

Гравитационное оседание при малых числах Рейнольдса аэрозольных и гидрозольных гантелевидных частиц

Gravitational settling by low Reynolds number of aerosol and hydrosol dumb – bells particles

Проведено математическое моделирование при малых числах Рейнольдса квазистационарного процесса гравитационного оседания в вязкой среде твердой частицы гантелевидной формы. Полученные формулы позволяют оценивать как поступательное, так и вращательное движение частицы. Показано, что при гравитационном оседании частица стремится перейти в состояние устойчивого равновесия, после чего движется не вращаясь с постоянной скоростью.

Mathematical model was developed describing low Reynolds number quasi-stationary process of the gravitational deposition in viscous medium of solid particles with dumb-bells form. The found formulas allow to estimate both the forward motion and the rotatory motion of the dumb-bells particle. It has shown that by the gravitational deposition the particles pass on the state of stable equilibrium. Further the particles move without rotation.

Ключевые слова: гравитационное движение, седиментация, вязкие среды, аэрозольные и гидрозольные частицы.

Key words: gravitational motion, sedimentation, viscous medium, aerosol and hydrosol particles.

Гравитационное осаждение аэрозольных и гидрозольных частиц широко применяется в технике, например, в отстойниках, классификаторах, сепараторах и других приспособлениях [1-4].

Наиболее просто в вязких средах оценивается гравитационное оседание сферических частиц [1-5]. На гравитационное оседание несфериче-

ских частиц может сильное влияние оказывать форма их поверхности [1-5]. Это обстоятельство нужно учитывать при создании седиментационных устройств, предназначенных для осаждения, в частности, для улавливания частиц. В связи с этим математическое моделирование процесса гравитационного оседания частиц с формой, отличной от сферической, представляет как теоретический, так и практический интерес.

Выведенные в настоящей работе формулы позволяют оценивать происходящее при малых числах Рейнольдса медленное гравитационное оседание в вязкой среде твердой частицы гантелевидной формы [2] (рис.1). Эта частица получена соединением двух сферических частиц при помощи тонкого жесткого стержня, проходящего через их центры. Сферы могут иметь различные радиусы R_1 и R_2 и плотности $\rho_p^{(1)}$ и $\rho_p^{(2)}$. Расстояние между центрами сфер O_1 и O_2 равно h . Предполагается, что массой и гидродинамическим сопротивлением соединительного

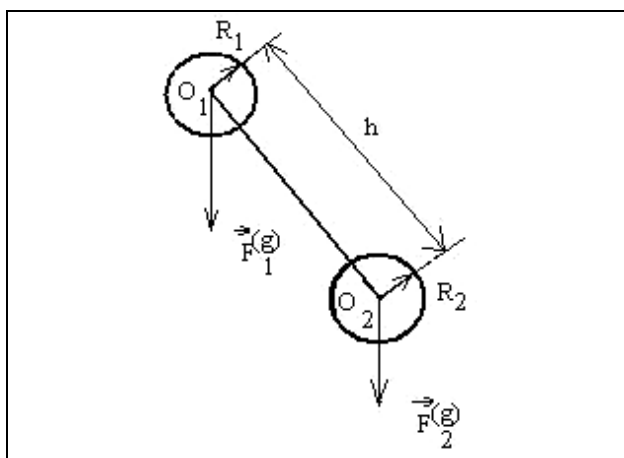


Рис. 1. Две сферы, соединённые друг с другом жестким стержнем и образующие гантелевидную частицу

стержня можно пренебречь по сравнению с соответствующими величинами для сфер. Сферы гантелевидной частицы (ГЧ) расположены достаточно далеко друг от друга, когда одновременно $R_i/h \ll 1$. При этом гидродинамическим взаимодействием сфер, с точностью до малых, пропорциональных R_i/h членов можно пренебречь [2]. На каждую из сфер действует сила гравитационной природы $\vec{F}_i^{(g)}$ (рис. 1):

$$\vec{F}_i^{(g)} = (\rho_p^{(i)} - \rho_m) V_i \vec{g}, \quad (1)$$

где $V_i = \frac{4}{3} \pi R_i^3$ - объемы сфер, $\rho_p^{(i)}$ и ρ_m - плотности сфер и вязкой среды; $i = 1, 2$; \vec{g} - вектор ускорения свободного падения, направленный

вертикально вниз. Силы $\vec{F}_i^{(g)}$ вызывают движение сфер ГЧ относительно вязкой среды. Движение происходит при числах Рейнольдса [2] и временах релаксации [5] сфер достаточно малых, чтобы описание процесса гравитационного оседания ГЧ можно было проводить в квазистационарном приближении [2]. При этом результирующие внешних сил, действующих на частицу, можно считать равными нулю [2]. Внешними силами, действующими на частицу при оседании

в гравитационном поле будут: силы $\vec{F}_i^{(g)}$ и силы вязкого сопротивления среды $\vec{F}_\mu^{(i)}$ движению сфер. Так как сферы гидродинамически не взаимодействуют, то действующая на каждую из них сила вязкого сопротивления $\vec{F}_\mu^{(i)}$ равна

$$\vec{F}_\mu^{(i)} = -6\pi\mu f_\mu^{(i)} \vec{U}_i, \quad (2)$$

где μ - динамическая вязкость среды; $f_\mu^{(i)}$ - скалярный коэффициент, зависящий от числа Кнудсена сфер [6]; \vec{U}_i - скорость движения сферы относительно несущей среды. В случае уме-

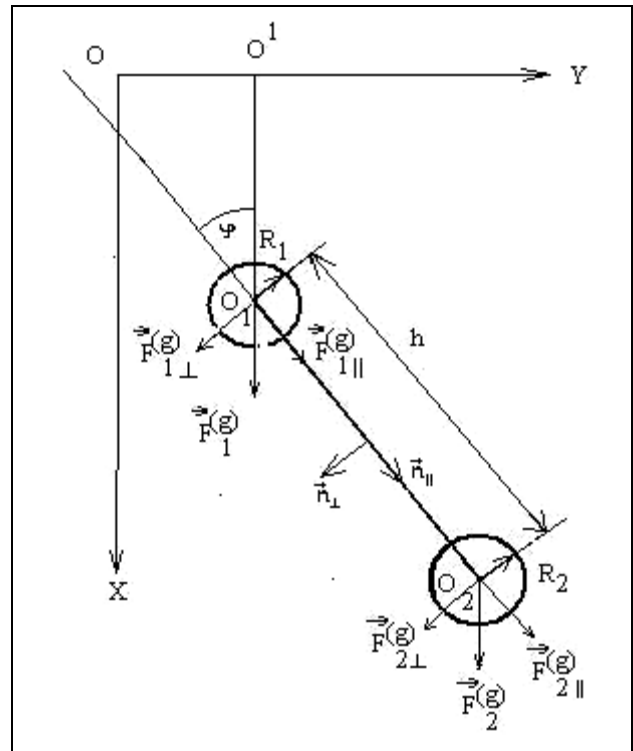


Рис. 2. Расположение гантелевидной частицы

ренно крупных сфер коэффициенты $f_\mu^{(i)}$ имеют следующий вид [6,7]:

$$f_\mu^{(i)} = (1 + 2c_m^{(i)} Kn^{(i)}) / (1 + 3c_m^{(i)} Kn^{(i)}). \quad (3)$$

В (3) $c_m^{(i)}$ - коэффициенты изотермического скольжения сфер; $Kn^{(i)} = \lambda/R_i$ - числа Кнудсена сферических частиц.

Движение ГЧ рассматривается в неподвижной декартовой системе координат $xOyz$, с осью $Ox \parallel \vec{g}$, направленной вниз, и плоскостью xOy , проходящей через центры сфер гантелевидной частицы. В плоскости xOy и происходит гравитационное оседание гантелевидной частицы, которая образует угол φ с прямой $O'O_1$, параллельной оси Ox и проходящей через точку O_1 (см. рис. 2).

Каждая из сил $\vec{F}_i^{(g)}$ может быть представлена в виде векторной суммы двух сил $\vec{F}_{i\parallel}^{(g)}$ и $\vec{F}_{i\perp}^{(g)}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i^{(g)} &= \vec{F}_{i\parallel} + \vec{F}_{i\perp}; \\ \vec{F}_{i\parallel} &= (n_{\parallel} F_i^{(g)}) n_{\parallel}; \\ \vec{F}_{i\perp} &= (n_{\perp} F_i^{(g)}) n_{\perp}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $(n_{\parallel} F_i^{(g)}) = (\rho_p^{(i)} - \rho_m) V_i g \cos \varphi$, $(n_{\perp} F_i^{(g)}) = (\rho_p^{(i)} - \rho_m) V_i g \sin \varphi$; n_{\parallel} - единичный вектор вдоль линии центров сфер, направленный от первой сферы ко второй; n_{\perp} - единичный вектор, направленный перпендикулярно к линии центров сфер и образующий острый угол с вектором g . Силы $\vec{F}_{1\parallel}$ и $\vec{F}_{2\parallel}$ вызывают движение ГЧ в направлении, параллельном направлению вектора n_{\parallel} . Сферы ГЧ соединены жестким стержнем, поэтому сферы двигаются с одинаковыми продольными скоростями. Эта скорость \vec{U}_{\parallel} находится из условия равенства нулю полной силы, действующей в направлении n_{\parallel} :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (\vec{F}_{i\parallel}^{(g)} + \vec{F}_{\mu\parallel}^{(i)}) &= 0, \\ \vec{F}_{\mu\parallel}^{(i)} &= -6\pi R_i \mu f_{\mu}^{(i)} \vec{U}_{\parallel}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\vec{F}_{\mu\parallel}^{(i)}$ - сила вязкого сопротивления среды продольному движению i -й сферы. С учетом формул (4) из выражения (5) получаем

$$\begin{aligned} \vec{U}_{\parallel} &= U_{\parallel} n_{\parallel}, \\ U_{\parallel} &= U_{\parallel}^* \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} U_{\parallel}^* &= \sum_{i=1}^2 U_{\perp}^{(i)*} R_i f_{\mu}^{(i)} / \sum_{i=1}^2 R_i f_{\mu}^{(i)}, \\ U_{\perp}^{(i)*} &= (\rho_p^{(i)} - \rho_m) V_i g / 6\pi \mu R_i f_{\mu}^{(i)} = \\ &= 2(\rho_p^{(i)} - \rho_m) R_i^2 g / 9 \mu R_i f_{\mu}^{(i)}. \end{aligned}$$

Силы $\vec{F}_{i\perp}$ перпендикулярны к соединяющему сферы стержню и независимо вызывают поперечное движение сфер ГЧ вдоль прямых, параллельных вектору n_{\perp} . Скорости $\vec{U}_{\perp}^{(1)}$ и $\vec{U}_{\perp}^{(2)}$ движения центров сфер O_1 и O_2 находятся из условия равенства нулю полной силы, действующей в направлении n_{\perp} на каждую из сфер

$$\vec{F}_{i\perp}^{(g)} + \vec{F}_{\mu\perp}^{(i)} = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$\begin{aligned} \vec{U}_{\perp}^{(i)} &= U_{\perp}^{(i)} n_{\perp}, \\ U_{\perp}^{(i)} &= U_{\perp}^{(i)*} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Движение ГЧ, вызванное силами $\vec{F}_{i\perp}^{(g)}$, можно представить как поступательное движение со скоростью $\vec{U}_{\perp}^{(1)}$ и одновременное вращение с угловой скоростью $\omega = (U_{\perp}^{(1)} - U_{\perp}^{(2)})/h$ вокруг оси, проходящей через точку O_1 . При $U_{\perp}^{(1)} > U_{\perp}^{(2)}$, когда $\omega > 0$, вращение гантелевидной частицы происходит против часовой стрелки, а при $U_{\perp}^{(1)} < U_{\perp}^{(2)}$, когда $\omega < 0$ - по часовой стрелке. С учетом (8) выражение для ω принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \sin \varphi, \\ \omega_0 &= (U_{\perp}^{(1)*} - U_{\perp}^{(2)*})/h. \end{aligned} \quad (9)$$

При известной величине ω_0 , зависимость угла φ от времени t можно найти, решив уравнение (10):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (10)$$

Интегрируя (10), получаем следующую зависимость φ от t :

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} = \omega_0 t, \quad (11)$$

где φ_0 - значение угла φ в начальный момент времени $t=0$.

Отсюда следует, что $0 < \varphi < \pi$. Потенцируя (11), получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \exp \omega_0 t. \quad (12)$$

Из (12) видно, что при $\omega_0 > 0$, когда величина скорости поперечного движения первой сферы $U_{\perp}^{(1)}$ больше величины скорости второй сферы $U_{\perp}^{(2)}$, угол φ со временем монотонно возрастает, стремясь при $t \rightarrow \infty$ к предельному значению $\varphi_{\Pi} = \pi$. Это означает, что при $\omega_0 > 0$ гантелевидная частица при гравитационном оседании со временем переходит в состояние устойчивого равновесия, при котором ниже расположена первая сфера с $U_{\perp}^{(1)} > U_{\perp}^{(2)}$.

В случае $\omega_0 < 0$ (величина скорости поперечного движения $U_{\perp}^{(2)}$ второй сферы больше) угол φ со временем монотонно уменьшается, стремясь при $t \rightarrow \infty$ к значению $\varphi_{\Pi} = 0$. Таким образом, при $\omega_0 < 0$ ГЧ со временем переходит в состояние устойчивого равновесия, в котором ниже расположена вторая сфера с $U_{\perp}^{(2)} > U_{\perp}^{(1)}$. Следует отметить, что после перехода в состояние устойчивого равновесия, далее частица движется не вращаясь.

Из (11) следует, что:

$$t = \frac{1}{\omega_0} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} / \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right). \quad (13)$$

1. Зависимость времен t перехода в устойчивое состояние ГЧ от радиуса R_2 второй сферы

при $h = 15$ мкм, $\rho_p^{(i)} = 2,5$ г/см³, $R_1 = 3$ мкм и начальными углами $\varphi_0 = 1^\circ$ и $\varphi_0 = 45^\circ$

	R_2 , мкм	1	1,5	2	2,5	2,75
$\varphi_0 = 1^\circ$	t, с	0,078	0,092	0,125	0,226	0,428
$\varphi_0 = 45^\circ$	t, с	0,054	0,064	0,087	0,158	0,298

Формула (13) позволяет оценивать время перехода ГЧ из состояния с начальным углом φ_0 в состояние с заданным углом φ . В формулу (13) входит коэффициент ω_0 , который является функцией радиусов сфер ГЧ. Из (9) следует, что при $U_{\perp}^{(1)} > U_{\perp}^{(2)}$ увеличение R_1 и уменьшение R_2 приводит к монотонному возрастанию ω_0 . При $R_2 \rightarrow R_1$ коэффициент $\omega_0 \rightarrow 0$. Поэтому время перехода в новое состояние может сильно зависеть от радиусов R_1 и R_2 . В частности, формула (13) позволяет находить время перехода ГЧ в состояние устойчивого равновесия. Для этого в соотношении (13) при $\omega_0 > 0$ достаточно подставить угол $179,96^\circ \leq \varphi < 180^\circ$, а при $\omega_0 < 0$ - угол $0 < \varphi \leq 0,04^\circ$. В таблице 1 приведены зависимости от радиуса R_2 второй сферы времен перехода в устойчивое состояние ГЧ, находящейся в воздухе с $T = 293$ К и давлением $P = 101325$ Па. Расчеты проведены в случае частиц с $h = 15$ мкм, $\rho_p^{(i)} = 2,5$ г/см³, $R_1 = 3$ мкм и начальными углами $\varphi_0 = 1^\circ$ и $\varphi_0 = 45^\circ$, и конечным углом $\varphi_k = 179,96^\circ$. Такие частицы оседают при малых числах Рейнольдса сфер $Re_i < 5 \cdot 10^{-4}$ и малых временах релаксации [2] $\tau_i < 3 \cdot 10^{-4}$ с, когда описание гравитационного движения ГЧ можно проводить в квазистационарном приближении.

Табл. 1 показывает, что с увеличением R_2 время перехода ГЧ в устойчивое состояние заметно возрастает.

Из (9) видно, что ГЧ с равными скоростями поперечного движения сфер $\vec{U}_{\perp}^{(1)} = \vec{U}_{\perp}^{(2)}$, когда $\vec{U}_{\perp}^{(1)*} = \vec{U}_{\perp}^{(2)*}$, двигаются не вращаясь ($\omega = 0$). При этом скорость падения равна

$$\vec{V}^{(1)} = \vec{U}_{\parallel} + \vec{U}_{\perp}^{(1)}. \quad (14)$$

$$\vec{U}_p = U_p \vec{g} / g,$$

$$U_p = \vec{U}_{\perp}^{(1)*}.$$

Центр сферы O_1 ГЧ движется в плоскости xOy со скоростью

$$\vec{V}^{(1)} = \vec{U}_{\parallel} + \vec{U}_{\perp}^{(1)}.$$

Выразив скорость $\vec{V}^{(1)}$ через орты \vec{n}_x и \vec{n}_y осей x и y, получаем

$$\vec{V}^{(1)} = V_x^{(1)} \vec{n}_x + V_y^{(1)} \vec{n}_y,$$

где $V_x^{(1)}$ и $V_y^{(1)}$ - проекции скорости $\vec{V}^{(1)}$, равные:

$$V_x^{(1)} = V_x^{(1)*} \sin^2 \varphi + U_{\parallel}^*, \quad (15)$$

$$V_y^{(1)} = -V_x^{(1)*} \cos \varphi \sin \varphi,$$

$$V_x^{(1)*} = (U_{\perp}^{(1)*} - U_{\perp}^{(2)*}) a_2,$$

$$a_2 = \frac{R_2 f_{\mu}^{(2)}}{(R_1 f_{\mu}^{(1)} + R_2 f_{\mu}^{(2)})}. \quad (16)$$

Координаты $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ траектории точки O_1 можно найти, проинтегрировав следующие

уравнения движения:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = V_x^{(1)}, \quad (17)$$

$$\frac{dy^{(1)}}{dt} = V_y^{(1)}.$$

После интегрирования уравнений (17) были получены следующие выражения для координат $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$:

$$x^{(1)} = x_0^{(1)} + U_{\parallel}^* t + \Delta x^{(1)*}, \quad (18)$$

$$y^{(1)} = y_0^{(1)} + \Delta y^{(1)*}, \quad (19)$$

где $x_0^{(1)}$ и $y_0^{(1)}$ - значения координат $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ при $t \rightarrow 0$;

$$\Delta x^{(1)*} = -a_2 h (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \quad (20)$$

$$\Delta y^{(1)*} = -a_2 h (\sin \varphi - \sin \varphi_0).$$

Время t связано с углом φ зависимостью (13). Выражение для $x^{(1)}$ с учетом (13) переходит в (21):

$$x^{(1)} = x_0^{(1)} + h [U_{\parallel}^* / (U_{\perp}^{(1)*} - U_{\perp}^{(2)*}) \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} / \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right) + \Delta x^{(1)*}. \quad (21)$$

Входящие в $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ приращения $\Delta x^{(1)*}$ и $\Delta y^{(1)*}$ связаны с вращением ГЧ. При достижении частицей состояния устойчивого равновесия, когда угол $\varphi = \pi$ (первая сфера ГЧ находится ниже второй) или $\varphi = 0$ (первая сфера расположена

2. Зависимость координаты U_{eg} продольной скорости ГЧ от радиуса второй сферы при $R_1 = 3$ мкм

R_2 , мкм	0,5	1	1,5	2	2,5	2,75	3
U_{eg} , см/с	0,2376	0,2147	0,2068	0,2146	0,2373	0,2547	0,2760

3. Зависимости от времени t угла φ , приращений $\Delta x^{(1)}$, $\Delta x^{(1)*}$, $\Delta y^{(1)}$ ГЧ с $h=15$ мкм со сферами радиусами $R_1=3$ мкм, $R_2=2$ мкм и плотностью $\rho_p^{(1)}=\rho_p^{(2)}=2,5$ г/см³ при нормальном атмосферном давлении

$t \cdot 10^{-3}, c$	0	11	20	24	37	49	72	102	200
φ	10^0	30^0	70^0	90^0	150^0	170^0	179^0	$179,96^0$	$179,999^0$
$\Delta x^{(1)} \cdot 10^{-4}, cм$	0	24	48	57	91	114	167	231	442
$\Delta y^{(1)} \cdot 10^4, cм$	0	-1,96	-4,58	-4,96	-1,96	0,00	0,936	1,04	1,04
$\Delta x^{(1)*} \cdot 10^4, cм$	0	0,71	3,86	5,91	11,05	11,82	11,91	11,91	11,91

выше) приращения становятся равными

$$\Delta x^{(1)*} = \Delta x_p^{(1)*} = \begin{cases} -ah_2(1 - \cos \varphi_0), \omega_0 < 0, \varphi_\kappa = 0, \\ a_2h(1 + \cos \varphi_0), \omega_0 > 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$\Delta y^{(1)*} = \Delta y_p^{(1)*} = a_2h \sin \varphi_0$$

и после этого не меняются. Модуль приращения $|\Delta x^{(1)*}|$ сравним по величине с h . Поэтому, оценивая значения координаты $x^{(1)}$ в устройствах с вертикальными размерами $H \gg h$, значения $\Delta x^{(1)}$ в (18) можно не учитывать. Когда $\Delta x^{(1)*} = \Delta x_p^{(1)*}$ и $\Delta y^{(1)*} = \Delta y_p^{(1)*}$, выражения (18) и (19) переходят в (23), (24)

$$\Delta x^{(1)} = x_0^{(1)} + U_{\parallel}^* t + \Delta x_p^{(1)*}, \quad (23)$$

$$y^{(1)} = y_0^{(1)} + \Delta y_p^{(1)*}. \quad (24)$$

Из (23) видно, что перейдя в состояние устойчивого равновесия, ГЧ оседает, не вращаясь с постоянной скоростью

$$\vec{U}_{eq} = U_{eq} \vec{n}_g,$$

$$U_{eq} = U_{\parallel}, \vec{n}_g = \vec{g} / g.$$

Зависимость координаты U_{eq} от R_2 в случае рассмотренных выше ГЧ (см. табл.1), падающих в воздухе, приведена в табл. 2.

Из (24) вытекает, что при переходе к состоянию устойчивого равновесия центр первой сферы смещается в направлении Оу на положительное расстояние $\Delta y^{(1)} = y^{(1)} - y_0^{(1)} = \Delta y_p^{(1)*} \leq a_2h$.

Формулы (11) – (13) и (18) – (20) позволяют в квазистационарном приближении оценивать оседание в гравитационном поле вытянутой ГЧ с учетом её вращения. В табл. 3 даны полученные с помощью этих формул при $\varphi_0 = 10^0$ зависимости от времени t угла φ , приращений $\Delta x^{(1)} = x^{(1)} - x_0^{(1)}$, $\Delta x^{(1)*}$, $\Delta y^{(1)} = y^{(1)} - y_0^{(1)}$ ГЧ с $h=15$ мкм со сферами радиусами $R_1=3$ мкм и $R_2=2$ мкм, $\rho_p^{(i)}=2,5$ г/см³, оседающей в воздухе с $T=293$ К и давлением $P=101325$ Па.

Из табл.3 видно, что рассматриваемая ГЧ за время $t=0,1$ с переходит в состояние устойчивого равновесия, после чего двигается не вращаясь. При этом центр первой сферы смещается на расстояние $\Delta y^{(1)}=1,04$ мкм и $\Delta x^{(1)}=230$ мкм, соответственно, в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Библиографический список

1. Спурный К., Йех Ч., СедлачекБ., Штор О. Аэрозоли. - М.: Атомиздат, 1964. - 360 с.
2. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. - М.: Мир, 1976. 630 с.
3. Пирумов А.И. Обеспыливание воздуха. - М.: Стройиздат, 1981. - 296 с.
4. Ужов В.И., Вальдберг А.Ю., Мягков Б.И., Решидов Н.К. Очистка промышленных газов от пыли. - М.: Химия, 1983. - 297 с.

5. Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию. - М.: Энергетика и энергия, 1987.

6. Подоскин А.Б., Юшканов А.А. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц. // ЖТФ. 1982 Т. 52. В.11. С. 2253-2261.

7. Щукин Е.Р., Шулиманова З.Л. О термофорезе твердой умеренно крупной сферической частицы с коэффициентом теплопроводности, зависящим от радиальной координаты // Письма в ЖТФ. 1996 Т. 22, Вып. 15.

Уварова Людмила Александровна – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующая кафедрой «Прикладная математика» МГТУ «СТАНКИН»

Тел.: 8 (499) 973-95-20, e-mail: uvar11@yandex.ru

Малай Николай Владимирович – д-р физ.-мат. наук, декан физического факультета Белгородского университета

Щукин Е.Р. – д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института Высоких Температур РАН

Шулиманова З.Л. – д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Физика и химия» Российской открытой академии транспорта МГУПС, Москва

Uvarova L A – Doctor of Physical and Math. Sci., professor, head of sub-department “Applied mathematics” of MSTU “STANKIN”

Tel. +7(499)973-95-20

Malay N V - Doctor of Physical and Math. Sci., dean of the physical facility of Belgorod State University

Shchukin E R – Doctor of Physical and Math. Sci., leading research worker of Institute for High Temperature Russian Academy of Science

Shulimanova Z L – Doctor of Physical and Math. Sci., head of sub-department of “Physics and chemistry” of Russian open academy of transport of Moscow State University of Railway Communication

