В. Б. Васильев, Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 160, 18–27

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 160 (2019). С. 18–27

УДК 517.96, 519.64

ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ: ДИСКРЕТНОЕ И НЕПРЕРЫВНОЕ

© 2019 г. **В. Б. ВАСИЛЬЕВ**

Аннотация. Рассматриваются дискретные псевдодифференциальные уравнения с эллиптическими символами и связанные с ними дискретные краевые задачи в специальных канонических областях многомерного пространства. Описана картина разрешимости таких уравнений и краевых задач в дискретных аналогах пространств Соболева—Слободецкого.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, дискретная краевая задача, эллиптический символ, дискретное уравнение, разрешимость.

OPERATORS AND EQUATIONS: DISCRETE AND CONTINUOUS

© 2019 **V. B. VASILYEV**

Abstract. We consider discrete pseudo-differential equations with elliptic symbols and corresponding discrete boundary-value problems in special canonical domains of multidimensional spaces. The solvability of such equations and boundary-value problems in discrete analogs of Sobolev–Slobodetsky spaces is examined.

Keywords and phrases: discrete pseudo-differential operator, discrete boundary-value problem, elliptic symbol, discrete equation, solvability.

AMS Subject Classification: 42B10, 45G05, 65R20

1. Введение. Теория псевдодифференциальных операторов и уравнений существуют уже более полувека, и некоторый парадокс заключается в том, что теория таких операторов и теория уравнений представляют собой два разных взгляда на, казалось бы, очень схожие объекты. Если в теории операторов основное внимание уделяется описанию классов символов, которые обеспечивают ограниченность псевдодифференциального оператора в подходящем функциональном пространстве, то в теории уравнений основное место занимает вопрос о разрешимости таких уравнений и качественном описании свойств его решений и, если это возможно, нахождение этого решения (хотя бы посредством приближенных методов).

Как выяснилось (см. [11, 12]), в теории псевдодифференциальных уравнений принципиальную роль играют такие дополнительные (топологические) характеристики символа, которые никак не влияют на ограниченность оператора, но полностью определяют картину разрешимости соответствующего псевдодифференциального уравнения. Более того, знание таких характеристик позволяет в так называемых канонических ситуациях явно описывать структуру общего решения или условия разрешимости. Последнее обстоятельство дает исследователю широкий выбор граничных условий, при выполнении которых теперь уже краевая задача для псевдодифференциального уравнения становится однозначно разрешимой.

Мы обсудим некоторые «дискретные» аспекты хорошо разработанной теории эллиптических псевдодифференциальных операторов и уравнений (см. [7, 8, 10, 11]), именно вопросы разрешимости их дискретных аналогов. По-видимому, для построения дискретных аппроксимаций при

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.7311.2017/БЧ).

решении псевдодифференциальных уравнений исследование этих вопросов будет одной из важных составляющих. Некоторые предварительные рассмотрения элементов этой теории приведены в [2, 12–16].

Следует также отметить, что в теории краевых задач для дифференциальных уравнений уже давно разработаны различные схемы дискретизации (см., например, [4, 6]). Нисколько не умаляя этих исследований, все-таки отметим, что методы очень специфичны и пригодны только для этих ситуаций.

2. Дискретные пространства и операторы. Будем использовать следующие обозначения. Пусть $\mathbb{T}^m$ — m-мерный куб $[-\pi,\pi]^m$, $h>0$, $\hbar=h^{-1}$. Мы рассматриваем функции, определенные на этом кубе, как периодические функции на $\mathbb{R}^m$ с таким основным кубом периодов.

Мы будем использовать термин «дискретная функция» для функций $u_d(\tilde{x})$ дискретной переменной $\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m$. Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi)\equiv\tilde{u}_d(\xi)=\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m}e^{-i\tilde{x}\cdot\xi}u_d(\tilde{x})h^m,\quad \xi\in\hbar\mathbb{T}^m;$$

если ряд сходится, функция $\tilde{u}_d(\xi)$ является периодической на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Такое дискретное преобразование Фурье сохраняет основные свойства интегрального преобразования Фурье, в частности, обратное дискретное преобразование Фурье дается формулой

$$(F_d^{-1}\tilde{u}_d)(\tilde{x})=\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m}e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}_d(\xi)d\xi,\quad \tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m.$$

Дискретное преобразование Фурье устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^m)$ и $L_2(\hbar\mathbb{T}^m)$ с нормами

$$\|u_d\|_2=\left(\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m}|u_d(\tilde{x})|^2h^m\right)^{1/2},\quad \|\tilde{u}_d\|_2=\left(\int\limits_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^m}|\tilde{u}_d(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2},$$

соответственно.

Пример 2.1. Поскольку в определении пространств Соболева—Слободецкого участвуют частные производные, будем использовать их дискретные аналоги, т.е. разделенные разности первого порядка

$$(\Delta_k^{(1)}u_d)(\tilde{x})=\frac{1}{h}\big(u_d(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_m)-u_d(x_1,\dots,x_k,\dots,x_m)\big),$$

для которых дискретное преобразование Фурье выглядит следующим образом:

$$(\widetilde{\Delta_k^{(1)}u_d})(\xi)=h^{-1}(e^{-ih\cdot\xi_k}-1)\tilde{u}_d(\xi).$$

Далее, для разделенной разности второго порядка имеем

$$(\Delta_k^{(2)}u_d)(\tilde{x})=$$
$$=\frac{1}{h^2}\Big(u_d(x_1,\dots,x_k+2h,\dots,x_m)-2u_d(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_m)+u_d(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_m)\Big),$$

для которой дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$(\widetilde{\Delta_k^{(2)}u_d})(\xi)=\frac{1}{h^2}\big(e^{-ih\cdot\xi_k}-1\big)^2\tilde{u}_d(\xi).$$

Таким образом, для дискретного лапласиана мы получим выражение

$$(\Delta_d u_d)(\tilde{x})=\sum_{k=1}^m(\Delta_k^{(2)}u_d)(\tilde{x}),$$

так что

$$(\widetilde{\Delta_d u_d})(\xi)=\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^m(e^{-ih\cdot\xi_k}-1)^2\tilde{u}_d(\xi).$$

Мы будем использовать дискретное преобразование Фурье для определения дискретных пространств Соболева—Слободецкого, которые очень удобны для изучения дискретных псевдодифференциальных уравнений. Введем обозначение

$$\zeta^2 = \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{m}(e^{-ih\cdot\xi_k}-1)^2.$$

Определение 2.1. *Пространство* $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ состоит из дискретных функций $u_d(\tilde{x})$, для которых следующая норма конечна:

$$\|u_d\|_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m}(1+|\zeta^2|)^s|\tilde{u}_d(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}$$

Далее, пусть $D\subset\mathbb{R}^m$ — область и $D_d = D\cap h\mathbb{Z}^m$ — дискретная область.

Определение 2.2. *Пространство* $H^s(D_d)$ состоит из дискретных функций пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$. Норма в пространстве $H^s(D_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. *Пространство* $H_0^s(D_d)$ состоит из дискретных функций u_d with с носителем в D_d, причем эти функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Норма в пространстве $H_0^s(D_d)$ задается формулой

$$\|u_d\|_s^+ = \inf\|\ell u_d\|_s,$$

где inf берется по всевозможным продолжениям ℓ.

Фурье-образ пространства $H^s(D_d)$ обозначим символом $\widetilde{H}^s(D_d)$.

Замечание 2.1. Подобные пространства были детально изучены в [2]. Конечно, введенные нормы будут эквивалентны L_2-норме, но константы эквивалентности будут зависеть от h. Отметим, что в наших дальнейших рассмотрениях все константы не зависят от h.

Пусть $\widetilde{A}_d(\xi)$ — периодическая функция на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Такие функции будем называть *символами*. Как принято, мы определим дискретный псевдодифференциальный оператор посредством его символа.

Определение 2.3. *Дискретным псевдодифференциальным оператором* A_d в дискретной области D_d называется оператор следующего вида:

$$(A_du_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m}\widetilde{A}_d(\xi)e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi}\tilde{u}_d(\xi)d\xi,\quad \tilde{x}\in D_d.$$

Оператор A_d называется *эллиптическим*, если

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^m}|\widetilde{A}_d(\xi)|>0.$$

Замечание 2.2. Можно ввести символ $\widetilde{A}_d(\tilde{x},\xi)$, зависящий от пространственной переменной $\tilde{x}$, и определить общий дискретный псевдодифференциальный оператор формулой

$$(A_du_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m}\widetilde{A}_d(\tilde{x},\xi)e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi}\tilde{u}_d(\xi)d\xi,\quad \tilde{x}\in D_d.$$

Для исследования последних операторов и связанных с ними уравнений потребуется довольно тонкая и сложная техника.

Определение 2.4. Класс E_α состоит из символов, удовлетворяющих следующему условию:

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}\leqslant|A_d(\xi)|\leqslant c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \tag{1}$$

с положительными постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *порядком* дискретного псевдодифференциального оператора A_d. Грубо говоря, порядок дискретного псевдодифференциального оператора — это степень h, взятая со знаком минус.

С учетом последнего определения легко доказать следующее свойство.

Лемма 2.1. *Дискретный псевдодифференциальный оператор $A_d \in E_\alpha$ является линейным ограниченным оператором $H^s(h\mathbb{Z}^m) \to H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^m)$ с нормой, не зависящей от h.*

3. Дискретные псевдодифференциальные уравнения. С оператором A_d мы свяжем уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \tag{2}$$

которое в этом разделе будет рассмотрено только для случая полупространства

$$D = \mathbb{R}^m_+ \equiv \Big\{ x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \ldots, x_m),\ x_m > 0 \Big\}.$$

3.1. Периодическая факторизация. Введем обозначение

$$\Pi_\pm = \Big\{ \big(\xi', \xi_m \pm i\tau\big),\ \tau > 0 \Big\}, \quad \xi = (\xi', \xi_m) \in \mathbb{T}^m.$$

Определение 3.1. *Периодической факторизацией* эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полуполосы $\hbar\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ и удовлетворяют оценкам

$$\big|A^{\pm1}_{d,+}(\xi)\big| \leqslant c_1 \big(1 + |\hat{\zeta}^2|\big)^{\pm\varkappa/2}, \quad \big|A^{\pm1}_{d,-}(\xi)\big| \leqslant c_2 \big(1 + |\hat{\zeta}^2|\big)^{\pm(\alpha-\varkappa)/2}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_m + i\tau)} - 1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_\pm.$$

Число $\varkappa \in \mathbb{R}$ называется *индексом* периодической факторизации.

В некоторых простых случаях можно использовать топологическую формулу

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} d \arg A_d(\cdot, \xi_m),$$

где $A_d(\cdot, \xi_m)$ означает, что $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ фиксировано, а интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Другими словами, нужно вычислить поделенное на 2π приращение аргумента символа $A_d(\xi)$, когда ξ_m меняется от $-\hbar\pi$ до $\hbar\pi$ при фиксированном ξ'.

Теорема 3.1. *Если эллиптический символ $\tilde{A}_d(\xi) \in E_\alpha$ допускает периодическую факторизацию с индексом $\varkappa$, так что $|\varkappa - s| < 1/2$, то уравнение (2) имеет единственное решение в пространстве $H^s(D_d)$ для любой правой части $v_d \in H_0^{s-\alpha}(D_d)$,*

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) P^{\mathrm{per}}_{\xi'} (\tilde{A}^{-1}_{d,-}(\xi) \widetilde{\ell v_d}(\xi)),$$

$$\big(P^{\mathrm{per}}_{\xi'} \tilde{u}_d\big)(\xi) \equiv \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_d(\xi) + \frac{1}{2\pi i} \,\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi', \eta_m) \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_m - \eta_m)}{2} d\eta_m \right).$$

Замечание 3.1. Нетрудно заключить, что решение не зависит от выбора продолжения ℓv_d.

Теорема 3.2. *Пусть $\varkappa - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$. Тогда общее решение уравнения (2) в образах Фурье имеет следующий вид:*

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) X_n(\xi) P^{\mathrm{per}}_{\xi'} \Big(X_n^{-1}(\xi) \tilde{A}^{-1}_{d,-}(\xi) \widetilde{\ell v_d}(\xi) \Big) + \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\xi') \hat{\zeta}^k_m,$$

где $X_n(\xi)$ — произвольный многочлен степени n переменных

$$\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1), \quad k = 1, \dots, m,$$

удовлетворяющий условию (1), $c_j(\xi')$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, — произвольные функции из $H_{s_j}(h\mathbb{T}^{m-1})$, $s_j = s - \varkappa + j - 1/2$.

3.2. Дискретные краевые задачи. Как видно из теоремы 3.2, решение уравнения (2) не единственно, и, чтобы получить единственное решение, следует добавить к уравнению дополнительные условия для определения произвольных функций $c_k(\xi')$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Для простоты рассмотрим однородное уравнение (2), хотя все результаты легко распространить на неоднородное уравнение.

Рассмотрим следующие граничные условия:

$$(B_j u_d)(\tilde{x}', 0) = b_j(\tilde{x}'), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3}$$

где $B_{d,j}$ — дискретный псевдодифференциальный оператор порядка $\alpha_j \in \mathbb{R}$ с символами $\widetilde{B}_j(\xi) \in C(\hbar\mathbb{T}^m)$:

$$(B_{d,j} u_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^m} e^{i\xi\cdot(\tilde{x}-\tilde{y})} \widetilde{B}_j(\xi) \tilde{u}_d(\xi) d\xi.$$

Можно переписать граничные условия (3) в образах Фурье:

$$\int\limits_{-h^{-1}\pi}^{h^{-1}\pi} \widetilde{B}_j(\xi', \xi_m) \tilde{u}_d(\xi', \xi_m) d\xi_m = \tilde{b}_j(\xi'), \quad j = 0, 1. \dots, n-1,$$

так что с учетом леммы 2.1 и «следовых» свойств дискретных пространств H^s (см. [9]) нужно потребовать, чтобы $b_j(\tilde{x}') \in H^{s-\alpha_j-1/2}(h\mathbf{Z}^{m-1})$.

Введем обозначение

$$s_{jk}(\xi') = \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) \widetilde{B}_j(\xi', \xi_m) \hat{\zeta}^k_m d\xi_m.$$

Теорема 3.3. *Если $\varkappa - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$, то дискретная краевая задача (2), (3) имеет единственное решение в пространстве $H^s(D_d)$ для произвольных граничных функций $b_j \in H^{s-\alpha_j-1/2}(h\mathbf{Z}^{m-1})$, $j = 0, \dots, n-1$, тогда и только тогда, когда*

$$\det(s_{kj}(\xi'))^{\varkappa}_{k,j=0} \neq 0 \quad \forall \xi' \in \mathbb{T}^{m-1}.$$

Имеет место априорная оценка

$$\|u_d\|_s \leqslant c \sum_{j=0}^{n-1} [b_j]_{s-\alpha_j-1/2},$$

где постоянная c не зависит от h, а $[\cdot]_s$ обозначает H^s-норму в дискретном пространстве $H^s(h\mathbb{Z}^{m-1})$.

3.3. Представление решения. Рассмотрим оставшийся случай $\varkappa - s = -n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$.

Лемма 3.1. *Имеется единственный набор функций $c_j(\xi') \in H^{s_j}(\hbar\mathbb{T}^{m-1})$, $s_j = s - \varkappa + j + 1/2$, $j = 0, 1, \dots, n$, для которых справедливо следующее представление:*

$$\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \operatorname{ctg} \frac{h(\eta_m - \xi_m)}{2} g(\xi', \eta_m) d\eta_m = \sum_{j=0}^{n} c_j(\xi')(e^{ih\xi_m} - 1)^{-j} +$$
$$+ (e^{ih\xi_m} - 1)^{-n} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \operatorname{ctg} \frac{h(\eta_m - \xi_m)}{2} g(\xi', \eta_m)(e^{ih\eta_m} - 1)^n d\eta_m,$$

где

$$c_j(\xi') = ih \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (e^{ih\xi_m} - 1)^j g(\xi', \xi_m) d\xi_m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

для всех $g(\xi', \xi_m) \in H^{-n-\delta}(\hbar\mathbb{T}^m)$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$.

Теорема 3.4. *Пусть $\varkappa - s = -n + \delta$, $|\delta| < 1/2$. Уравнение (2) имеет решение в дискретном пространстве $H^s(D_d)$ тогда и только тогда, когда*

$$c_j(\xi') = 0 \quad \text{для почти всех } \xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \tag{4}$$

Замечание 3.2. Условия (4) можно записать в терминах исходного пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Удобно использовать оператор разделенной разности $\Delta_j^{(1)} : H^s(h\mathbb{Z}^m) \to H^{s-1}(h\mathbb{Z}^m)$, введенный выше, и его преобразование Фурье

$$\tilde{\Delta}_j^{(1)} : \tilde{u}_d(\xi) \longmapsto \frac{e^{-ih\xi_j} - 1}{h} \tilde{u}_d(\xi), \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^m.$$

Имеется простая связь между дискретным преобразованием Фурье и оператором сужения на дискретную гиперплоскость. Если рассмотреть оператор сужения на дискретную гиперплоскость $\tilde{x}_m = 0$, т.е. на $\mathbb{Z}^{m-1}$, то, в соответствии со свойствами обратного преобразования Фурье, получим

$$u_d(\tilde{x}', \tilde{x}_m) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x}'\cdot\xi'} e^{i\tilde{x}_m\cdot\xi_m} \tilde{u}_d(\xi', \xi_m) d\xi' d\xi_m;$$

следовательно,

$$u_d(\tilde{x}', 0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x}'\cdot\xi'} \tilde{u}_d(\xi', \xi_m) d\xi' d\xi_m = \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^{m-1}} e^{i\tilde{x}'\cdot\xi'} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi', \xi_m) d\xi_m \right) d\xi'.$$

Отсюда выводим, что сужение на гиперплоскость соответствует интегрированию преобразования Фурье по последней переменной. С учетом определения дискретного псевдодифференциального оператора в $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ мы можем условия (4) записать в виде

$$(\Delta_m^{(j)} A_{d,-}^{-1}(\ell v_d))(\tilde{x}', 0) = 0 \quad \forall \tilde{x}' \in h\mathbb{Z}^{m-1}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \tag{5}$$

где $A_{d,-}^{-1}$ — дискретный псевдодифференциальный оператор с символом $A_{d,-}^{-1}(\xi)$.

3.4. Дискретные задачи с кограничными операторами. С учетом леммы 3.1 и теоремы 3.4 можно рассматривать уравнения более общего вида, нежели (2), например, уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + \sum_{j=0}^{n} K_j \left(\tilde{b}_j(\tilde{x}') \otimes \delta(\tilde{x}_m) \right) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \tag{6}$$

с неизвестными функциями u_d, $\tilde{b}_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, а K_j — заданные псевдодифференциальные операторы с символами $K_j(\xi) \in E_{\alpha_j}$.

Замечание 3.3. Будем называть операторы K_j *кограничными*, поскольку они действуют следующим образом. Обозначив через $\hat{K}_j(\tilde{x})$ «ядро» псевдодифференциального оператора K_j, получим

$$K_j\left(\tilde{b}_j(\tilde{x}')\otimes\delta(\tilde{x}_m)\right)=\sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^{m-1}}\hat{K}_j(\tilde{x}'-\tilde{y}',\tilde{x}_m)b_j(\tilde{y}')h^{m-1}.$$

По-видимому, термин «оператор типа потенциала» также вполне приемлем.

Продолжив правую часть уравнения на все $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^m)$ (обозначим это продолжение через ℓv_d) и применив дискретное преобразование Фурье, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{n}t_{kj}(\xi')\tilde{b}_j(\xi')=f_k(\xi'),\quad k=0,1,\ldots,n,$$

где

$$t_{kj}(\xi')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\left(\frac{e^{ih\xi_m}-1}{h}\right)^k\frac{K_j(\xi',\xi_m)}{A_{d,-}(\xi',\xi_m)}d\xi_m,$$

$$f_k(\xi')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\left(\frac{e^{ih\xi_m}-1}{h}\right)^k A_{d,-}^{-1}(\xi',\xi_m)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi',\xi_m)d\xi_m.$$

Теорема 3.5. *Пусть $\varkappa-s=-n+\delta$, $n\in\mathbb{N}$, $|\delta|<1/2$. Уравнение (6) имеет единственное решение $u_d\in H^s(D_d)$, $c_j\in H^{s_j}(h\mathbb{Z}^{m-1})$, $s_j=s-\alpha+\alpha_j+1/2$, $j=0,1,\ldots,n$, тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\xi'\in h\mathbb{T}^{m-1}}|\det(t_{kj}(\xi'))_{k,j=0}^n>0.$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_s\leqslant a\|v_d\|_{s-\alpha}^+,\quad \|b_j\|_{s_j}\leqslant a_j\|v_d\|_{s-\alpha}^+,\quad j=0,1,\ldots,n,$$

причем постоянные $a,a_1,\ldots,a_n$, не зависящими от h.

4. Дискретные конусы и комплексные переменные. В этом разделе в качестве области D рассматривается острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^m$, не содержащий целой прямой.

Обозначим через P_{D_d} оператор сужения на D_d, $P_{D_d}:L_2(h\mathbb{Z}^m)\to L_2(D_d)$, так что для произвольной функции $u_d\in L_2(h\mathbb{Z}^m)$ имеем

$$(P_{D_d}u_d)(\tilde{x})=\begin{cases}u_d(\tilde{x}), & \text{если } \tilde{x}\in D_d,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

4.1. Полупространство и периодическое ядро Коши. Если выбрать в качестве D полупространство, то фурье-образ оператора P_{D_d} вычисляется (см. [13,14]); в качестве иллюстрации мы приведем следующий пример.

Пример 4.1. Если $D=\mathbb{R}^m_+$, то

$$(F_dP_{D_d}u_d)(\xi',\xi_m)=\frac{1}{4\pi i}\lim_{\tau\to0+}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}u_d(\xi',\eta_m)\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_m-\eta_m+i\tau)}{2}d\eta_m.$$

Собственно, это свойство использовалось в предыдущих разделах. Именно, мы использовали теорию одномерной периодической краевой задачи Римана с параметром $\xi'\in\hbar\mathbb{T}^{m-1}$, которая формулируется так: найти пару функций $\Phi^{\pm}(\xi',\xi_m)$, являющихся граничными значениями аналитических в полуполосах $\hbar\Pi_{\pm}$, $\Pi_{\pm}=\{z\in\mathbb{C}:z=\xi_m\pm i\tau,\ \tau>0\}$ функций, связанных линейным соотношением

$$\Phi^+(\xi)(\xi',\xi_m)=G(\xi',\xi_m)\Phi^-(\xi)(\xi',\xi_m)+g(\xi),\quad \xi\in\hbar\mathbb{T}^m,$$

для почти всех $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$, где $G(\xi), g(\xi)$ — заданные периодические функции. Задача выглядит почти как классическая.

4.2. Конус и периодическое ядро Бохнера. Пусть D — острый выпуклый конус, не содержащий целой прямой, и D^* — сопряженный конус, т.е.

$$D^* = \{x \in \mathbb{R}^m : x \cdot y > 0,\ y \in D\}.$$

Обозначим через $T(D^*) \subset \mathbb{C}^m$ множество вида $\hbar\mathbb{T}^m + iD^*$. В случае $\hbar\mathbb{T}^m \equiv \mathbb{R}^m$ (это соответствует случаю $h \to 0$) такое множество называется *многомерной трубчатой областью над конусом* D^* (см. [1,3,12]). Введем функцию

$$B_d(z) = \sum_{\tilde{x} \in D_d} e^{i\tilde{x}\cdot z}, \quad z = \xi + i\tau, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^m, \quad \tau \in D^*,$$

и определим оператор

$$(B_d u)(\xi) = \lim_{\tau \to 0} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} B_d(z - \eta) u_d(\eta) d\eta.$$

Лемма 4.1. *Для произвольной функции $u_d \in L_2(h\mathbb{Z}^m)$ справедливо равенство*

$$F_d P_{D_d} u_d = B_d F_d u_d.$$

Далее определим подпространство $A(\hbar\mathbb{T}^m) \subset L_2(\hbar\mathbb{T}^m)$, состоящее из функций, допускающих аналитическое продолжение в $T(D^*)$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{\tau \in D^*} \int\limits_{\mathbb{T}^m} \left|\tilde{u}_d(\xi + i\tau)\right|^2 d\xi < +\infty.$$

Попросту говоря, пространство $A(\hbar\mathbb{T}^m) \subset L_2(\hbar\mathbb{T}^m)$ — это подпространство граничных значений аналитических в $T(D^*)$ функций.

Введем обозначение

$$B(\hbar\mathbb{T}^m) = L_2(\hbar\mathbb{T}^m) \ominus A(\hbar\mathbb{T}^m),$$

так что $B(\hbar\mathbb{T}^m)$ — это прямое (и ортогональное) дополнение подпространства $A(\hbar\mathbb{T}^m)$ в $L_2(\hbar\mathbb{T}^m)$.

Задачу скачка можно сформулировать так: найти пару таких функций $\Phi^\pm$, $\Phi^+ \in A(\hbar\mathbb{T}^m)$, $\Phi^- \in B(\hbar\mathbb{T}^m)$, что

$$\Phi^+(\xi) - \Phi^-(\xi) = g(\xi), \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^m, \tag{7}$$

где $g(\xi) \in L_2(\hbar\mathbb{T}^m)$ — заданная функция.

Лемма 4.2. *Оператор $B_d : L_2(\hbar\mathbb{T}^m) \to A(\hbar\mathbb{T}^m)$ является проектором. Кроме того, $u_d \in L_2(D_d)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{u}_d \in A(\hbar\mathbb{T}^m)$.*

Теорема 4.1. *Задача скачка (7) однозначно разрешима для любой правой части из $L_2(\hbar\mathbb{T}^m)$.*

Пример 4.2. Если $m = 2$ и D — первый квадрант на плоскости, то решение задачи скачка дается формулами

$$\Phi^+(\xi) = \frac{1}{(4\pi i)^2} \lim_{\tau \to 0} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_1 + i\tau_1 - t_1)}{2} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_2 + i\tau_2 - t_2)}{2} g(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$\Phi^-(\xi) = \Phi^+(\xi) - g(\xi), \quad \tau = (\tau_1, \tau_2) \in D.$$

Рассмотрим многомерную периодическую задачу Римана в следующей формулировке: найти пару таких функций $\Phi^\pm$, $\Phi^+ \in A(\hbar\mathbb{T}^m)$, $\Phi^- \in B(\hbar\mathbb{T}^m)$, что

$$\Phi^+(\xi) = G(\xi)\Phi^-(\xi) + g(\xi), \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^m, \tag{8}$$

где $G(\xi)$, $g(\xi)$ — заданные периодические функции. Если $G(\xi) \equiv 1$, возвращаемся к задаче скачка (7).

Как и в классическом случае, нам потребуется специальное представление для периодического эллиптического символа для того, чтобы получить решение задачи (8).

Обозначим через $H^s(D_d)$ подпространство пространства $H^s(\mathbb{Z}^m)$, состоящее из функций дискретного аргумента $\tilde{x}$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$, а через $\widetilde{H}^s(D_d)$ и $\widetilde{H}^s(\mathbb{Z}^m)$ обозначим фурье-образы соответствующих пространств.

Лемма 4.3. *При $|s| < 1/2$ оператор $B_d : \widetilde{H}^s(\mathbb{Z}^m) \to \widetilde{H}^s(D_d)$ является проектором, и задача скачка имеет единственное решение $\Phi^+ \in \widetilde{H}^s(D_d)$, $\Phi^- \in \widetilde{H}^s(\mathbb{Z}^m \setminus D_d)$ для произвольной $g \in \widetilde{H}^s(\mathbb{Z}^m)$.*

Определение 4.1. *Периодической волновой факторизацией* эллиптического символа $A_d(\xi)$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = \tilde{A}_{\neq}(\xi)\tilde{A}_{=}(\xi),$$

где сомножители $A^{\pm 1}_{\neq}(\xi)$, $A^{\pm 1}_{=}(\xi)$ допускают ограниченное аналитическое продолжение в области $T(\pm D^*)$.

Теорема 4.2. *Если $|s| < 1/2$ и эллиптический символ $A_d(\xi) \in E_\alpha$ допускает периодическую волновую факторизацию, то оператор A_d обратим в пространстве $H^s(D_d)$.*

Замечание 4.1. Определение 4.1 периодической волновой факторизации соответствует нулевому индексу периодической волновой факторизации. Конечно, это понятие требует расширения в контексте [12] и с учетом результатов предыдущего раздела.

Последние рассмотрения могут оказаться полезными при постановке граничных задач для дискретных эллиптических псевдодифференциальных уравнений в канонических негладких областях. Такие граничные задачи будут возникать в тех случаях, когда, грубо говоря, индекс периодической волновой факторизации ненулевой. Мы надеемся также установить определенное соответствие между дискретным и непрерывным случаями (см. [12]) и описать предельный переход от дискретного к непрерывному.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бохнер С., Мартин У. Т.* Функции многих комплексных переменных. — М.: ИЛ, 1951.
2. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: УРСС, 2010.
3. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. — М.: Наука, 1964.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1971.
5. *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1986.
6. *Рябенький В. С.* Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. — М.: Наука, 1987.
7. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1985.
8. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.
9. *Франк Л. С.* Пространства сеточных функций// Мат. сб. — 1971. — *86*, № 2. — С. 187–233.
10. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1–4. — М.: Мир, 1986–1988.
11. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
12. *Vasil'ev V. B.* Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary-Value Problems in Nonsmooth Domains. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic, 2000.
13. *Vasilyev V. B.* Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization// in: Integral Methods in Science and Engineering. V. 1. Theoretical Technique (Constanda C., Dalla Riva M., Lamberti P. D., Musolino P., eds.). — Birkhäuser, 2017. — P. 315–324.
14. *Vasilyev V. B.* The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators// AIP Conf. Proc. — 2017. — *1863.* — 140014.

15. *Vasilyev V. B.* On discrete boundary-value problems// AIP Conf. Proc. — 2017. — *1880.* — 050010.
16. *Vasilyev V. B.* Discrete operators in canonical domains// WSEAS Trans. Math. — 2017. — *16.* — P. 197–201.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород
E-mail: vbv57@inbox.ru; vladimir.b.vasilyev@gmail.com