МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
СИМФЕРОПОЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

Основан в 1982 г.

Выпуск 12

КИЇВ
«ЛИБІДЬ»
1993

Ю.Д.МЕНДЫГУЛОВ, инж.,
В.М.МОСКОВКИН, канд. геогр. наук, г. Ялта

ФЛУКТУАЦИИ В ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматривается одномерная динамическая система со случайными флуктуациями, встречающаяся в приложениях, проанализировано решение и исследование устойчивости стационарной точки.

В приложениях часто встречаются динамические системы,фазовое пространство которых одномерно. Таковыми, например,являются береговые системы в геоморфологии, автономные популяции в биологии, автокаталитические реакции в химии и др. [1,2]. Такие системы в общем виде описываются уравнениями вида

$$\frac{dw}{dt} = F(w),$$

$$\text{где } w \in [a,b];\ a,b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Часто в таких системах большую роль играют различного рода флуктуации, которые могут быть связаны как с флуктуациями макроскопических параметров, так и со стохастическим характером самих происходящих в системах процессов. С целью учета случайных флуктуаций, следуя работе [2], заменим детерминированное уравнение (1) на стохастическое дифференциальное уравнение (стохастическое уравнение Ито)

$$dw = F(w)dt + g d\sigma(t), \tag{2}$$

где второй член описывает вклад в приращение w флуктуаций, g— амплитуда флуктуаций (предполагается постоянной).

На $d\sigma(t)$ наложены условия (2)

$$\begin{cases} < d\sigma(t) >= 0, \\ < (d\sigma(t))^2 >= dt, \end{cases} \tag{3}$$

где $< \dots > = \int\limits_0^{\infty} (\dots)\, \rho(w,t \mid w_0,t_0) dw$ — статистическое усреднение; $\rho(w,t \mid w_0,t_0)$— вероятность того, что координата системы в фазовом пространстве в момент времени t будет иметь значение w, если в момент времени t_0 она имела значение w_0.

Усредняя уравнение (2), получим уравнение Ито для среднего значения [2]

$$\frac{dw}{dt} = < F(w) >. \tag{4}$$

Из уравнения (2) и статистической независимости $d\sigma(t)$ и w следует уравнение для функции распределения вероятности уравнения Ито—Фоккера—Планка [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w}(F(w)\rho) + \frac{g^2}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w^2}. \tag{5}$$

Формальное решение задачи Коши для этого уравнения имеет вид (3)

$$\rho(w,t) = \exp\left\{(t - t_0)\left[\frac{g^2}{2}\frac{d^2}{dw^2} - \frac{d}{dw}F(w)\right]\right\}\varphi(w), \tag{6}$$

где $\varphi(w) \equiv \rho(w,t_0)$ — начальное условие.

Введем обозначение $\hat{p} \equiv -i\frac{d}{dw}$; тогда функция $\rho(w,t)$ примет вид амплитуды вероятности (Ψ-функции) одномерной квантовой частицы с координатой w и Гамильтонианом $H = \frac{g^2}{2i}\hat{p}^2 + \hat{p}F(w)$ [4]. Таким образом, каждая одномерная стохастическая система может рассматриваться как одномерная квантовая частица с мнимой массой ig^{-2}, на которую действуют силы трения. Отсюда согласно работе [4] $\rho(w,t) = < w \mid t >$, где $\mid w >$—собственный вектор оператора координаты квантовой частицы, $\mid t >$ — вектор состояния частицы, зависящей от времени, равный

$$\mid t > = \exp\{-iH(t - t_0)\} \mid t_0 > \equiv \exp\{-i(H_0 + H_1)(t - t_0)\} \mid t_0 >, \tag{7}$$

где $\mid t_0 >$ — вектор состояния частицы в момент времени t_0,

$$H_0 = \frac{g^2}{2i}\hat{p}^2,\ H_1 = \hat{p}F(w),\ < w \mid t_0 > \equiv \varphi(w).$$

Представим $\mid t >$ в виде

$$\mid t > = \exp\{-iH_0(t - t_0)\} \mid t_0 > + U(t) \mid t_0 >, \tag{8}$$

тогда для оператора $U(t)$ при дифференцировании выражения (8) получим уравнение

$$\frac{dU}{dt} = -i(H_0 + H_1)U - iH_1\exp\left\{-iH_0(t - t_0)\right\}, \qquad (9)$$

откуда

$$U(t) = \exp\left\{-iH_0(t - t_0)\right\}\int_{t_0}^{t}\exp\left\{-iH_0(\theta - t_0)\right\} \times$$

$$\times\ [-iH_1U(\theta) - iH_1\exp\left\{-iH_0(\theta - t_0)\right\}]d\theta\ ; \qquad (10)$$

последнее, очевидно, эквивалентно интегральному уравнению

$$\left\{1 + i\int_{t_0}^{t}d\theta\,\exp\left\{iH_0(\theta - t)\right\}H_1(\theta)\ldots\right\}U(t) = -i\int_{t_0}^{t}d\theta\,\exp\left\{iH_0(\theta - t)\right\} \times$$

$$\times\ H_1\exp\left\{-iH_0(\theta - t_0)\right\}, \qquad (11)$$

решением которого будет

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^{n+1}\int_{t_0}^{t}d\theta_n\int_{t_0}^{\theta_n}d\theta_{n-1}\ldots\int_{t_0}^{\theta_2}d\theta_1\int_{t_0}^{\theta_1}d\theta_0\,\exp\left\{iH_0(\theta_n - t)\right\}H_1(\theta_n)\exp \times$$

$$\times\left\{iH_0(\theta_{n-1} - \theta_n)\right\}H_1(\theta_{n-1}\ldots\exp\left\{iH_0(\theta_0 - \theta_1)\right\}H_1(\theta_0)\exp\left\{-iH_0(\theta_0 - t_0)\right\}. \qquad (12)$$

Здесь использовалось известное разложение для операторов $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}A^n$, где A — оператор; I — единичный оператор. Следовательно,

$$\rho(w,t) = \langle w|t\rangle = \langle w|\exp\left\{-iH_0(t - t_0)\right\}|t_0\rangle + \langle w|U(t)|t_0\rangle =$$

$$= \exp\left\{(t - t_0)\frac{g^2}{2}\frac{d^2}{dw^2}\right\}\varphi(w) + \sum_{n=0}(-i)^{n+1}\int_{t_0}^{t}d\theta_n\int_{t_0}^{\theta_n}d\theta_{n-1}\ldots\int_{t_0}^{\theta_2}d\theta_1\int_{t_0}^{\theta_1}d\theta_0 \times$$

$$\times\int_0^{\infty}d\alpha_n\int_0^{\infty}d\beta_n\ldots\int_0^{\infty}d\alpha_1\int_0^{\infty}d\beta_1\int_0^{\infty}d\alpha_0\int_0^{\infty}d\beta_0\,\langle w|\exp\left\{iH_0(\theta_n - t)\right\}|\alpha_n\rangle$$

$$\langle\alpha_n|H_1(\theta_n)|\beta_n\rangle\langle\beta_n|\exp\left\{iH_0(\theta_{n-1} - \theta_n)\right\}|\alpha_{n-1}\rangle\langle\alpha_{n-1}|H_1(\theta_{n-1})|\beta_{n-1}\rangle$$

$$\langle\beta_{n-1}|\ldots\langle\beta_1|\exp\left\{iH_0(\theta_0 - \theta_1)\right\}|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|H_1(\theta_0)|\beta_0\rangle\langle\beta_0| \times$$

$$\times\exp\left\{-iH_0(\theta_0 - t_0)\right\}|t_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{g\sqrt{2\Pi(t - t_0)}}\exp\left\{-\frac{(w - y)^2}{2g^2(t - t_0)}\right\} \times$$

$$\times\ \varphi(y) + \sum_{n=0}\int_{t_0}^{t}d\theta_n\int_{t_0}^{\theta_n}d\theta_{n-1}\ldots\int_{t_0}^{\theta_2}d\theta_1\int_{t_0}^{\theta_1}d\theta_0\int_0^{\infty}d\beta_n\ldots\int_0^{\infty}d\beta_0 \times$$

$$\times\frac{\exp\left\{-\dfrac{(w - \beta_n)^2}{2g^2(t - \theta_n)}\right\}}{g^3\sqrt{2\Pi}(t - \theta_n)^{3/2}}[w - \beta_n]F(\beta_n)\frac{\exp\left\{-\dfrac{(\beta_n - \beta_{n-1})^2}{2g^2(\theta_n - \theta_{n-1})}\right\}}{g^3\sqrt{2\Pi}(\theta_n - \theta_{n-1})^{3/2}} \times$$

$$\times\ [\beta_n - \beta_{n-1}]F(\beta_{n-1})\ldots\frac{\exp\left\{-\dfrac{(\beta_1 - \beta_0)^2}{2g^2(\theta_1 - \theta_0)}\right\}}{g^3\sqrt{2\Pi}(\theta_1 - \theta_0)^{3/2}}[\beta_1 - \beta_0]F(\beta_0) \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{g\sqrt{2\Pi(\theta - t_0)}}\exp\left\{-\frac{(\beta_0 - y)^2}{2g^2(\theta_0 - t_0)}\right\}\varphi(y).$$

В вышеприведенных выкладках мы воспользовались известными формулами

$$\exp\left\{A\frac{d^2}{dw^2}\right\}\varphi(w) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{2\sqrt{\Pi A}}\exp\left\{-\frac{(w - y)^2}{4A}\right\}\varphi(y);$$

$$\langle\alpha|\hat{H}_1(\theta)|\beta\rangle \equiv \langle\alpha|\hat{p}F(w)|\beta\rangle = -i\delta'(\alpha - \beta)F(\beta), \qquad (13)$$

где $\langle\alpha|\hat{H}_1(\theta)|\beta\rangle$ — матрица оператора H_I в w-представлении [4]. В нулевом порядке теории возмущений будем иметь

$$\rho_0(w,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{g\sqrt{2\Pi(t - t_0)}}\exp\left\{-\frac{(w - y)^2}{2g^2(t - t_0)}\right\}\varphi(y) +$$

$$\int_{t_0}^{t}d\theta\int_0^{\infty}d\gamma\,\frac{\exp\left\{-\dfrac{(w - \gamma)^2}{2g^2(t - \theta)}\right\}}{g^3\sqrt{2\Pi}(t - \theta)^{3/2}}[w - \gamma]F(\gamma) \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{g\sqrt{2\Pi(\theta - t_0)}}\exp\left\{-\frac{(\gamma - y)^2}{2g^2(\theta - t_0)}\right\}\varphi(y)\,. \qquad (14)$$

Как видно, нулевое приближение (14) соответствует разложению по амплитуде флуктуаций до $1/g^4$ включительно. Таким образом, это приближение хорошее для достаточно больших амплитуд флуктуаций.

Рассмотрим стационарный случай уравнения (5)

$$-\frac{d}{dw}[F(w)\rho(w)] + \frac{g^2}{2}\frac{d^2}{dw^2}\rho(w) = 0. \qquad (15)$$

Интегрирование уравнения (15) дает

$$\rho' - \frac{2}{g^2}F\rho = \text{const}. \qquad (16)$$

Из физического смысла $\rho(w)$ следует

$$\lim_{w\to\infty}\rho'(w) = \lim_{w\to\infty}\rho(w) = 0. \tag{17}$$

Отсюда уравнение (16) принимает вид

$$\rho' - \frac{2}{g^2}F(w)\,\rho = 0, \tag{18}$$

решением которого будет

$$\rho = C\exp\left\{\frac{2}{g^2}\int F(w)\,dw\right\}, \tag{19}$$

где константа C находится из условия нормировки.

Экстремумы функции (19) находятся из условия $F(w) = 0$.

Таким образом, экстремумы функции (19) соответствуют неподвижным точкам динамической системы (1). Пусть $\tilde{w}$ — такая точка максимума или минимума функции (19), тогда

$$F(w) = F'(\tilde{w})(w - \tilde{w}) + O(|w - \tilde{w}|^2), \tag{20}$$

где O — символ Ландау. Если $\tilde{w}$ — точка максимума, то $F'(w) < 0$ и из (20) видно, что $\tilde{w}$ — устойчивая стационарная точка. Если же $\tilde{w}$ — точка минимума, то $F'(w) > 0$ и $\tilde{w}$ — неустойчивая стационарная точка. Таким образом, при измерениях наиболее вероятно обнаружить систему в устойчивой стационарной точке и наименее вероятно в неустойчивой, что согласуется со случаем динамической системы (1) без флуктуаций. Если же правая часть (1) зависит от параметра и при его изменении система теряет устойчивость в стационарной точке, тогда в стохастической динамике при изменении этого параметра система из окрестностей стационарной точки, которая становится неустойчивой, уходит в окрестность другой устойчивой стационарной точки.

Список использованной литературы

1. *Московкин В.М., Есин П.В.* Оптимальное управление абразионным процессом // Докл. АН СССР. 1985. № 3. С. 731—734. 2. *Хакен Г.* Синергетика. М., 1988. 419 с. 3. *Ахиезер А.И., Пелетминский С.В.* Методы статистической физики. М., 1977. 367 с. 4. *Дирак П.А.* Основы квантовой механики. М., 1937. 319 с.

Поступила в редколлегию 03.02.91