УДК 517.956.4
Ковалева Л.А.
KovalevaL.A.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород
Belgorod State University, Belgorod
E-mail: Kovaleva_l@bsu.edu.ru

Об одной краевой задаче

About one boundary value problem

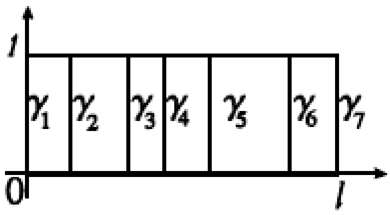
Аннотация. *В настоящей работе мы рассмотрим краевую нелокальную задачу для уравнения Лапласа. Эта задача основывается на уже изученной задаче Бицадзе–Самарского. В плоском случае, исследуемом в работе, поставленную задачу удается преобразовать к локальной краевой задаче, и получить задачу Дирихле, для уравнения, аналогичного уравнению Лапласа на стратифицированном множестве. Оказывается, применяя метод Пуанкаре-Перрона удается доказать, что решением является верхняя огибающая семейства субгармонических функции, принимающих на границе заданные значения.*

In this paper, we consider a boundary nonlocal problem for the Laplace equation. This task is based on the Bitsadze – Samarsky problem already studied. In the flat case studied in the work, the problem posed can be transformed to a local boundary-value problem and the Dirichlet problem can be obtained for an equation similar to the Laplace equation on a stratified set. It turns out, using the Poincare-Perron method, it is possible to prove that the solution is the upper envelope of a family of subharmonic functions that take specified values on the boundary.

Ключевые слова: *уравнение Лаплапа, метод Пуанкаре – Перрона, стратифицированное множество.*

Keywords: *Laplace equation, Poincare – Perron method, stratified set.*

В настоящее время насчитывается огромное количество работ, посвященных краевым задачам с нелокальными краевыми условиями. По праву одной из первоначальных можно назвать работу Бицадзе и Самарского. Обычно, такие задачи различными приемами сводятся к локальным краевым задачам. Данная работа не является исключением, и в ней рассматривается нелокальная краевая задача, являющейся аналогом задачи Бицадзе–Самарского. Поставленная задача сводится с помощью факторизации к локальной задаче Дирихле на стратифицированном множестве. Разрешимость задачи доказывается методом Пуанкаре–Перрона.



На плоскости R^2 рассмотрим прямоугольник P (см. рис.1), в котором выделим n вертикальных интервалов $\gamma_i = \{(\xi_i, y), y \in (0,1)\}$, $(i = 1,...N)$ причем $\xi_l = 0,\ \xi_n = 1$. Эти интервалы поделим на группы $\Gamma_1,...\Gamma_m$ в каждую из которых поместим некоторое число интервалов γ_i (не обязательно идущих подряд). Задача состоит в нахождении непрерывной в замыкании P функции, которая гармонична в каждой полосе прямоугольника P, заключенного между γ_i и γ_{i+1}, то есть

$$\Delta u = 0 \qquad (1)$$

и удовлетворяющей следующим условиям:

$$u(\xi_i, y) = u(\xi_j, y) \ \ y \in [0,1], \qquad (2)$$

если γ_i и γ_j входят в одну группу Γ_k . Если Γ_k состоит из интервалов $\gamma_{i1},...\gamma_{i\nu}$, то

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi_{i1}, y) + ... + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi_{i\nu}, y) = 0,\ \ y \in [0,1] \qquad (3)$$

где $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi_i, y)$ означает скачок производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, y),\ \xi_i \ne 0, l.$$

Если же $\xi_i = 0$ или $\xi_i = l$, то речь идет об односторонних производных $\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, y)$ и, соответственно $-\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, y)$.

Кроме того, задаются условия Дирихле:

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \ldots u(x,1) = \varphi_1(x) \ldots . \; x \in [0, l]. \qquad (4)$$

Заметим, что в отличие от задачи Бицадзе – Самарского [1], в рассматриваемой задаче функция u не предполагается гармонической во всей полосе Р. В связи с этим, не возможно применить ход доказательства разрешимости задачи (1)-(4), предложенную в работе [1]. В данной работе получена разрешимость задачи на основе метода верхних огибающих субгармонических функций [2,3].

Литература

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач //Докл. АН СССР. 1969. Т.185. С.739–740.
2. А.П. Солдатов, О.В. Чернова К теории эллиптических систем первого порядка, Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2009, Т.11.
3. Гилбарг Д, Трудингер М.Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.