Н. В. Малай, А. В. Глушак, А. В. Лиманская, Решение краевой задачи медленного обтекания сферы вязким неизотермическим газом, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, номер 12, 54–65

Известия вузов. Математика
2016, №12, с. 54–65

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.В. МАЛАЙ, А.В. ГЛУШАК, А.В. ЛИМАНСКАЯ

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕДЛЕННОГО ОБТЕКАНИЯ СФЕРЫ ВЯЗКИМ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИМ ГАЗОМ

Аннотация. Получено решение краевой задачи обтекания частицы сферической формы для стационарной системы уравнений вязкой неизотермической газообразной среды, включающей уравнение Стокса, уравнение теплопереноса и уравнение состояния с учетом зависимости вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, уравнение Стокса.

УДК: 517.957 : 517.958

Введение. Математическая теория течения газообразной среды — обширная и быстро развивающаяся часть газовой динамики. Наибольший интерес представляет система уравнений Навье–Стокса, выражающая законы сохранения импульса и массы. В векторной форме они записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \big(\mathbf{V}\cdot\nabla\big)\mathbf{V} = \nu\triangle\mathbf{V} - \frac{1}{\rho}\nabla P - \mathbf{f}, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbf{V} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{V} = \big(V_1, V_2, \dots, V_n\big)$ — векторное поле скоростей, t — время, ∇, $\triangle$ — операторы набла и Лапласа, ρ — плотность, P — давление, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{f}$ — векторное поле массовых сил. Неизвестные P и $\mathbf{V}$ являются функциями времени t и координаты $x \in \Omega$, где $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — двух- или трехмерная область, в которой движется среда.

Одно из наиболее неприятных свойств системы уравнений Навье–Стокса — ее нелинейность, обусловленная наличием конвективного члена ускорения $\big(\mathbf{V}\cdot\nabla\big)\mathbf{V}$ в левой части уравнения (1). Кроме того, как правило, и сами краевые условия для уравнений Навье–Стокса, описывающие течения конкретной вязкой среды, являются нелинейными. С учетом этих фактов в газовой динамике были разработаны приближенные методы, позволяющие в той или иной мере упростить систему уравнений гидродинамики и приспособить ее к характеру отдельных типов конкретных физических задач. Имеется обширный класс гидродинамических течений, в котором можно пренебречь нелинейным членом. В научной литературе такие уравнения получили название линеаризованные по скорости уравнения Навье–Стокса.

При исследовании стационарной системы уравнений вязкой неизотермической газообразной среды будем использовать термин "относительный перепад температуры", равный отношению разности между средней температурой поверхности частицы T_S и температурой

Поступила 07.04.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №16-01-00197 А-2016.

области вдали от нее T_∞ к последней. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $(T_S - T_\infty)/T_\infty \ll 1$. При выполнении этого неравенства коэффициенты вязкости, теплопроводности и плотности среды можно считать постоянными величинами, а вязкая среда называется изотермической. Если $(T_S - T_\infty)/T_\infty \sim O(1)$, то относительный перепад температуры считается значительным. В этом случае необходимо учитывать уже зависимость указанных коэффициентов от температуры, что существенно осложняет анализ системы уравнений, а вязкая среда называется неизотермической.

В настоящее время движение частиц сферической формы подробно изучено лишь в изотермическом случае (например, [1], гл. XI и [2], гл. 4), в котором анализ системы уравнений Навье–Стокса существенно упрощается и решения хорошо изучены в отличие от неизотермического случая ([3]–[6]). В данной работе изучаются ползущие течения вязкого неизотермического газа. При определенном виде поиска решений компонент массовой скорости и при допустимых с точки зрения физики упрощениях решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса сведено к решению обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с изолированной особой точкой с помощью функциональных рядов специального вида.

Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия. Рассматривается классическая задача обтекания твердой неравномерно нагретой частицы сферической формы радиуса R плоскопараллельным потоком газа со скоростью $\mathbf{U}_\infty$ ($\mathbf{U}_\infty \| Oz$), но не при малых относительных перепадах температуры, как в ([2], с. 144), а при значительных перепадах температуры. Описание обтекания производится в сферической системе координат (r, φ, θ), связанной с центром масс частицы. Получено осесимметричное (не зависящее от координаты φ) решение краевой задачи для системы стационарных газодинамических уравнений, описывающих векторное поле $\mathbf{U}(x) = (U_1(x), U_2(x), U_3(x))$. Найдены функции $P(x)$, $T(x)$ в области $x \in \Omega_g = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_p$, где Ω_p — сферическая область с центром в нуле, а также функция $T_p(x)$, $x \in \Omega_p$. Здесь $\mathbf{U}(x)$ — поле скоростей, $P(x), T(x)$ — распределения давления и температуры во внешнем потоке, а $T_p(x)$ — распределение температуры внутри частицы. Указанная система уравнений имеет следующий вид:

$$\nabla_k P = \sum_{j=1}^{3} \nabla_j \left[\mu(\nabla_j U_k + \nabla_k U_j - \frac{2}{3}\delta_{jk}(\nabla, \mathbf{U})) \right], \quad k = 1, 2, 3, \tag{2}$$

$$\big(\nabla, \rho \mathbf{U}\big) = 0, \tag{3}$$

$$\big(\nabla, \lambda_g \nabla T_g\big) = 0, \tag{4}$$

$$\big(\nabla, \lambda_p \nabla T_p\big) = -q, \tag{5}$$

где $\nabla = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3)$ — векторный дифференциальный оператор Гамильтона в декартовых координатах, $\nabla_j \equiv \partial/\partial x_j$, $q(x)$ — заданная в Ω_p функция, определяющая плотность тепловых источников внутри частицы. Здесь и далее индексы g и p относятся соответственно к областям Ω_g и Ω_p, т. е. к среде и к частице. Ввиду того, что μ, ρ, λ_g, λ_p являются функциями от искомых функций $T_g(x)$ и $T_p(x)$, система уравнений (2)–(5) в целом является нелинейной. В дальнейшем уравнение (2) называем линеаризованным по скорости уравнением Навье–Стокса, (3) — уравнением неразрывности, (4) и (5) — уравнениями теплопроводности, описывающими распределение температуры вне Ω_g и внутри Ω_p соответственно.

Математическое описание движения нагретых частиц в вязкой неизотермической газообразной среде позволяет распространить метод решения линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса, разработанный для конкретной физической задачи, на более широкий класс задач.

В данной работе для решения системы уравнений газовой динамики сделаем следующие физические допущения, реализуемые в большинстве прикладных задач.

Допущение 1. Как и в ([7], гл. IX), предполагается степенной вид зависимости динамической вязкости, теплопроводности и плотности от температуры:

$$\mu_g = \mu_\infty \bigl(T_g/T_\infty\bigr)^\beta, \quad \rho_g = \rho_\infty \bigl(T_\infty/T_g\bigr), \quad \lambda_g = \lambda_\infty \bigl(T_g/T_\infty\bigr)^\alpha, \quad \lambda_p = \lambda_* \bigl(T_p/T_\infty\bigr)^\omega,$$

где μ_∞, ρ_∞, λ_∞, λ_*, T_∞ — положительные постоянные. В указанных степенных зависимостях показатели заключены в пределах $0.5 \le \alpha, \beta \le 1$, $-1 \le \omega \le 1$. Индекс ∞ здесь и далее используется для обозначения значений искомых функций на бесконечности.

Допущение 2. Коэффициент теплопроводности частицы много больше коэффициента теплопроводности газа, что имеет место для большинства реальных газообразных сред. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла θ в системе "частица–газообразная среда" (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и, следовательно, вязкость связана только с температурой $t_{g0}(r)$, т. е. $\mu_g(t_g(r,\theta)) \approx \mu_g(t_{g0}(r))$. При этом $t_g(r,\theta) = t_{g0}(r) + \delta t_g(r,\theta)$, где $\delta t_g(r,\theta) \ll t_{g0}(r)$, а $\delta t_g(r,\theta), t_{g0}(r)$ определяются из решения тепловой задачи (4), (5). При таком допущении можем рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется с помощью граничных условий.

Допущение 3. Частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

В сферической системе координат система газодинамических уравнений, описывающая распределение скорости и давления вне частицы, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} + \frac{2}{y}\sigma_{rr} + \frac{1}{y}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{y}\sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{y}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial y} + \frac{3}{y}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{y}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{y}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \tag{7}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\bigl(y^2 \rho U_r\bigr) + \frac{1}{y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\bigl(\sin\theta\ \rho U_\theta\bigr) = 0, \tag{8}$$

а уравнения теплопроводности, описывающие распределения температуры вне и внутри частицы, с учетом допущения 1 принимают вид

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \frac{\partial t_g^{1+\alpha}}{\partial y}\right) + \frac{1}{y^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial t_g^{1+\alpha}}{\partial \theta}\right) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \frac{\partial t_p^{1+\omega}}{\partial y}\right) + \frac{1}{y^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial t_p^{1+\omega}}{\partial \theta}\right) = -\frac{R^2(1+\omega)}{\lambda_* T_\infty} q, \tag{10}$$

где $y = r/R$, σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ — компоненты тензора напряжений в сферической системе координат, определяемые равенствами ([8], гл. II, с. 70)

$$\sigma_{rr} = \mu\left(2\frac{\partial U_r}{\partial y} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{U}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu\left(\frac{2}{y}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{y}U_r - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{U}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \mu\left(\frac{2}{y}U_r + \frac{2}{y}\operatorname{ctg}\theta\ U_\theta - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{U}\right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{y}\right).$$

Считаем, что на поверхности частицы (при $r = R$) выполнено условие прилипания для нормальной и касательной компонент массовой скорости $\mathbf{U}$. Кроме того, имеют место равенство температур и непрерывность радиальных потоков тепла с учетом излучения на поверхности частицы, а также справедливы стандартные условия при $y \to \infty$ и $y \to 0$. Поэтому систему газодинамических уравнений (6)–(10) следует решать со следующими граничными условиями:

$$\lim_{y\to 1} U_r(y,\theta) = \lim_{y\to 1} U_\theta(y,\theta) = 0, \quad \lim_{y\to 1} T_g(y,\theta) = \lim_{y\to 1} T_p(y,\theta), \tag{11}$$

$$\lim_{y\to 1} \lambda_g T_g \frac{\partial T_g}{\partial y} = \lim_{y\to 1} \left(\lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial y} + R\sigma_0\sigma_1(T_p^4 - T_\infty^4)\right), \tag{12}$$

$$\lim_{y\to\infty} \mathbf{U}(y,\theta) = U_\infty \cos\theta \boldsymbol{e}_r - U_\infty \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta, \quad \lim_{y\to\infty} P = P_\infty, \quad \lim_{y\to\infty} T_g = T_\infty, \quad \lim_{y\to 0} |T_p| < \infty, \tag{13}$$

где σ_0 — постоянная Стефана–Больцмана, σ — интегральная степень черноты тела, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ — базисные орты сферической системы координат.

Компоненты массовой скорости $U_r(y,\theta)$, $U_\theta(y,\theta)$ и давления $P(y,\theta)$ будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Они нужны для нахождения общей силы, действующей на частицу, которая определяется ([8], гл. II, с. 70) интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы S при $r = R$,

$$\lim_{r\to R} F_z(r) = \lim_{r\to R} \int_S (-P(r/R,\theta)\cos\theta + \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta) r^2 \sin\theta \; d\theta\, d\varphi. \tag{14}$$

Используя свойство полиномов Лежандра и Гегенбауэра, видим, что эта сила определяется только первыми членами разложений ([2], гл. 4, с. 156). Поэтому будем считать

$$U_r(y,\theta) = U_\infty G(y)\cos\theta, \quad U_\theta(y,\theta) = -U_\infty g(y)\sin\theta, \tag{15}$$

где $G(y)$ и $g(y)$ — произвольные функции, зависящие от радиальной координаты.

Связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ находится из уравнения непрерывности (8) с учетом зависимости плотности газообразной среды от температуры в допущении 1. Она имеет следующий вид:

$$g(y) = G(y) + \frac{y}{2}(G'(y) - f(y)G(y)), \quad f(y) = \frac{1}{t_{g0}(y)}\frac{dt_{g0}(y)}{dy}. \tag{16}$$

Найдем поля температур вне и внутри частицы. Для этого необходимо решить уравнения (9)–(10). С учетом допущения 2 в дальнейшем нужны только функции $t_{g0}(y)$ и $t_{p0}(y)$, которые описываются уравнениями

$$\frac{1}{y^2}\frac{d}{dy}\left(y^2 \frac{d\Phi_1(y)}{dy}\right) = 0, \tag{17}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{d}{dy}\left(y^2 \frac{d\Phi_2(y)}{dy}\right) = f(y), \tag{18}$$

где $\Phi_1(y) = t_{g0}^{(1+\alpha)}(y)$, $\Phi_2(y) = t_{p0}^{(1+\omega)}(y)$, $f(y) = -\frac{R^2(1+\omega)}{2\lambda_* T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1} q(y,x)dx$, $x = \cos\theta$.

Интегрируя уравнения (17) и (18), получаем следующие решения, которые удовлетворяют граничным условиям при $y \to \infty$ и $y \to 0$ (см. (13))

$$t_{g0}(y) = \left(1 + \Gamma_0/y\right)^{1/(1+\alpha)}, \tag{19}$$

$$t_{p0}(y) = \left(B_0 + \frac{D_0}{y} + \frac{1}{y}\int_y^1 \psi_0(\xi)\; d\xi - \int_y^1 \frac{\psi_0(\xi)}{\xi} d\xi\right)^{1/(1+\omega)},$$

$$\psi_0(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_*}\frac{1+\omega}{T_\infty}y^2\int_{-1}^{1} q(y,x)\ dx, \quad D_0 = -\int_0^1 \psi_0(\xi)d\xi,$$

где постоянные Γ_0 и B_0 определяются из граничных условий на поверхности частицы (11), (12).

Если через T_S обозначить среднее значение температуры поверхности частицы ($T_S = t_{pS}/T_\infty$, $t_{pS} = t_{p0}(y=1)$), то из второго граничного условия (11) имеем

$$\Gamma_0 = \left(T_S/T_\infty\right)^{1+\alpha} - 1, \tag{20}$$

значение T_S определяется из граничного условия (12)

$$\frac{\ell(1)}{1+\alpha}\frac{\lambda_{gS}}{\lambda_{pS}}t_{gS} = \frac{R^2}{3\lambda_{pS}T_{g\infty}}J_0 - \sigma_0\sigma_1\frac{RT_\infty^3}{\lambda_{pS}}(t_{pS}^4 - 1), \tag{21}$$

в котором

$$\lambda_{gS} = \lambda_\infty t_{gS}^\alpha, \quad \lambda_{pS} = \lambda_* t_{pS}^\omega, \quad t_{gS} = t_{g0}(y=1),$$

$$T_{gS} = t_{gS}T_\infty, \quad \ell(1) = \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0}, \quad J_0 = \frac{3}{4\pi R^3}\int_V q(x)dV,$$

а интегрирование ведется по всему объему частицы.

С учетом (19) и допущения 2 зависимость динамической вязкости от температуры принимает вид

$$\mu_g(y,\theta) = \mu_\infty(1+\Gamma_0/y)^{\beta/(1+\alpha)}. \tag{22}$$

Как и в [3], продифференцировав (6) по переменной θ, а (7) по y, подставляя (15) в (6), (7) и учитывая (16) и (22), после элементарных преобразований для функции $G(y)$ на интервале $y \in [1,\infty)$ получим следующее однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{\mathrm{d}^4G(y)}{dy^4} + \frac{1}{y}(8+\alpha_1\ell(y))\frac{d^3G(y)}{dy^3} + \frac{1}{y^2}(8+\alpha_2\ell(y)+\alpha_3\ell^2(y))\frac{d^2G(y)}{dy^2} +$$
$$+\frac{1}{y^3}(-8+\alpha_4\ell(y)+\alpha_5\ell^2(y)+\alpha_6\ell^3(y))\frac{dG(y)}{dy} + \frac{1}{y^4}(\alpha_7\ell^2(y)+\alpha_8\ell^3(y)+\alpha_6\ell^4(y))G(y) = 0, \tag{23}$$

в котором

$$\alpha_2 = -\frac{8\beta}{1+\alpha}, \ \alpha_3 = \frac{\beta^2-3\beta-\alpha\beta+3+3\alpha}{(1+\alpha)^2}, \ \alpha_4 = 2\frac{\beta-1}{\alpha+1}, \ \alpha_5 = 2\frac{\beta^2+\beta-\alpha\beta-3\alpha-3}{(1+\alpha)^2},$$

$$\alpha_1 = \frac{1-2\beta}{1+\alpha}, \ \alpha_6 = \frac{6+12\alpha+6\alpha^2+\beta^2-5\beta-5\alpha\beta}{(1+\alpha)^3},$$

$$\alpha_7 = 2\frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}, \alpha_8 = -2\alpha_6, \ \ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0},$$

с краевыми условиями

$$G(1) = F_1, \quad \lim_{y\to\infty} G(y) = 1, \quad g(1) = F_2, \quad \lim_{y\to\infty} g(y) = 1, \tag{24}$$

где F_1 и F_2 — постоянные, вид которых определяется конкретной физической задачей. Например, в случае классической задачи Стокса имеем $F_1 = F_2 = 0$, что соответствует условию прилипания на поверхности сферы радиуса R.

Решение уравнения (23) будем искать в виде следующего функционального ряда специального вида:

$$G(y) = y^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \ell^n(y), \quad C_0 \neq 0. \tag{25}$$

Вычисляя производные, получим

$$G'(y) = -y^{\rho-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)C_n - (n-1)C_{n-1}]\ell^n(y),$$

$$G''(y) = y^{\rho-2} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1)C_n - 2(n-\rho)(n-1)C_{n-1} + (n-1)(n-2)\,C_{n-2}]\ell^n(y),$$

$$G'''(y) = -y^{\rho-3} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1)(n-\rho+2)C_n - 3(n-\rho)(n-\rho+1)(n-1)C_{n-1} + \\ + 3(n-\rho)(n-1)(n-2)C_{n-2} + (n-1)(n-2)(n-3)C_{n-3}]\ell^n(y),$$

$$G^{IV}(y) = y^{\rho-4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1)(n-\rho+2)(n-\rho+3)C_n - 4(n-\rho)(n-\rho+1)\times \\ \times (n-\rho+2)(n-1)C_{n-1} + 6(n-\rho)(n-\rho+1)(n-1)(n-2)C_{n-2} - \\ - 4(n-\rho)(n-1)(n-2)(n-3)C_{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)C_{n-4}]\ell^n(y).$$

Подставляя ряд (25) в (23) и приравнивая коэффициенты при y^{ρ}, получаем определяющее уравнение

$$\rho(\rho+3)(\rho+1)(\rho-2) = 0,$$

имеющее корни $\rho_1 = -3$, $\rho_2 = -1$, $\rho_3 = 0$, $\rho_4 = 2$. Заметим, что разность корней равна целому числу. Следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса) во всех остальных решениях, кроме первого, соответствующего $\rho_1 = -3$, появляется дополнительное слагаемое, содержащее множитель $\ln y$, умноженный на первое решение ([9], гл. IV).

Большему по модулю из корней отвечает решение

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y). \tag{26}$$

Подставляя (26) в (23) и используя метод неопределенных коэффициентов, получим следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_{n,1}$:

$$C_{0,1} = 1, \qquad C_{n,1} = \frac{1}{n(n+2)(n+3)(n+5)} \Big\{(n+2)\times \\ \times [4(n-1)(n^2+4n+1) + \alpha_1(n+3)(n+4) + \alpha_4 - \alpha_2(n+3)]C_{n-1,1} - \\ - [2(n-1)(n-2)(3n^2+9n+4) + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n+3) - \\ - 2\alpha_2(n+2)(n-2) + \alpha_3(n+1)(n+2) + \alpha_4(n-2) - \alpha_5(n+1) + \alpha_7]C_{n-2,1} + \\ + [4(n+1)(n-1)(n-2)(n-3) + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n-3) - \alpha_2(n-3)(n-2) + \\ + 2\alpha_3(n+1)(n-3) - \alpha_5(n-3) + \alpha_6 n - \alpha_8]C_{n-3,1} - \\ - (n-3)[(n-1)(n-2)(n-4) + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6]C_{n-4,1}\Big\}.$$

Здесь и в дальнейшем считаем $C_{n,k}=0$, если $n<0$.

Второе решение уравнения (23), линейно независимое с решением $G_1(y)$ и соответствующее корню $\rho_2=-1$, будем искать в виде

$$G_2(y)=\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,2}\ell^n(y)+\frac{\omega_1\ln y}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,1}\ell^n(y).$$

Аналогично, методом неопределенных коэффициентов получим следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_{n,2}$:

$$C_{0,2}=1,\ C_{1,2}=-\frac{1}{8}(6\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4),\ C_{2,2}=1,$$

$$\begin{gathered}C_{n,2}=\frac{1}{n(n-2)(n+3)(n+1)}\Big\{n[4(n-1)(n^2-3)+\alpha_1(n+1)(n+2)+\alpha_4-\\
-\alpha_2(n+1)]C_{n-1,2}-[2(n-1)(n-2)(3n^2-3n-2)+3\alpha_1n(n-2)(n+1)-2\alpha_2n(n-2)+\\
+\alpha_3n(n-1)+\alpha_4(n-2)-\alpha_5(n-1)+\alpha_7]C_{n-2,2}+[4(n-1)^2(n-2)(n-3)+\\
+3\alpha_1n(n-2)(n-3)-\alpha_2(n-3)(n-2)+2\alpha_3(n-1)(n-3)-\alpha_5(n-3)-\alpha_8+\\
+\alpha_6(n-2)]C_{n-3,2}-(n-3)[(n-1)(n-2)(n-4)+\alpha_1(n-2)(n-4)+\\
+\alpha_3(n-4)+\alpha_6]C_{n-4,2}+\frac{\omega_1}{\Gamma_0^2}\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)\Delta_k\Big\},\end{gathered}$$

где

$$\frac{\omega_1}{\Gamma_0^2}=\frac{1}{30}[2\alpha_3-\alpha_5+\alpha_7-2(4+12\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_4)C_{1,2}],$$

$$\begin{gathered}\Delta_k=(4k^3+30k^2+62k+30)C_{k,1}-\\
-[12(k^2-1)(k+3)+\alpha_4+\alpha_1(3k^2+18k+26)-\alpha_2(2k+5)]C_{k-1,1}+\\
+[6(k-1)(k-2)(2k+3)-2\alpha_2(k-2)-\alpha_5+\alpha_3(2k+3)+3\alpha_1(k-2)(2k+5)]C_{k-2,1}-\\
-[4(k-1)(k-2)(k-3)+3\alpha_1(k-2)(k-3)+\alpha_6+2\alpha_3(k-3)]C_{k-3,1}.\end{gathered}$$

Третье решение уравнения (23), линейно независимое с решениями $G_1(y)$, $G_2(y)$ и соответствующее корню $\rho_3=0$, будем искать в виде

$$G_3(y)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,3}\ell^n(y)+\frac{\omega_2\ln y}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,1}\ell^n(y)+\frac{\omega_0\ln y}{y}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,2}\ell^n(y),$$

где коэффициенты $C_n^{(3)}$ $(n\geq 4)$ определяются из рекуррентной формулы

$$C_{0,3}=1,\quad C_{1,3}=0,\quad C_{2,3}=\frac{\alpha_7}{8},\quad C_{3,3}=1,\quad \omega_0=0,$$

$$\begin{gathered}C_{n,3}=\frac{1}{n(n+2)(n-3)(n-1)}\Big\{(n-1)[4(n-1)(n^2-2n-2)+\alpha_1n(n+1)+\alpha_4-\\
-\alpha_2n]C_{n-1,3}-[2(n-1)(n-2)(3n^2-9n+4)+3\alpha_1n(n-2)(n-1)+(n-1)(n-2)\times\\
\times(\alpha_3-2\alpha_2)+(n-2)(\alpha_4-\alpha_5)+\alpha_7]C_{n-2,3}+[4(n-1)(n-2)^2(n-3)+\\
+3\alpha_1(n-1)(n-2)(n-3)+(n-3)(n-2)(2\alpha_3-\alpha_2)+(n-3)(\alpha_6-\alpha_5)+\alpha_7]\,C_{n-3,3}-\\
-(n-3)[(n-1)(n-2)(n-4)+\alpha_1(n-2)(n-4)+\alpha_3(n-4)+\alpha_6]C_{n-4,3}+\end{gathered}$$

$$+\frac{1}{60}\left[\alpha_8-\frac{\alpha_7}{4}(8+12\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_4)\right]\sum_{k=0}^{n-3}(n-k-2)(n-k-1)\Delta_k.$$

Четвертое решение $G_0(y)$ уравнения (23), отвечающее корню $\rho_4=2$, согласно методу Фробениуса следует искать в виде

$$G_0(y)=y^2\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,4}\ell^n(y)+\frac{\varsigma_0}{y^3}\ln y\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,1}\ell^n(y)+$$
$$+\frac{\varsigma_1}{y}\ln y\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,2}\ell^n(y)+\varsigma_2\ln y\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,3}\ell^n(y),\quad C_{0,4}=1.$$

Поскольку это решение не удовлетворяет краевому условию $\lim\limits_{y\to\infty}G(y)=1$, то его явный вид здесь не приводим.

Заметим, что выбор постоянных $C_{0,1}$, $C_{0,2}$ и $C_{0,3}$ осуществляется таким образом, чтобы функции $G_1(y)$, $G_2(y)$ и $G_3(y)$ стремились к соответствующим функциям для сферы при малых относительных перепадах температуры ([2], с. 144; [8], с. 83), т. е. чтобы при $\Gamma_0\to 0$

$$G_1(y)\to 1/y^3,\quad G_2(y)\to 1/y,\quad G_3(y)=1.$$

Учитывая неравенство

$$\ell(y)=\frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0}<1,$$

утверждаем, что ряды, определяющие функции $G_i(y)$, $i=1,2,3$, равномерно сходятся при $y\geq 1$ и являются ограниченными функциями, которые можно дифференцировать нужное число раз. В дальнейшем потребуются производные до третьего порядка. Производя необходимые вычисления, получим

$$G_1'(y)=-\frac{1}{y^4}\sum_{n=0}^{\infty}[(n+3)C_n^{(1)}-(n-1)C_{n-1,1}]\ell^n(y),$$

$$G_1''(y)=\frac{1}{y^5}\sum_{n=0}^{\infty}[(n+3)(n+4)C_n^{(1)}-2(n+3)(n-1)C_{n-1,1}+(n-1)(n-2)C_{n-2,1}]\ell^n(y),$$

$$G_1'''(y)=-\frac{1}{y^6}\sum_{n=0}^{\infty}[(n+3)(n+4)(n+5)C_{n,1}-3(n+3)(n+4)(n-1)C_{n-1,1}+$$
$$+3(n+3)(n-1)(n-2)C_{n-2,1}+(n-1)(n-2)(n-3)C_{n-3,1}]\,\ell^n(y),$$

$$G_2'(y)=-\frac{1}{y^2}\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)C_{n,2}-(n-1)C_{n-1,2}]\ell^n(y)+\frac{\omega_1}{y^4}\ln y\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,1}\ell^n(y)+\omega_1\ln y\ C_1^I(y),$$

$$G_2''(y)=\frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)\,C_{n,2}-2(n+1)(n-1)C_{n-1,2}+(n-1)(n-2)\,C_{n-2,2}]\ell^n(y)-$$
$$-\frac{\omega_1}{y^5}\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+7)C_{n,1}-2(n-1)C_{n-1,1}]+\omega_1\ln y\ G_1''(y),$$

$$G_2'''(y)=-\frac{1}{y^4}\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)(n+3)C_{n,2}-3(n+1)(n+2)(n-1)C_{n-1,2}+$$

$$+ 3(n+1)(n-1)(n-2)C_{n-2,2} + (n-1)(n-2)(n-3)C_{n-3,2}]\ell^n(y)+$$
$$+\frac{\omega_1}{y^6}\sum_{n=0}^{\infty}[(3n^2+24n+47)C_{n,1} - 3(n-1)(2n+7)\,C_{n-1,1} + 3(n-1)(n-2)\,C_{n-2,1}]\ell^n(y)+$$
$$+\,\omega_1 \ln y\; G_1''(y),$$

$$G_3'(y) = -\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}[nC_{n,3} - (n-1)C_{n-1,3}]\ell^n(y) + \frac{\omega_2}{y^4}\ln y\;\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,1}\ell^n(y) + \omega_2 \ln y\; G_1'(y),$$

$$G_3''(y) = \frac{1}{y^2}\sum_{n=0}^{\infty}[n(n+1)C_{n,3} - 2n(n-1)C_{n-1,3} + (n-1)(n-2)C_{n-2,3}]\ell^n(y)-$$
$$-\frac{\omega_2}{y^5}\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+7)C_{n,1} - 2(n-1)C_{n-1,1}] + \omega_2 \ln y\; G_1''(y),$$

$$G_3'''(y) = -\frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}[n(n+1)(n+2)C_{n,3} - 3n(n+1)(n-1)C_{n-1,3} + 3n(n-1)\times$$
$$\times (n-2)C_{n-2,3} + (n-1)(n-2)(n-3)C_{n-3,3}]\ell^n(y) + \frac{\omega_2}{y^6}\sum_{n=0}^{\infty}[(3n^2+24n+47)C_{n,1}-$$
$$-\,3(n-1)(2n+7)C_{n-1,1} + 3(n-1)(n-2)C_{n-2,1}]\ell^n(y) + \omega_2 \ln y\; G_1''(y).$$

Таким образом, общее решение уравнения (23) имеет вид

$$G(y) = A_1G_1(y) + A_2G_2(y) + A_3G_3(y) + A_0G_0(y), \tag{27}$$

где A_1, A_2, A_3 и A_0 — произвольные постоянные.

Постоянные A_1, A_2, A_3 и A_0 однозначно определяются из краевых условий (24). Очевидно, $A_0 = 0$, $A_3 = 1$. Для определения постоянных A_1 и A_2 имеем следующую линейную систему уравнений:

$$A_1\,G_1(1) + A_2G_2(1) = F_1 - G_3(1);$$
$$A_1\,G_4(1) + A_2G_5(1) = F_2 - G_6(1),$$

где

$$G_k(y) = \left(1 + \frac{\ell(y)}{2(1+\alpha)}\right)G_{k-3}(y) + \frac{y}{2}G_{k-3}'(y), \quad k = 4,5,6.$$

Эта система имеет единственное решение, поскольку ее главный определитель отличен от нуля в силу линейной независимости решений $G_1(y)$, $G_2(y)$, $G_3(y)$. Таким образом, имеем

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 - G_3(1) & G_2(1) \\ F_2 - G_6(1) & G_5(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1)\end{vmatrix}}, \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1(1) & F_1 - G_3(1) \\ G_4(1) & F_2 - G_6(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1)\end{vmatrix}}. \tag{28}$$

В результате проведенного исследования доказана

Теорема. *Функция $G(y) = A_1G_1(y) + A_2G_2(y) + G_3(y)$ с коэффициентами, определяемыми формулой (28), является единственным решением уравнения (23), удовлетворяющим краевым условиям (24).*

Перейдем к определению компонентов массовой скорости $\mathbf{U}$ и давления P, которые необходимы для нахождения общей силы (14), действующей на неравномерно нагретую частицу, движущуюся в неизотермической газообразной среде. Учитывая (15), (16) и доказанную теорему, имеем

$$U_r(y,\theta) = U_\infty \cos\theta[A_1G_1(y) + A_2G_2(y) + G_3(y)], \tag{29}$$

$$U_\theta(y,\theta) = -U_\infty \sin\theta[A_1G_4(y) + A_2G_5(y) + G_6(y)]. \tag{30}$$

Поскольку явный вид функций $U_r(y,\theta)$ и $U_\theta(y,\theta)$ известен из (29), (30), то из (7) можем легко получить выражения для поля давления

$$P(y,\theta) = P_\infty + \frac{\mu_{e\infty}U_\infty}{R} t_{e0}^{\beta}\Big(\frac{y^2}{2}G'(y) + y\Big(3 + \frac{\beta-1}{2}yf(y)\Big)G''(y) - \Big(2 - y^2f'(y) - \frac{\beta}{2}y^2f^2(y) +$$

$$+ (\beta-2)yf(y)\Big)G'(y) + 2\Big(y^2f''(y) + yf'(y)(4+\beta yf(y)) - \frac{2}{3}f(y)\Big)G(y)\Big)\cos\theta,$$

$$f(y) = -\frac{\ell(y)}{(1+\alpha)y}.$$

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по ее поверхности и в сферической системе координат определяется по формуле (14). Интегрируя (14) по углам ($0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$), получим

$$\boldsymbol{F}_z = 6\pi R\mu_{e\infty}U_\infty f_\mu \boldsymbol{n}_z, \quad f_\mu = \frac{2N_2}{3N_1}, \tag{31}$$

где $\boldsymbol{n}_z$ — единичный вектор в направлении оси Oz, $N_1 = G_1(1)G_2'(1) - G_2(1)G_1'(1)$, $N_2 = G_1(1)G_3'(1) - G_3(1)G_1'(1)$.

Сферическая частица, падающая под действием силы тяжести, приобретает постоянную скорость $\boldsymbol{U}_p$, как только действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами.

Сила тяжести, действующая на частицу, с учетом выталкивающей силы равна

$$\boldsymbol{F}_g = (\rho_{pS} - \rho_{gS})g\frac{4}{3}\pi R^3\boldsymbol{n}_z, \tag{32}$$

где g — ускорение свободного падения, ρ_{pS}, ρ_{gS} — плотность частицы и газообразной среды, взятые при средней температуре поверхности частицы, равной T_S.

Приравнивая (32) к (31) и учитывая, что $\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{U}_p$, получаем выражение для скорости установившегося падения твердой неравномерно нагретой частицы сферической формы в поле силы тяжести

$$\boldsymbol{U}_p = h\boldsymbol{n}_z, \quad h = \frac{2}{9}\frac{\rho_{pS} - \rho_{gS}}{\mu_\infty f}R^2 g. \tag{33}$$

Таким образом, формулы (31) и (33) позволяют оценивать силу, действующую на неравномерно нагретую сферу, и скорость ее гравитационного падения с учетом степенного вида зависимости коэффициентов вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры при произвольных относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

В случае, когда величина нагрева поверхности частицы достаточно мала, т. е. средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей среды вдали от нее ($\Gamma_0 = 0$), зависимостью плотности и коэффициентов молекулярного переноса от температуры можно пренебречь, и тогда

$$G_1(1) = 1, \quad G_1'(1) = -3, \quad G_2(1) = 1, \quad G_2'(1) = -1, \quad G_3(1) = 1, \quad G_3'(1) = 0, \quad N_1 = 2, \quad N_2 = 3.$$

В этом случае формулы (31) и (33) переходят в известные выражения для сферы, полученные Стоксом ([2], с. 144; [8], с. 83)

$$\boldsymbol{F}_S = 6\pi R\mu_{e\infty}\boldsymbol{U}_\infty, \quad \boldsymbol{U} = \frac{2}{9}\frac{\rho_{i\infty} - \rho_{e\infty}}{\mu_{e\infty}}R^2\boldsymbol{g}.$$

Здесь следует отметить, что коэффициенты молекулярного переноса и плотность берутся при температуре поверхности частицы, равной температуре окружающей среды (в нашем случае T_∞), т. е. эти формулы справедливы при малых относительных перепадах температуры.

Однако из (20) следует, что константа Γ_0 зависит от величины средней температуры поверхности частицы T_S, которая в случае неравномерного нагрева поверхности определяется из уравнения (21) и поэтому зависит от плотности тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы. Отсюда следует, что и функции G_1, G_2 и т. д. также зависят от плотности тепловых источников, поскольку в эти функции входит величина

$$\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}.$$

Проведенный с помощью полученных выше формул численный анализ показал нелинейный характер зависимости силы и скорости гравитационного движения от средней температуры поверхности частицы. Полученные результаты для системы газодинамических уравнений позволяют описать широкий класс других физических задач, например, осаждение частиц в разнотемпературных каналах, зондирование атмосферы мощным лазерным излучением, разработка методов тонкой очистки газов от гидро- и аэрозольных примесей и т. д.

Литература

[1] Ламб Г. *Гидродинамика* (ИТТЛ, М., 1947).

[2] Хаппель Дж. *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса* (Мир, М., 1960).

[3] Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. *Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде*, СО РАН. ПМТФ **49** (1), 74–80 (2008).

[4] Малай Н.В., Плесканев А.А. *К вопросу о влиянии внутреннего тепловыделения на термофорез твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы*, Инженерно-физический журн. **77** (6), 74–78 (2004).

[5] Малай Н.В., Щукин Е.Р., Шулиманова З.Л. *Молекулярный теплообмен твердой сферической частицы с газообразной средой*, Теплофизика высоких температур **51** (4), 552–557 (2013).

[6] Малай Н.В., Миронова Н.Н., Глушак А.В. *Решение краевой задачи для уравнения Навье–Стокса при обтекании нагретого сфероида газообразной средой*, Дифференц. уравнения **48** (6), 879–884 (2012).

[7] Бретшнайдер С. *Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета* (Химия, М.–Л., 1966).

[8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика сплошных сред* (ИТТЛ, М., 1954).

[9] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений* (Ин. лит., М., 1958).

Н.В. Малай

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия,

`e-mail:` malay@bsu.edu.ru

А.В. Глушак

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия,

`e-mail:` Glushak@bsu.edu.ru

А.В. Лиманская

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия,*

e-mail: limanskayaanna@mail.ru

N.V. Malai, A.V. Glushak, and A.V. Limanskaya

Investigation of boundary-value problem for slow flow of a sphere by viscous non-isothermal gas

Abstract. We obtain a solution of a boundary-value problem of a flow of spherical form particle for stationary system of equations of viscous non-isothermal gaseous medium including the Stokes equation, heat conductivity equation and state equation with account taken of dependence of viscosity, heat conductivity and density of gaseous medium of temperature.

Keywords: system of the equations of gas dynamics, the Stokes equation.

N.V. Malai

*Belgorod State National Research University,
85 Pobedy str., Belgorod, 308015 Russia,*

e-mail: malay@bsu.edu.ru

A.V. Glushak

*Belgorod State National Research University,
85 Pobedy str., Belgorod, 308015 Russia,*

e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

A.V. Limanskaya

*Belgorod State National Research University,
85 Pobedy str., Belgorod, 308015 Russia,*

e-mail: limanskayaanna@mail.ru