное число точек разрыва первого рода, в которых функция заведомо не дифференцируема в классическом смысле.

В физике и разделах математики: в дифференциальных уравнениях и теории вероятностей возникает потребность расширить понятие производной, вводя обобщенную производную, с помощью которой функция, имеющая разрывы первого рода, становится дифференцируемой в точках разрыва. Как результат дифференцирования в обобщенном смысле разрывных функций возникают обобщенные функции.

Важный вклад в формирование нового математического подхода к понятию функции в физике принадлежит Н. М. Гюнтеру, который предлагал рассматривать вместо точечных характеристик типа плотности соответствующие функции множеств еще в 1916 году и пытался переосмыслить на этой основе понятие решения уравнения математической физики.

Актуальность данной темы заключается в том, что обобщенные функции необходимо рассматривать и изучать для решения ряда задач физики и математики. Обобщенные функции позволяют правильно поставить и разрешить ряд классических проблем прикладного значения.

Тема исследования: Обобщенные функции и действия над ними.

Объект исследования: обобщенные функции.

Предмет исследования: развитие теории обобщенных функций.

Цель исследования: дать теоретическое обоснование понятия «обобщенная функция» и рассмотреть основные действия, применяемые к ним.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть обобщенные функции как линейные функционалы.
2. Изучить действия над обобщенными функциями.
3. Рассмотреть пространство обобщенных функций.
4. Привести примеры обобщенных функций.

Для решения поставленных задач использовался комплекс методов исследования:

- обобщение изученных ранее данных;
- анализ научно-методической литературы;
- систематизация информации.

Научная новизна: Существуют многие физические модели, которые в терминах обычных функций не могут быть описаны. Например, задача Коши для уравнения теплопроводности. Мы не можем их описать при помощи обычных функций. Для этого и необходимы обобщенные функции.

Практическое значение: материал, рассмотренный в данной выпускной квалификационной работе, может быть использован как в школьном, так и в вузовском курсе изучения математики.

Структура исследования: работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы.

1 Теоретическое обоснование понятия «обобщенные функции»

1.1. Обобщенные функции как линейные функционалы

Обобщенные функции впервые были введены в науку П. Дираком в его квантовомеханических исследованиях, в которых систематически использовалась знаменитая δ-функция. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л. Соболевым и Л.Шварцем. В дальнейшем теория обобщенных функций интенсивно развивалась многими математиками. Развитие теории обобщенных функций стимулировалась в основном потребностями математической физики и квантовой физики.

Обобщенная функция является обобщением классического понятия функции. Это обобщение, с одной стороны, дает возможность, выразить в математической форме такие понятия, как, например, плотность материальной точки, плотность точечного заряда или диполя, плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность силы, приложенной в точке и т.д.

С другой стороны, в понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя, например, измерить плотность вещества в точке, а можно измерить лишь его среднюю плотность в достаточно малой окрестности этой точки и объявить это плотностью в данной точке; грубо говоря, обобщенная функция определяется своими «средними значениями» в окрестности каждой точки.

Обобщённая функция f определяется как линейный непрерывный функционал $(f,\ \varphi)$ над основными функциями φ, где $(f,\ \varphi)$ обозначается как значение функционала f на элементе φ.

Нулевой обобщенной функцией называем такой функционал, значения которого равны нулю на любой пробной функции. Две обобщенные функции равны (пишем $f_1 =^{K`} f_2$), если значения соответствующих функционалов совпадают на всех пробных функциях (т.е. $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)\ \forall\ \varphi \in K$).

Важный частный случай:

Пусть g(x) – произвольная локально-суммируемая функция (т.е. такая, которую можно под знаком модуля проинтегрировать по любому конечному интервалу; эта функция может иметь разрывы первого рода (скачки), а также слабые степенные, порядка $O((x - x_0)^{\alpha})$, $\alpha < 1$, особенности).

Рассмотрим произвольную локально суммируемую (в частном случае непрерывную) функцию $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданную на R^n. С помощью обычной функции $g(x)$ построим линейный функционал $g \in D`(R^n)$, определив его с помощью формулы

$$(g, \varphi) = \int_{R^n} g(\vec{x})\, \varphi(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1.$$

Проверим условие непрерывности.

$$\lim_{k\to\infty} (g, \varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \int_{R^n} g(x)\varphi_k(x)dx$$

$$= \int_G g(x) \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)dx = \int_G g(x)\varphi(x)dx = (g, \varphi)$$

Переход к пределу под знаком интеграла законен в силу равномерной сходимости последовательности функций $\varphi_k(x)$. Таким образом, любую обычную функцию $g(x)$ можно рассматривать как обобщенную функцию $g \in D(R^n)$. Такие обобщенные функции будем называть регулярными обобщенными функциями. Все остальные обобщенные функции – сингулярные обобщенные функции.

δ-функция Дирака. В качестве примера сингулярной обобщенной функции рассмотрим функционал

$$\delta_{x^0} = \delta(x - x^0) = \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0) \in D(R^n) \qquad (1)$$

где фиксированная точка $x^0 \in R^n$. Функционал δ_{x^0} действует на функцию $\varphi(x) \in D`(R^n)$ следующим образом:

$$(\delta_{x^0}, \varphi) = \int_{R^n} \delta(x - x^0)\varphi(xx)dx = \varphi(x^0) \quad (2)$$

При $x^0 = 0$ для обобщенной функции $\delta_0 = \delta = \delta(x)$ имеем

$$(\delta, \varphi) = \int_{R^n} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad (3)$$

Легко показать, что функционал (2) линейный и непрерывный, то есть является обобщенной функцией. Обобщенная функция (1) называется δ – функцией Дирака.

Рассмотрим открытое множество $\Omega \subset R^n$. Будем говорить, что обобщенная функция f равна О на множестве Ω, если для $\forall\ \varphi \in D(R^n)$ с носителем $supp\ \varphi \in \Omega$ выполнено условие $(f, \varphi) = 0$.

Обозначим через Ω_{max} наибольшее открытое множество, на котором обобщенная функция f равна нулю. Носителем обобщенной функции f называется замкнутое множество $supp\ f = R^n \backslash \Omega_{max}$.

Очевидно, что $supp\ \delta(x - x^0) = |x^0|$, то есть состоит из одной точки $x^0 \in R^n$. Вне этой точки δ – функция Дирака равна нулю. При $x^0 = 0$ δ - функция (3) сосредоточена в начале координат. Рассмотрим обобщенную функцию вида $\delta\ (A_x)$ (4), где A-невырожденная матрица.

Применим функционал (4) к функции $\varphi(x)$:

$$\big(\delta(A_x), \varphi(x)\big) = \int_{R^n}(A_x)\varphi(x)dx \quad (5)$$

В интеграле перейдем от переменных интегрирования $x_1, \dots, x_n$ к переменным $y_1, \dots, y_n$с помощью преобразования $y = A_x$, тогда

$$\big(\delta(A_x), \varphi(x)\big) = \int_{R^n} \delta(y)\varphi(A^{-1}y)|J|dy = |J|\varphi(0) \quad (6)$$

где $|J| = |\det A^{-1}| = |\det A|^{-1}$.

Сравнив (6) и (3), получим формулу:

$$\delta(A_{\vec{x}}) = \frac{1}{|\det A|}\delta(\vec{x}) \quad (7)$$

Дифференцирование обобщенных функций. Определим производную любого порядка от обобщенной функции $f \in D(R^n)$. Производная $D^\alpha f \in D(R^n)$ определяется с помощью соотношения

$$(D^{\alpha} f, \varphi) = (-1)^{\alpha} (f, D^{\alpha} \varphi) \qquad (8)$$

где $\forall\ \varphi(x) \in D(R^n), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Очевидно, что правая часть формулы (8) определена, а значит, определен непрерывный функционал $D^{\alpha} f$ в левой части формулы. Формула (8) позволяет определить, производную от любой обычной функции.

Рассмотрим свойства обобщенных функций.

1. Пространство $D`(R^n)$ – полное: если последовательность обобщённых функций $f_i$ из $D`(R^n)$ такова, что для любой функции $\varphi \in D(R^n)$ числовая последовательность (f_i, φ) сходится, то функционал $(f, \varphi)=\lim\limits_{i\to\infty}(f_i, \varphi)$ принадлежит $D`(R^n)$.

2. Всякая f из $D`(R^n)$ есть слабый предел функций из $D(R^n)$. Это свойство иногда берётся в качестве исходного для определения обобщённой функции, из полноты пространства обобщённых функций это приводит к эквивалентному определению.

3. Любая обобщённая функция из $D`(R^n)$ бесконечно дифференцируема (в обобщённом смысле).

4. Дифференцирование не увеличивает носителя обобщённой функции.

5. Для обобщённых функций справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения αf, где $\alpha \in C^{\infty}(R^n)$.

6. Всякая обобщённая функция $f \in$ из $S`(R^n)$ или $E`(R^n)$ есть некоторая частная производная от непрерывной функции в R^n.

7. Для любой обобщённой функции f порядка N с носителем в точке 0 существует единственное представление (f, φ) в виде линейной комбинации частных производных φ в нуле, с порядком меньшим либо равным N.

Для обобщенных функций, то есть линейных непрерывных функционалов на К, определены операции сложения и умножения на числа, которые мы рассмотрим в следующем пункте.

1.2. Действия над обобщенными функциями

Теперь мы определим сложение и вычитание обобщенных функций и умножение обобщенной функции на число. Определения этих действий обобщают аналогичные действия над функциями, иначе говоря, в том случае, когда обобщенные функции оказываются обыкновенными функциями, вводимые ниже действия совпадают с обычными действиями над функциями.

Введем линейные операции над обобщенными функциями. *Определение 1.*

1) Сложение: $(f_1 + f_2$, φ):= $(f_1$, φ) + $(f_2$, φ);

2) Умножение на число: (γf, φ):= (f, γφ).

Таким образом, K` превращается в линейное пространство. Кроме того, обобщенные функции можно умножать на гладкие классические функции.

Определение 2.

∀ h(x) ∈ C^∞ (hf, φ):= (f, hφ) (определение корректно, т.к. произведение h(x)φ(x) тоже является пробной функцией).

Замечание 1.1. Здесь мы воспользовались следующим наводящим соображением: заметим, что для регулярных обобщенных функций имеет место цепочка равенств

$$(hf,\varphi) = \int\big(h(x)f(x)\big)\varphi(x)dx = \int f(x)\big(h(x)\varphi(x)\big)dx = (f,h\varphi).$$

Затем принимаем это равенство по определению для всех обобщенных функций. Подобного рода наводящие соображения лежат в основе всех дальнейших определений операций над обобщенными функциями.

Замечание 1.2. Не удается разумным образом определить произведение обобщенной функции на разрывную и, тем более, произведение обобщенных функций. О возникающих трудностях дает представление следующий пример: ясно, что для любого n следует считать равными θ^n и θ; но для такого произведения не могут выполняться обычные правила дифференцирования.

Рассмотрим дифференцирование обобщенных функций.

Определение 3. Производной обобщенной функции f (коротко: обобщенной производной) назовем функционал $f`$, действующий на пробную функцию φ по следующему правилу: $(f`, \varphi) := (f, -\varphi`)$.

Легко проверить корректность определения, т.е. что $f`$ является линейным непрерывным функционалом. Таким образом:

Следствие 1.1. Любая обобщенная функция имеет любое количество производных, причем: $(f^{(m)}, \varphi) = (f, (-1)^m \varphi^{(m)})$.

Замечание 1.3. При определении обобщенной производной функции не использовалось понятие сходимости в пространстве K\`.

Утверждение 1.1. $\theta^` = \delta$.

$$(\theta^`, \varphi) = (\theta, -\varphi^`) = \int_0^\infty (-\varphi^`) dx = -\varphi(\infty) + \varphi(0) = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Обозначение 1.1. Будем писать $g_+(x)$ для (классической) функции g(x), «обрезанной» нулём слева:

$$g_+(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ g(x), x > 0 \end{cases}$$

С использованием данного обозначения $x_+^` = \theta(x)$, то есть $\delta = x_+^{``}$. В действительности имеет место общая теорема (Л.Шварц).

Теорема 1.1. Любая функция из K\` является обобщенной производной (какого-то порядка) от некоторой регулярной обобщенной функции, порождаемой непрерывной функцией (без доказательства).

Обобщая результат утверждения 1.1, покажем, что:

Утверждение 1.2. Пусть функция f(x) непрерывна и дифференцируема всюду, кроме точки x=0, где она имеет разрыв первого рода. Тогда обобщенная производная этой функции есть $f` = f`(x) + [f]_{x=0}\,\delta$, где $f`(x)$ классическая производная (определенная всюду, кроме точки x=0) и $[f]_{x=0} = \lim_{x\to+0} f(x) - \lim_{x\to-0} f(x)$ – величина скачка f(x).

$$(\acute{f},\varphi) = (f,-\varphi`) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\varphi`(x)dx - \int_{0}^{\infty} f(x)\varphi`(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0} f`(x)\varphi(x)dx + \int_{0}^{\infty} f`(x)\varphi(x)dx + [f]_{x=0}\varphi(0) = f(x) + [f]_{x=0}\delta,\varphi)$$

Замена переменной обобщенной функции. Как уже отмечалось, говорить о значениях обобщенной функции в отдельных точках бессмысленно. Однако, мы будем для обобщенной функции использовать обозначение f(x) (вместо f) с тем, чтобы отличать обобщенную функцию f от другой обобщенной функции f(t(x)), которую мы введем следующим образом:

Пусть t(x) ∈ C^∞ – строго монотонная функция, т.е. существует обратная к ней: y=t(x) → x=τ (y). Тогда под f(t(x)) понимается функционал, действующий по правилу: (f(t(x)), φ(x)):= (f(x), $\frac{\varphi(\tau(x))}{|t`(\tau(x))|}$).

В частности, при линейной замене переменной, $(f(ax+b),\varphi) \coloneqq \frac{1}{|a|}\left(f(x),\varphi(\frac{x-b}{a})\right)$.

Сходимость в пространстве K`.

Определение 4. Последовательность обобщенных функций f_n ∈ K` сходится, если ∃$f$ ∈ K` такая, что ∀ φ ∈ K $(f_n, \varphi)\xrightarrow[n\to\infty]{}(f, \varphi)$.

Замечание 1.4. Ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$, сходится:

$$(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n),\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n) = \sum_{n=-N}^{N}\varphi(n)$$

где интервал [−N, N] ⊃ supp φ.

Определение 5. Последовательность функций называется δ-образной, если она сходится к δ-функции.

Утверждение 1.3. Сходящиеся последовательности (и ряды) из обобщенных функций можно почленно дифференцировать (любое число раз).

$$(\acute{f_n},\varphi) = -(f_n,\varphi`) \xrightarrow[n\to\infty]{} -(f,\varphi`) = (f`,\varphi).$$

Формула суммирования Пуассона.

Используя утверждение 1.3, нетрудно получить известную формулу, имеющую многочисленные приложения. Рассмотрим функцию f(x), заданную на отрезке [0, 2π] по формуле f(x) = $\frac{x}{2\pi}$ и продолженную за пределы этого отрезка с периодом 2π. Как и всякая периодическая функция, она раскладывается в ряд Фурье (который, как известно, сходится к самой функции в точках непрерывности и к серединным значением в точках разрыва):

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi} e^{-ikx} dx = \begin{cases} \frac{i}{2\pi k}, k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, k = 0 \end{cases}.$$

Функция f(x) локально-суммируема; соответствующую ей регулярную обобщенную функцию можно дифференцировать, и при этом применить почленное дифференцирование ряда Фурье. Получаем

$$\frac{1}{2\pi} - \sum_k \delta(x - 2\pi k) = f`(x) = -\sum_{k\neq 0} \frac{1}{2\pi} e^{ikx} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\sum_k e^{ikx} = \sum_k \delta(x - 2\pi k).$$

Это и есть формула суммирования Пуассона (в одном из вариантов).

1.3. Преобразование Фурье обобщенных функций

Преобразование Фурье – операция, сопоставляющая одной функции вещественной переменной другую функцию вещественной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты при разложении исходной функции на элементарные составляющие — гармонические колебания с разными частотами.

Преобразование Фурье основных функций из S.

Напомним некоторые сведения о преобразовании Фурье «обычных» функций. Рассмотрим пространство $L_1(R^n)$. Преобразование Фурье функции $\phi(t) \in L_1(R^n)$ определяется формулой

$$F[(\varphi(t)](\xi) = \psi(\xi) =^{def} \int \varphi(t)e^{i(\xi,t)}dt, \qquad (\xi,t) = \xi_1 t_1 + \cdots + \xi_n t_n \qquad (9)$$

Функция $F[\varphi](\xi)$ представляет собой ограниченную непрерывную функцию, которая стремится к нулю при $|\xi| \to \infty$. Отметим также, что если для $f \in L_1$ выполняется соотношение

$$\int f(t)e^{i(t,\xi)}dt \equiv 0$$

то $f(t) = 0$. В пространстве $L_2(R^n)$ имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. (Планшереля). Для любой функции $f(t) \in L_2(R^1)$ интеграл

$$g_R(\xi) = \int_{-R}^{R} \dots \int_{-R}^{R} f(t)e^{it\xi}\, dt_1 \dots dt_n$$

при любом R является функцией из L_2. При этом $g_R \to g$ в метрике L_2 при $R \to \infty$ и выполнено соотношение

$$\int |g(\xi)|^2\, d\xi = 2\pi \int |f(t)|^2 dt \qquad (10)$$

Так как основные функции из $S(R^n)$ суммируемы, для них определена операция (классического) преобразования Фурье $F[\varphi]$:

$$F[\varphi(t)](\xi) = \int \varphi(t)e^{i(\xi,t)}dt, \;\; \varphi \in S \qquad (11)$$

При этом $F[\varphi](\xi)$ ограничена, непрерывна и стремится к нулю при $|\xi| \to \infty$. Более того, так как $\varphi(t)$ – бесконечно дифференцируема и убывает быстрее любой степени вместе со всеми своими производными, то

$$D_\xi^j F[\varphi](\xi) = \int (it)^j \varphi(t)e^{i(\xi,t)}dt = F[(it)^j\varphi(t)](\xi)$$

$$(12)$$

$$F\left[D^j\varphi(t)\right](\xi) = \int (D^j\varphi(t))e^{i(\xi,t)}dt = (-i\xi)^j F[\varphi](\xi)$$

Из оценки $(1-\Delta)^N[(it)^j\varphi(t)]e^{i(\xi,t)}dt$

$$(1+|\xi|^2)^N \left|D^j F[\varphi](\xi)\right| \leq \left|\int (1-\Delta)^N [(it)^j \varphi(t)] e^{i(\xi,t)} dt\right|$$

$$\leq C \sup(1+|t|^2)^{n+1} \left|(1-\Delta)^N [t^j \varphi(t)]\right| \leq p_{2N+n+1}(\varphi)$$

где C не зависит от ϕ, получаем p_N (F[φ]) p_{2N+n+1}(φ), откуда следует, что преобразование Фурье F есть непрерывное отображение S в S. Докажем, что оно взаимно однозначно и обратное преобразование F^{-1} непрерывно, то есть справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. Преобразование Фурье F осуществляет (линейный) изоморфизм пространства S на S.

Сначала покажем, что формула обращения преобразования Фурье имеет вид

$$\varphi(t) = F^{-1}[\psi(\xi)](t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{-i(\xi,t)} d\xi, \;\; \psi \in S \tag{13}$$

Доказательство (для простоты выкладок) проведем для случая n = 1. Напомним, что $\frac{1}{\pi}\frac{\sin Ax}{x} \to \delta(x)$ в S` при A → ∞. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-it\xi}\varphi(\xi)$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} e^{-it\xi}\varphi(\xi)d\xi$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} e^{-it\xi}d\xi \int e^{ix\xi}\varphi(x)dx$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\big(A(t-x)\big)}{t-x}, \varphi(x)\right) = \big(\delta(t-x), \varphi(x)\big) = \varphi(t)$$

Покажем теперь, что

$$\varphi = F^{-1}[\varphi(\xi)](t) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\varphi(-\xi)](t) \tag{14}$$

Действительно,

$$F^{-1}[\varphi(\xi)](t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \varphi(\xi)e^{-i(t,\xi)}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}F[\varphi(\xi)](-t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \varphi(-\xi)e^{i(t,\xi)}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n F[\varphi(-\xi)]}$$

*Преобразование Фурье обобщенных функций из S`.* Вернемся к обобщенным функциям. Определим преобразование Фурье обобщенных функций из S` как операцию, сопряженную к операции преобразования Фурье для основных функций. В пространстве S`(R ^{n}) преобразование Фурье определим равенством

$$(F[f],\varphi) = (f, F[\varphi]), \quad f \in S`, \varphi \in S \tag{14.1}$$

Так как преобразование Фурье φ → F[φ] – линейная, непрерывная операция из S в S, то ясно, что f→ F[f] – линейная и непрерывная операция из S` в S`.

Ясно, что обратная операция F^{-1} [f] определяется формулой

$$(F^{-1}[f],\varphi) = (f, F^{-1}[\varphi]) \tag{15}$$

Отметим, что при таком определении если f – регулярная обобщенная функция, скажем из $L_1(R^n)$ или $L_2(R^n)$, то так определенное преобразование Фурье совпадает с классическим. Отметим еще, что

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n F[f(-t)],} \quad f \in S`$$

где f(−t) – отражение, то есть (f(−t), φ(t)) = (f(t), φ(−t)). Таким образом, справедливо следующее.

Утверждение 1.4. Преобразование Фурье f→ F[f] есть линейный изоморфизм S` на S`.

Отметим некоторые свойства преобразования.

1) Линейное преобразование аргумента:

$$F[f(At)](\xi) = \frac{1}{|\det A|} F[f](A^{-1T}\xi), \quad detA \neq 0.$$

Здесь A→ A^T обозначает операцию транспонирования.

2) Сдвиг преобразования Фурье и преобразование Фурье сдвига:

$$F[f](\xi + h) = F\left[e^{i(h,t)} f(t)\right](\xi) \qquad\qquad F[f(t+t_0)] = e^{(\xi,t_0)} F[f](\xi)$$

3) Дифференцирование преобразования Фурье и преобразование Фурье производной:

$$D_\xi^j F[f](\xi) = F[(it) f(t)](\xi), \quad F\left[D_t^j f(t)\right](\xi) = (-i\xi) F[f](\xi).$$

Преобразование Фурье обобщенных функций из E`.

Сначала напомним, что каждая обобщенная функция f из E` принадлежит пространству S` и, более того, имеет компактный носитель. В частности, f – конечного порядка, то есть f – линейный непрерывный функционал над некоторым банаховым пространством S_N , а потому существуют C и N такие, что

$$|(f,\varphi)| \leq C_{pN}(\varphi), \quad \varphi \in S_N \tag{16}$$

Теорема 1.3. Если f ∈ E` , то преобразование Фурье F[f] ∈ θM и представляется в виде

$$F[f](\xi) = (f(t), \eta(t) e^{i(t,\xi)}) \tag{17}$$

где η(t) – любая функция из D, равная 1 в окрестности носителя f.

Доказательство.

Пусть η(t) ∈ D и η(t) = 1 на носителе f. Имеем

$$\left(D^j F[f], \varphi\right) = (-1)^{|j|}\left(F[f], D^j\varphi\right) = (-1)^{|j|}(f, F\left[D^j\varphi\right]$$

$$= (-1)^{|j|}(f, \eta(t)\left(-it\right)^j F[\varphi]\big) = (f(t), \int \eta(t)\,(it)^j \varphi(\tau) e^{i(\tau,t)} d\tau\big)$$

$$= \int (f(t), \eta(t)(it)^j e^{i(\tau,t)} \varphi(\tau) d\tau$$

Откуда при j = 0 и следует (17). Докажем, что правая часть (17) принадлежит θM. Из (16), имеем

$$\left|D^j F[f](\xi)\right| = \left|f(t), \eta(t)(it)^j e^{i(\xi,t)}\right| \le C_{pN}(\eta(t)(it)^j e^{i(\xi,t)}$$

$$= C \max \sup (1+t^2)^{\frac{N}{2}} \left|D_t^j \eta(t)\big(t\big)^j e^{i(\xi,t)}\right]\Big| \le C_j (1+|\xi|^2)^{N/2}$$

для некоторых $C_j \geq 0$. Что и доказывает теорему.

Замечание 1.4. Из (1) следует, что F[f](ξ) – целая функция. В частности,

$$\left|D^j F[f](\xi + i\sigma)\right| \le C_j^{`} (1+|z|^2)^{N/2} e^{b|\sigma|} \qquad (18)$$

Замечание 1.5. Отметим, что функцию η(t) в формуле (17) можно опустить, понимая выражение (f(t), $e^{i(t,\xi)}$) как действие функционала f ∈ E\` на основную функцию $e^{i(t,\xi)}$ ∈ E.

Преобразование Фурье свертки.

Утверждение 1.5. Пусть f ∈ S\` и g ∈ E\`. Тогда их свертка f * g ∈ S\` и ее преобразование Фурье дается формулой

$$F[f * g] = F[f]F[g] \qquad (19)$$

Доказательство. Имеем

$$(f * g, \varphi) = (f(x), g(y), \varphi(x+y))), \;\; \varphi \in S(R^n)$$

Отсюда, применяя преобразование Фурье (14.1), получим

$$(F[f * g], \varphi) = (f * g, F[\varphi]) = (f(t), (g(y), \int \varphi(\xi) e^{i(x+y,\xi)} d\xi)).$$

Теперь, пользуясь формулой для обобщенных функций из S\` и учитывая, что F[g] ∈ θM, имеем

$$(F[f * g], \varphi)$$

$$= (f(t), \int (g(y), e^{i(\xi,y)} e^{i(t,\xi)} \varphi(\xi) d\xi$$

$$= \left(f(t), \int F[g](\xi) e^{i(t,\xi)} \varphi(\xi) d\xi = (f, F[F[g]\varphi] = (F[f], F[g]\varphi\right)$$

$$= (F[f]F[g], \varphi).$$

Откуда и следует (19).

Замечание 1.6. Если f∈ S\` и g ∈ S, то свертка $f$ *g ∈ $\theta M$. Формула (19) остается справедливой и в этом случае. Пусть $f$, g ∈ S\` (Г); тогда, как мы видели, существует f*g ∈ S\`(Г). Однако формула (19) требует дополнительного осмысления, ибо произведение обобщенных функций F[f]·F[g], вообще говоря, не определено.

Преобразование Фурье основных функций из D(R¹).

Пусть φ(t) – некоторая основная функция из D. Поскольку она финитная, скажем, φ∈ D(K), где компакт K = [−a, +a], то ее преобразование Фурье

$$\psi(z) = F[\varphi] = \int \varphi(t)e^{itz}dt = \int_{-a}^{a} \varphi(t)e^{itz}dt, \quad z = x + iy$$

имеет смысл при всех $z \in C$. Более того, ясно, что функция F[φ(t)](z) есть целая аналитическая функция, причем справедлива оценка

$$\left|z^j\psi(z)\right| = \left|\int_{-a}^{a} \varphi^{(j)}(t)e^{itz}dt\right| \le C_j e^{a|y|}, \; j = 0,1 \dots. \tag{20}$$

При этом нетрудно видеть, что $\|\psi\|_{a,m} \le C_a p_{am}(\varphi)$, где слева стоит норма пространства Z(a), а справа – норма пространства D(K). Так что преобразование Фурье есть непрерывное отображение пространства Фреше D(K), где K = [−a, +a], в пространство Фреше Z(a). Верно и обратное утверждение. Таким образом, преобразование Фурье есть линейное непрерывное отображение из D в Z.

Лемма 1.2. Всякая целая аналитическая функция ψ(z), удовлетворяющая при каждом j = 0, 1, . . . , оценке (20) (то есть ψ ∈ Z(a)), есть преобразование Фурье некоторой основной функции φ ∈ D([−a, a]).

Доказательство. Функцию φ(t) определим формулой

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)e^{-ixt}dx \tag{21}$$

Так как ψ(x) в силу оценки (20) убывает при |x| → ∞ быстрее любой степени, то интеграл в (21) сходится абсолютно и равномерно по x (вместе со всеми производными по параметру t). Таким образом φ(t) – бесконечно дифференцируемая функция. Покажем, что она финитна. Сдвинем ось интегрирования параллельно в комплексную плоскость

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x + i\tau)e^{-i(x+i\tau)^t}dx = \frac{1}{2\pi}e^{t\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x + i\tau)e^{-ix\tau}\,dx \tag{22}$$

Это законно в силу теоремы Коши, если учесть, что интегралы по вертикальным отрезкам [−N, −N + iτ] и [N, N + iτ] стремятся к нулю при N → ∞. Пусть теперь |t| > a, зададим некоторое число q > 0 и найдем τ из условия tτ = −q|t|. Так что |τ | =q. Используя неравенство (20), при j = 0 и j = 2 находим из (22)

$$|\psi(z)| \le e^{a|y|} min\left\{C_0, \frac{C_2}{|z|^2}\right\} \le C\frac{e^{a|y|}}{1+|z|^2} \le C\frac{e^{a|y|}}{1+|x|^2};$$

$$\varphi(t) \le \frac{1}{2\pi}e^{t\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} C\frac{e^{a|\tau|}}{1+|x|^2}dx = C`e^{-q|t|+a|\tau|} = C`e^{q(a-|t|)}.$$

Так как C` не зависит от q, то при q → ∞ находим, что φ(t) = 0. Следовательно, при |t| > a функция φ(t) = 0.

Таким образом, преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами D и Z. При этом обратное преобразование F^{-1} определяется формулой (21).

Некоторые операции на пространстве основных функций из Z.

Опираясь на установленный изоморфизм пространств D и Z

$$(\varphi(t) \to F[\varphi) = \psi(z))$$

рассмотрим некоторые непрерывные операции, которые допускаются в Z. Нетрудно видеть, что операции умножения (дифференцирования) в пространстве D в Z соответствуют непрерывные операции дифференцирования (умножения на степени z). Сдвигу φ(t+h) соответствует операция умножения на e^{izh} и наоборот. Поскольку в D имеет место сходимость ряда

$$\sum_q^\infty (it)^q \frac{h^q}{q!}\varphi(t) = e^{ith}\varphi(t),$$

то в Z это определяет разложение в ряд Тейлора

$$\sum_{q=0}^\infty \psi^{(q)}(z)\frac{h^q}{q!} = \psi(z+h)$$

с любым фиксированным комплексным h. В D определена операции свертки $\varphi(t) * \eta(t) \in D$, если φ из D и $\eta(t) \in E`$, а потому в Z определена и непрерывна операция умножения на целые аналитические функции $\zeta(z)$, удовлетворяющие оценке $|\zeta(z)| \leq C(1+|z|)^m e^{b|y|}$. Это следует из того, что свертка при преобразовании Фурье переходит в произведение преобразований Фурье. А преобразование Фурье обобщенных функций из E` как раз и есть функции типа ζ.

Теперь можно определить преобразование Фурье для функций из D` по формуле

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \;\; \varphi \in Z$$

Таким образом, $F[f]$ является линейным непрерывным функционалом над пространством Z. Поскольку пространство Z состоит из аналитических функций, то $F[f]$ называют аналитическим функционалом. Аналитические функционалы не вполне заслуживают называться «обобщенными функциями». В частности, для аналитических функционалов не определено понятие носителя и “регулярного” аналитического функционала.

2 Практическое применение обобщенных функций

2.1. Пространство обобщенных функций

Рассмотрим основные пространства обобщенных функций. Пусть R^n – n-мерное действительное евклидово пространство, а $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – точки из этого пространства. Определим скалярное произведение следующим образом:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

а норму – выражением

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \dots + x_n^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |x|}.$$

Расстояние между точками x *и* y определяется по формуле

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Определение 5. Основное пространство K^m состоит из действительных функций φ *(x)*, называемыми основными функциями, класса C^m, равными нулю вместе со всеми своими производными до порядка m включительно вне некоторых ограниченных областей.

Эти области вместе с границами определяют носители основных функций; обозначим их через $supp$ φ *(x)*. Носитель функции φ *(x)*определим как замыкание множества точек *x*, для которых φ *(x)*$\neq 0$; таким образом, если $x_0 \in supp\varphi(x)$, то, какой бы ни была окрестность V точки x_0, существует точка $x \in V$, для которой φ *(x)* $\neq 0$. Так как носитель функции φ *(x)* ограничен, то он является компактным множество.

Основное пространство K^m является векторным пространством, так как если $\varphi_1, \varphi_2 \in K^m, \alpha, \beta \in R,$ то $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in K^m$. Чтобы это пространство было топологическим, определим сходимость к нулю последовательности функций $\varphi_k(x) \in K^m, k \in N_0$ $(N_0 = N - \{0\})$, следующими условиями:

а) $supp\ \varphi_k(x) \subset |x| \leq a$;

б) $D^p \varphi_k(x) \overset{u}{\Rightarrow} 0, D^p = \frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}$,

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \leq m.$$

В этом случае $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0.$ (23)

Выражение (23) равносильно условиям а) и б), из которых первое означает, что носитель каждого члена последовательности $\varphi_k \in K^m$содержится в шаре радиуса a с центром в начале координат (n-мерный шаг), а второе условие означает, что эта последовательность функций вместе со всеми своими производными до порядка m включительно равномерно сходится к нулю. Таким образом, множество функций $\varphi(x) \in K^m$ со сходимостью, определенной нами выше, образует векторное топологическое пространство.

Если для пространства K^m положить $m = \infty$, то получится основное пространство К, образованное бесконечно дифференцируемыми функциями с компактными носителями. Что касается сходимости к нулю в пространстве К, то она определяется аналогично сходимости в пространстве K^m с условием, что последовательность основных функций вместе со всеми своими производными любого порядка сходится к нулю, то есть

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k(x)\|_m = 0 \text{ для любого m.}$$

Рассмотрим функцию (рис.1)

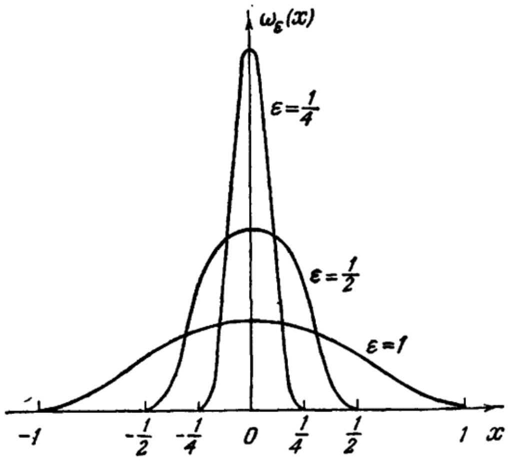

Рис. 1 Пример функции

Легко можно установить, что она бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель [a,b]. В точках a и b функция $\varphi\ (x)$ вместе со своими производными любого порядка равна нулю, то есть в этих точках ее график имеет касание бесконечного порядка с осью абсцисс.

Теорема 1.4. Если E является компактным множеством из R^n , а F-открытое множество, содержащее E(F⊃E), то существует основная функция $\varphi\ (x)$, равная 0 и 1 в остальной области.

Теорема 1.5. Если $\varphi\ (x) \in K$, а $U_k\ (k = 1,2, \dots, N) -$ конечное чисто областей (то есть открытых множеств), то существуют функции $e_k(x) \in K$, такие, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x) e_k(x),\ supp\ e_k(x) \subset U_k\ , \qquad (24)$$

причем эти функции $e_k(x) \in [0,1]$, равны нулю вне областей U_k и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^{N} e_k(x) = 1.$$

Последнее свойство представляет собой теорему разбиения единицы и используется при доказательстве локальных свойств обобщенных функций и при выполнении операций над ними.

Соотношение (24) может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x), \varphi_k(x) \in K, \quad supp\, \varphi_k(x) \subset U_k.$$

Данная теорема справедлива и для N=∞.

Теорема 1.6. Пусть $\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})$, $x \in R^n, y \in R^n$. Тогда существует последовательность

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{i=1}^{N} u_{ik}(x) v_{ik}(y)$$

где $u_{ik}(x) \in K(R^n), v_{ik}(y) \in K(R^m)$, которая сходится к $\varphi(x, y)$ при $k \to \infty$.

Это означает, что множество основных функций $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x) v_i(y)$, где $u_i(x) \in K(R^n), v_i\,(y) \in K(R^m)$, плотно в $K(R^{n+m})$.

Заметим, что функция $\varphi(x)$= C, C=const$\neq$ 0, не является основной, так как хотя она и бесконечно дифференцируема, но не обладает компактным носителем. Однако функция $\varphi(x) = 0$ является основной функцией.

Рассмотрим следующее пространство *S*. Основное пространство *S* получается расширением пространства K; по определению это содержит все функции $\varphi(x)$ класса C$^\infty$, которые при $|x| \to \infty$ стремятся к нулю вместе со всеми своими производными любого порядка быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$. Эти функции удовлетворяют соотношению

$$\left|x^k D^q \varphi(x)\right| \leq C_{kq},$$

где

$$x^k = x_1^{k1} x_2^{k2} \dots x_n^{kn},$$

$$D^q = \frac{\partial^{q_1+q_2+\cdots+q_n}}{\partial_{x1}^{q1} \partial_{x2}^{q2} \dots \partial_{xn}^{qn}},$$

$$C_{kq} = C_{k1k2\dots k_n q1q2\dots qn}(k_1, k_2, \dots, K_n, q_1, q_2, \dots, q_n = 0,1,2,\dots).$$

Определение 6. Последовательность функций $\varphi_k(x) \in S$ к функции $\varphi(x) \in S$, если для любых α, β

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \Rightarrow x^\beta D^\alpha \varphi(x),$$
$$k \to \infty, x \in R^n,$$

где $C_{\alpha\beta}$ не зависят от k.

Пространство S линейно, так как для любых $\lambda_{1,}\lambda_2 \in R$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ имеем $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \in S$.

Следует отметить, что пространство S шире пространства K(K⊂S), так как любой элемент $\varphi(x) \in K$ принадлежит и пространству S; обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Пространство S получено расширением пространства K путем уточнения поведения на бесконечности функции $\varphi(x)$, которое менее ограничительно, чем в случае пространства K. Именно в этом и состоит существенное отличие между этими пространствами.

Из определения сходимости в пространстве S следует, что она слабее сходимости в пространстве K, так как из сходимости в пространстве K следует сходимость в пространстве S. Если $\varphi \in K$ и $\varphi_k \to \varphi$ в K, то $\varphi_k \to \varphi$ и в S. Более того, пространство K плотно в S, так как для любого $\varphi \in S$ существует последовательность $\varphi_k \in K$, такая что $\varphi_k \to \varphi$.

Функция (рис.2) $\varphi(x) = e^{-x^2}, x \in R$, принадлежит основному пространству S, что можно легко проверить.

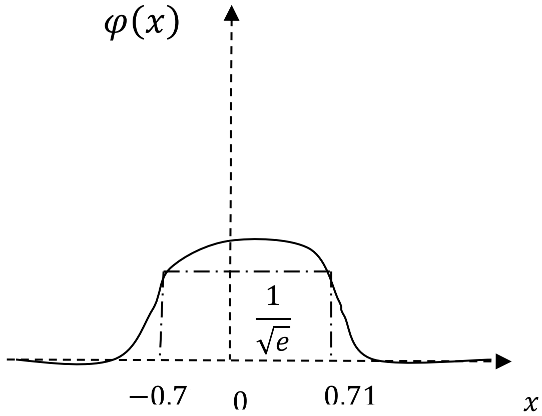

Рис. 2 Пример функции

В отличие от нее функции (рис. 3 и рис.4) не принадлежат пространству S. Действительно, функция $\varphi_1(x)$ не стремится к нулю при $x \to \infty$, а функция $\varphi_2(x)$ не дифференцируема в начале координат.

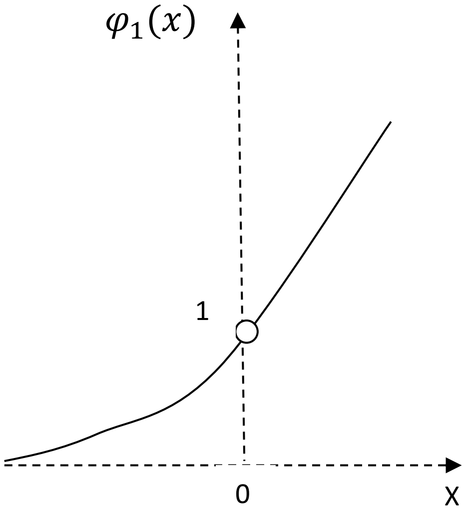

Рис. 3 Пример функции

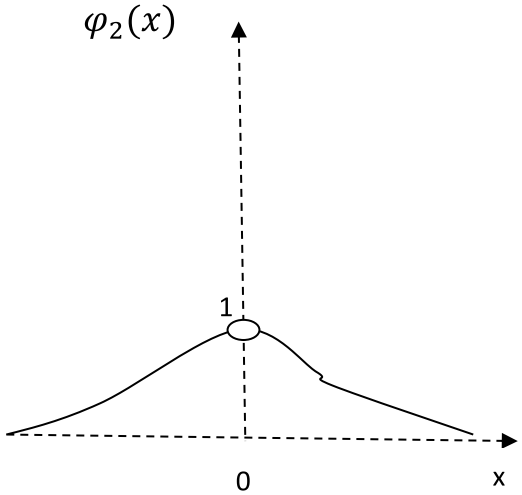

Рис. 4 Пример функции

Заметим, что если $\alpha(x) \in C^\infty$ и $\varphi(x) \in S$, то функция $\psi(x) = \alpha(x)\varphi(x)$ не всегда принадлежит пространству S; например, если $\alpha(x) = e^{x^2}$, то функция $\alpha(x)e^{-x^2} \notin S$. Можно показать, что если функция $\alpha(x) \in C^\infty$ вместе со всеми своими производными любого порядка и не возрастает при $x \to \infty$ быстрее полинома, то функция $\alpha(x)\varphi(x) \in S$. Этими свойствами обладают, например функции *sin x, cos x, P(x)* (полином).

Аналогично функция

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{-|x|^2} = e^{-(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)}, x \in R^n,$$

принадлежит основному пространству S. Тому же пространству принадлежит, в частности функция

$$\varphi(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, (x,y) \in R^2.$$

Функция $\varphi(x,y,z) = x^m, y^n, x^p e^{-(x^2+y^2+z^2)}, (x,y,z) \in R^3$ тоже принадлежит основному пространству S.

Обозначим через Ф рассматриваемое основное пространство (например, K^m, K или S). Совокупность обобщенных функций, порождаемых основным пространством Ф, образует топологическое пространство Ф\`, сопряженное с пространством Ф[1].

Соответственно определяются пространства (K^m)\`, K\`, S\`. В зависимости от рассматриваемых основных пространств получаются различные виды обобщенных функций. Так, обобщенные функции, определенные на пространстве K^m, называются обобщенными функциями конечного порядка $p \leq m$ (поскольку из включения $K^m \subseteq K^p, m \geq p$, следует включение ($K^p$)\`$\subseteq$ ($K^m$)\`); обобщенные функции, определенные на пространстве K^0 (случай m=0), называются мерами. Обобщенные функции, определенные на пространстве K, называются обобщенными функциями бесконечного порядка, а обобщенные функции, определенные на пространстве S, - обобщенными функциями медленного роста.

Поскольку сходимость, определенная в пространстве K, сильнее сходимости, определенной в пространстве S(S$\supset$K), то множество функционалов, определенных на пространстве K, содержит множество функционалов, определенных на пространстве S. Следовательно, имеет место соотношение

$$S` \subset K`$$

Поскольку основное пространство K плотно в S, то обобщенные функции медленного роста могут быть получены продолжением некоторых

---

[1] Совокупность всех непрерывных линейных функционалов, определенных на некотором топологическом линейном пространстве Ф, образует линейное пространство Ф\`, называемое сопряженным с Ф.

обобщенных функций, определенных на основном пространстве K. Интегрируемые функции, ограниченные функции и вообще локально интегрируемые функции, которые удовлетворяют соотношению

$$|f(x)| < A|x|^k \text{при } |x| \to \infty, A, k = const,$$

составляют класс обобщенных функций медленного роста. Они могут рассматриваться как продолжения соответствующих функционалов из пространства K`. Это свойство может быть использовано в случае преобразования Фурье.

Таким образом, аналогично обобщенные функции ограниченными носителями являются обобщенные функциями медленного роста.

2.2. Примеры обобщенных функций

Пусть для определения Ф=K . Определим функционал f, ставящий в соответствие каждой функции φ∈K число

$$(f, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots \qquad (25)$$

Эта сумма конечна, так как $\varphi(x)$ является функцией с компактным носителем. Определенный таким образом функционал представляет собой обобщенную функцию, потому что, как легко проверить, он является линейным и непрерывным. Очевидно, вместо основного пространства K можно рассмотреть основное пространство K^m и получить, таким образом, обобщенную функцию конечного порядка $p \leq m$ на этом пространстве.

Рассмотри теперь функционал (25) на пространстве S. В этом случае функция $\varphi(x)$ не имеет компактного носителя, а второй член в формуле является числовым рядом. Поскольку $\varphi(x) \in S$, то $|\varphi(x)\,| \leq \frac{A}{|x|^{m+2}}$, $A > 0, m > 0$, и следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(n)|$$

сходится, а значит, сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n).$$

Таким образом, функционал (25) имеет смысл и на пространстве S. Определенный таким образом функционал (25) является линейным. Если непрерывность следует из того, что сходимость в K сильнее сходимости в S. Следовательно, этот функционал является обобщенной функцией на S.

Обобщенную функцию δ (x) Дирака можно определить на каждом из пространств K^m, K или S соотношением

$$\big(\delta(x), \varphi(x)\big) = \varphi(0), x \in R^n. \tag{26}$$

Можно легко проверить, что этот функционал является линейным и непрерывным.

На основе соотношения (26) можно написать выражение для обобщенной функции Дирака, сосредоточенной в точке $x^0 \in R^n$ (сдвиг обобщенной функции); она обозначается символом $\delta(x - x^0)$ и определяется соотношением

$$\big(\delta(x - x^0), \varphi(x)\big) = \varphi(x^0), \quad x, \qquad x^0 \in R^n.$$

Заметим, что обобщенная функция Дирака является мерой, поскольку для определения этого функционала достаточно рассмотреть пространство $K^0 (m = 0)$.

Если обобщенная функция δ(x) определена на K^0 и если функция $\alpha(x) \in C^0$, то произведение $\alpha(x)\delta(x)$ имеет смысл. На основе формулы

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi), \varphi \in \Phi$$

можно написать следующее

$$\big(\alpha(x)\delta(x), \varphi(x)\big) = \big(\delta(x), \alpha(x)\varphi(x)\big) = \alpha(0)\varphi(0), \qquad x \in R^n.$$

Отметим, что функционал f, определенный на K^m, K или S соотношением

$$(f, \varphi) = |\varphi(0)|,$$

не является обобщенной функцией, хотя это непрерывный функционал, потому что он не линеен. Действительно, вообще говоря, модуль суммы двух чисел не равен сумме модулей этих чисел.

Рассмотрим примеры обобщенных функций для сингулярных и регулярных функций.

Будем говорить, что функция f(x), $x \in R^n$, является абсолютно интегрируемой в конечной области $D_n \subset R^n$, если существует интеграл

$$\int_{D_n} |f(x)| dx < \infty;$$

если функция f(x) абсолютно интегрируема в любой конечной области $D_n \subset R^n$, она называется локально интегрируемой. Заметим, что абсолютно интегрируемая функция является интегрируемой, т.е.

$$\int_{D_n} f(x) dx < \infty$$

Локально интегрируемые функции порождают важный класс обобщенных функций. Пусть f(x) является локально интегрируемой функцией и $\varphi(x) \in K$. Определим функционал на К соотношением

$$(f, \varphi) = \int_{R^n} f \varphi dx = \int_{D_n} f \varphi dx, \;\; x \in R^n, \tag{27}$$

где D_n - носитель основной функции $\varphi(x)$. Заметим, что если $f_k(x)$ образуют последовательность локально интегрируемых функций на R^n, равномерно сходящуюся на каждом компакте к функции f(x), то

$$\lim(f_k, \varphi) = (f, \varphi).$$

Следовательно, этот функционал определяет обобщенную функцию. Если f(x) является локально интегрируемой функцией с комплексными значениями, то соотношение (27) принимает вид

$$(f, \varphi) = \int_{D_n} \bar{f} \varphi dx.$$

Обобщенные функции, порожденные локально интегрируемыми функциями, называются регулярными обобщенными функциями или обобщенными функциями типа обычной функции; будем обозначать их тем же символом f(x), что и порождающую функцию.

Если $\varphi(x) \in S(R^n)$, а f(x) является интегрируемой функцией на R^n, то соотношение

$$(f, \varphi) = \int_{R^n} f\varphi dx, \;\; x \in R^n,$$

определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста.

Если f(x) является ограниченной функцией, то есть $|f(\mathrm{x})| \le A, A > 0$, для любого $x \in R^n$, то

$$|(f, \varphi)| \le A \int_{R^n} |\varphi(x)| dx \tag{28}$$

Интеграл в (28) существует. Следовательно, ограниченная функция f(x) определяет на пространстве S регулярную обобщенную функцию медленного роста.

В общем случае, если f(x) является локально интегрируемой функции, такой, что,

$$|f(x)| \le A|x|^k, A, k > 0,$$

то $|f(x)\varphi(x)| \le AB|x|^{-2}$. Следовательно, интеграл

$$\int_{R^n} f(x)\varphi(x) dx$$

существует, а функция f(x) определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста на основном пространстве S. Такие обобщенные функции определяются, например, функцией $e^{-\alpha|x|}, \alpha > 0$, многочленом *P(x)* и т.д.

Обобщенные функции, которые не являются регулярными, называются сингулярными. Обобщенная функция Дирака δ(x) является примером сингулярной обобщенной функции, поскольку не существует локально интегрируемой функции δ(x), такой что

$$\big(\delta(x), \varphi(x)\big) = \int_{R^n} \delta(x)\varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Можно сказать, что обобщенные функции применяются в различных сферах: в физике, механике, электротехнике. Рассмотрим применение обобщенных функций в данных областях более подробно.

В механике мы рассмотрим применение обобщенных функций для задачи линейной вязкоупругости.

Если в твердом деформируемом теле наряду с упругими свойствами проявляются и вязкие свойства, то говорят, что рассматриваемое тело является вязкоупругим. Для одномерного линейного вязкогоупругого тела между напряжением σ и деформацией ε, зависящими от времени, можно записать дифференциальное соотношение вида

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\sigma(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\varepsilon(t) \qquad (29)$$

где P и Q – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, характеризующие рассматриваемое упругое тело.

Теорема 1.7. Если при $t \leq 0$ одномерное линейное вязкоупругое тело находится в естественном состоянии ($\sigma = \varepsilon = 0$), то обобщенные функции ползучести и релаксации удовлетворяют соотношению

$$\varphi * \psi = t_+ = t\theta(t) \qquad (30)$$

Если рассматривать вязкоупругую модель Кельвина, то определяющее уравнение получается в виде

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

где E – модуль упругости, а η – коэффициент вязкости. Следовательно,

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = 1, Q\left(\frac{d}{dt}\right) = \eta\frac{d}{dt} + E.$$

Фундаментальные решения в K` (уравнения со сверткой) имеют вид

$$E_p(t) = \delta(t), E_q(t) = \frac{1}{\eta}\theta(t)e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

Выражения для нормального напряжения и линейной деформации принимают вид

$$\sigma(t) = \varepsilon_0[\eta\sigma(t) + E\theta(t)],$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(t)\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right).$$

Первая из полученных формул показывает, что в момент появления линейной деформации ε_0 напряжение $\sigma(t) = \varepsilon_0\psi(t)$ стремится к бесконечности. Действительно, благодаря вязкоупругим свойствам тело не может мгновенно получить конечную величину деформации при мгновенном изменении напряжения на конечную величину.

Для вязкоупругой модели Максвелла определяющее уравнение записывается в виде

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{1}{\eta}\sigma(t),$$

где дифференциальные операторы имеют следующие выражения:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{1}{E}\frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta}, Q\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt}.$$

Фундаментальными решениями будут следующие:

$$E_p(t) = E\theta(t)e^{-\frac{E}{\eta}t}, E_Q(t) = \theta(t).$$

Отсюда следует

$$\varphi(t) = \theta(t) * \left(\frac{1}{E}\frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta}\right)\theta(t) = \frac{1}{E}\theta(t) + \frac{1}{\eta}t_+,$$

$$\psi(t) = E\theta(t)e^{-\frac{E}{\eta}t} * \frac{d\theta(t)}{dt} = E\theta e^{-\frac{E}{\eta}t}.$$

Замечая, что

$$t_+ * \theta(t)e^{-\frac{E}{\eta}t} = \frac{\eta}{E}\theta(t)\left[t - \frac{\eta}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)\right],$$

и учитывая приведенные выше другие соотношения, можно легко проверить справедливость соотношения (30).

В этом случае выражения для нормального напряжения и линейной деформации принимают вид

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0\theta(t)e^{-\frac{E}{\eta}t},$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\theta(t)\left(1 + \frac{E}{\eta}t\right).$$

Рассмотрим применение обобщенных функций в физике, а именно исследование электрического двойного слоя на поверхности.

На поверхности S (рис. 5) рассмотрим электрический двойной слой с моментом μ(x, y, z). Объемная плотность определяется по формуле:

$$\rho(r) = -\frac{\partial}{\partial n}[\mu(r)\delta(S)]$$

А потенциал соответствующего электростатистического поля удовлетворяет уравнению

$$\Delta V(x,y,z) = -\frac{1}{R} * \frac{\partial}{\partial n}[\mu(x,y,z)\delta(S)]$$

где n – единичный вектор внутренней нормали к поверхности.

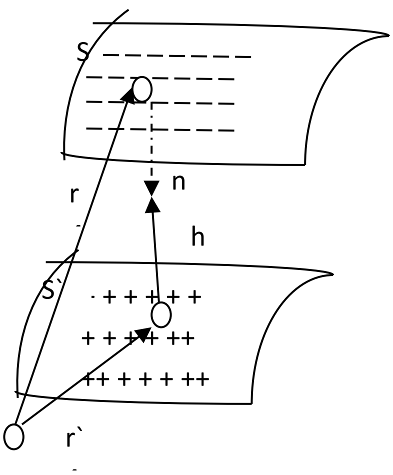

Рисунок 5 Электрический двойной слой

С помощью фундаментального решения $E(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi R}$ как и в предыдущем случае, получим

$$V(x,y,z) = -\frac{1}{R} * \frac{\partial}{\partial n}[\mu(x,y,z)\delta(S)].$$

Отсюда следует

$$V(x,y,z) = -\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{R} * \mu(x,y,z)\delta(S)\right] = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) * \mu(x,y,z)\delta(S)$$

а согласно формуле

$$f(x,y,z) * \sigma(x,y,z)\delta(S) = \int_S \sigma(u,v,w) f(x-u, y-v, z-w) dS$$

мы получим следующее:

$$V(x,y,z) = -\int_S \mu(u,v,w) \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}}\right] dS$$

В данном уравнении производная по нормали n берется относительно переменных u,v,w. Выражение общего решения через n фундаментальных решений позволяет избежать некоторых трудностей (разложение на простые дроби и т.д.).

Рассмотрим применение теории обобщенных функций в электрических цепях. Для этого необходимо рассмотреть задачу Коши для цепи RLC.

Цепь RLC состоит из активного сопротивлении R, катушки индуктивности L и конденсатора емкости C, соединенных последовательно с генератором, имеющим э.д.с. E(t). Эта э.д.с. начинает действовать при t=0 , т.е. когда замыкается электрическая цепь. При $t > 0$ в цепи устанавливается ток силой $i(t)$ и зарядом $q(t)$.

Принимая за неизвестную функцию заряд q(t) можно записать следующее дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\frac{\tilde{d}^2}{dt^2}q(t) + R\frac{\tilde{d}}{dt}q(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t), t > 0 \quad (31)$$

которое соответствует второму закону Кирхгофа.

Задача Коши состоит в определении при t>0 функции q(t) из уравнения (31), удовлетворяющей начальным условиям

$$q(t)\Big|_{t=0} = q_0, \frac{dq(t)}{dt}\Big|_{t=0} = i_0 \quad (32)$$

где q_0 и i_0– соответственно заряд и сила тока при t=0. Если ввести функции

$$\bar{q}(t) = \theta(t)q(t), \bar{E}(t) = \theta(t)E(t)$$

и соответствующие обобщенные функции, полученные нулевым продолжением функций q(t) и E(t) при t<0 , то можно записать следующее

$$\frac{d}{dt}\bar{q}(t) = \frac{\tilde{d}}{dt}\bar{q}(t) + q_0\delta(t),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\bar{q}(t) = \frac{\widetilde{d^2}}{dt^2}\bar{q}(t) + i_0\delta(t) + q_0\delta^{`}(t)$$

где учтены начальные условия (32). В этом случае дифференциальное уравнение (31) записывается в обобщенных функциях и с учетом начальных условиях (32) принимает вид

$$L\frac{d^2}{dt^2}\bar{q}(t) + R\frac{d}{dt}\bar{q}(t) + \frac{1}{C}\bar{q}(t) = \bar{E}(t) + (Li_0 + Rq_0)\delta(t) + Lq_0\delta^{`}(t) \qquad (33)$$

С помощью дифференциального оператора D_q, можно записать уравнение (33) в виде уравнения в свертках $K_+^{`}$:

$$D_q\delta(t) * \bar{q}(t) = F(t) \qquad (34)$$

где введена обобщенная функция

$$F(t) = \bar{E}(t) + (Li_0 + Rq_0)\delta(t) + Lq_0\delta^{`}(t) \qquad (35)$$

Фундаментальное решение $\xi\,(t)$ этого уравнения удовлетворяют начальным условиям. В таком случае решение уравнения (34) с учетом (35) может быть записано в виде

$$\bar{q}(t) = \xi(t) * F(t)$$

где свертка функций осуществляется по переменной t.

Следующим примером будем применение теории обобщенных функций к линейным динамическим системам. Для такого примера возьмем дифференцирующую цепочку.

В случае дифференцирующей цепочки входная величина $E_1(t)$ (э.д.с.) и величина на выходе должны удовлетворять равенству

$$E_2(t) = \tau\frac{d}{dt}E_1(t) \qquad (36)$$

где τ – некоторая постоянная.

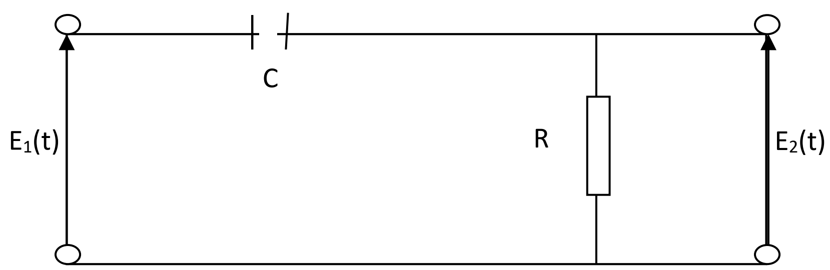

Рисунок 6. Цепь RC

Цепь, изображенная на рисунке 6, может быть использована для получения дифференцирующей цепочки. Используя обозначение

$$\tau = RC$$

можно записать переходную функцию в виде

$$\widetilde{K}_E(p) = \frac{\tau p}{1+\tau p}. \tag{37}$$

Рассмотрим входную э.д.с. вида $E_1(t) = E_0[\theta(t) - \theta(t - t_0)]$, постоянную на интервале t_0. Ее изображение по Лапласу будет следующим:

$$\widetilde{E_1}(p) = \frac{E_0}{p}(1 - e^{-pt_0})$$

С учетом соотношения (37) изображение по Лапласу э.д.с. на выходе будет иметь вид

$$\widetilde{E_2}(p) = \frac{\tau E_0}{1 + \tau p}(1 - e^{-pt_0})$$

или после обратного преобразования Лапласа

$$E_2(t) = E_0\left(1 - e^{\frac{1}{\tau}t_0}\right)e^{-\frac{1}{\tau}t}.$$

Таким образом, из всех формул можно сделать вывод о том, что напряжение $E_2(t)$ является быстро затухающим.

Замечая, что обобщенная функция веса $K_E(t)$ равняется э.д.с. на выходе, соответствующей импульсному входному напряжению, и учитывая условие (36), которому должна удовлетворять дифференцирующая цепочка, получаем

$$K_E(t) = \tau\frac{d}{dt}\delta(t) = \tau\delta`(t).$$

Для переходной обобщенной функции можно написать

$$\widetilde{K_E}(p) = \tau p.$$

Сравнение этого результата с формулой (37), соответствующей реальной дифференцирующей цепочке, используемой на практике, показывает, что реальная дифференциальная цепочка тем ближе к идеальной, чем меньше τ, причем $\tau \ll 1$.

Следовательно, постоянные коэффициенты R и C связанные соотношением $\tau = RC$, должны удовлетворять условию $\tau \ll 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новые задачи физики и математики, появившиеся в XX столетии, привели к появлению нового понятия функции – обобщенной функции или распределения. Обычное понятие функции, которое ставит в соответствие каждому значению (из некоторой области определения этой функции) соответствующее ему значение, оказалось абсолютно недостаточным.

Потребность в подобном обобщении возникает во многих физических и математических задачах. Обобщенные функции дают возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, точечного заряда, точечного диполя, (пространственную) плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного источника и т.д.

Теория обобщенных функций – оформившаяся в последние годы область функционального анализа; она возникла в связи с потребностями математической физики и позволила правильно поставить и разрешить ряд классических проблем прикладного значения.

В понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в малых окрестностях данной точки. Поэтому, техника обобщенных функций служит удобным и адекватным средством для описания многих распределений различных физических величин.

Строгая математическая теория обобщенных функций была построена С.Л. Соболевым, Л. Шварцем и другими математиками. С.Л. Соболев впервые разработал теорию обобщенных функций в связи с исследованием гиперболических уравнений. Л. Шварц, развивая теорию обобщенных функций (которые он называл распределениями), построил теорию их преобразования Фурье. Большое внимание он уделил их приложениям к математическому анализу и дифференциальным уравнениям. В настоящее время эта теория нашла приложения почти во всех областях математики и ее приложений, физике и других областях естествознания.

Считаю поставленную цель и задачи доказанными.

Список использованной литературы

1. Антосик, А. Теория обобщенных функций/ А. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. Секвенциальный подход. – М.: Мир, 1976. – 150 с.
2. Афонский, А.А. Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики/ А.А. Афонский, В.П. Дьяконов. – М: СОЛОН-Пресс, 2009. – 248 с.
3. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики/ А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
4. Вишик, М.И. Уравнения в свертках в ограниченной области/ М.И. Вишик. – М.: УМН, 1965. – 250 с.
5. Владимиров, В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных/ В.С Владимиров. – М.: Наука, 1964. – 200 с.
6. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике/ В.С Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 250 с.
7. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики/ В.С Владимиров, В.В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2004. – 250 с.
8. Гельфанд, И.М. Некоторые применения гармонического анализа. Обобщенные функции/ И.М. Гельфанд, Н.Я. Виленкин. – М.: Физматлит, 1961. – 180 с.
9. Гельфанд, И.М. Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1959. – 185 с.
10. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними/ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М.: Добросвет: КДУ, 2007. – 408 с.
11. Гюнтер, Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики/ Н.М. Гюнтер. – М.: Альфа, 1953. – 150 с.
12. Дирак, П. А. Основы квантовой механики/ П.А. Дирак, пер. с англ. – М.: Проспект, 2001. – 210 с.

13. Дрожжинов, Ю.Н. Асимптотически однородные обобщенные функции и граничные свойства функций голоморфных в трубчатых конусах/ Ю.Н. Дрожжинов, Б.И. Завьялов. – М.: Просвещение, 2006. – 400 с.

14. Келли, Дж.Л., Общая топология/ Дж.Л. Келли. – М.: Наука, 1968. – 163 с.

15. Кеч, В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике/ В. Кеч, П. Теодореску. – М.: Мир, 1978. – 518 с.

16. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей/ Ф.Клейн. – М.: Наука, 1987. – 196 с.

17. Колмогоров, А.Н.Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 2006. – 210 с.

18. Кондратьев, В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками/ В.А. Кондратьев. – М.: МГУ, 1967. – 202 с.

19. Лапинова, С.А.Современные методы прикладной математики (обобщенные функции и асимптотические методы)/ С.А. Лапинова, А.И. Саичев, В.А. Филимонов. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. – 260 с.

20. Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций/ Я. Микусинский, Р. – М.: Наука, 1963. – 210 с.

21. Рид, М.Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ/ М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 2007. – 185 с.

22. Робертсон, А. Топологические векторные пространства/ А. Робертсон, В. Робертсон. – М.: Мир, 1999. – 155 с.

23. Рудин, У. Функциональный анализ/ У. Рудин. – М.: Мир, 2005. – 200 с.

24. Сенета, Е. Правильно меняющиеся функции/ Е. Сенета. – М.: Наука, 1985. – 165 с.

25. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 2005. – 200 с.

26. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике/ С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 333 с

27. Соболев С.Л. Николай Максимович Гюнтер. Библиографический очерк/ С.Л. Соболев, В.И. Смирнов. – М.: ГИТТЛ, 2003. – 195 с.

28. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1951. – 659 с.

29. Фалалеев, М.В. Обобщенные функции и действия над ними/ М.В. Фалалеев. – Иркутск: Изд-во Иркутского госуд. ун-та, 2011. – 163 с.

30. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа/ Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1955. – 440 с.

31. Шварц, Л. Математические методы для физических наук/ Л. Шварц. – М.: Мир, 2005. – 230 с.

32. Шилов, Г. Е. Математический анализ/ Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 2000. – 260 с.

33. Шилов, Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс/ Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 2005. – 255 с.

34. Широков, Ю.М. Алгебра одномерных обобщенных функций. Теоретическая и математическая физика/ Ю.М. Широков. – М.: Альфа. 2000. – 301 с.