ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙНАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ»

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование, профиль Математика и информатика
очной формы обучения, группы 02041303
Павличенко Алены Сергеевны

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент
Мотькина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Еще совсем недавно, каких-то 10-15 лет назад, задачи с параметрами встречались на вступительных экзаменах в вузах с самым высоким уровнем математики. Сейчас это уже элемент единого государственного экзамена. Хотя на ЕГЭ встречается всего одно задание с параметром, но те школьники которые хотят получить высший балл по ЕГЭ, должны уметь их решать.

По задачам с параметрами уже вышел ряд книг и пособий. Но большинство из них предполагают наличие у школьников высокой математической культуры, а также значительного объема математических фактов, которые в школе изучаются весьма поверхностно или совсем не изучаются. Поэтому школьникам обычных школ зачастую эти книги недоступны для понимания.

Актуальность исследования. Теоретическое изучение и математическое моделирование многообразных процессов из различных областей науки и практической деятельности человека часто приводят к достаточно сложным уравнениям, неравенствам или их системам, содержащих параметры. В связи с чем возрастает важность умения решать задачи с параметрами.

Для получения высокой оценки на конкурсном экзамене по математике, при поступлении в вуз, необходимо умение решать задачи с параметрами. При решении задач с параметрами важно установить, при каких значениях задача имеет решения, и найти эти решения в зависимости от значений параметра, т.е. решение подобного типа задач должно сопровождаться исследовательской работой.

Однако школьной программой задачи с параметрами никак не учтены как отдельная тема.

Можно отметить, что обучению решению задач с параметрами не должно быть сложным дополнением к основному изучаемому материалу, который может быть освоен только талантливыми детьми. Этот процесс может и должен использоваться в общеобразовательной школе, что обогатит обучение новыми методами и идеями, а также поможет учащимся развить свое мышление.

В связи с вышесказанным является актуальным создание элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами».

Элективные курсы не являются принципиально новым образовательным компонентом, как по содержанию, так и по форме обучения.

Методику организации элективных занятий по математике изучали такие ученые, как З.И. Слепкань, А.П. Александров, Н.Я. Виленкин, А.А. Дорофеев, А.Г. Мордкович, З.А.Скопец, А.В.Суворов, Н.А. Тарасенкова, В.В. Фирсов, О.С. Чашечников, Е.В. Семенихина и др. [20,23].

Цель исследования: теоретическое обоснование и разработка элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами» в профильном обучении на старшей ступени общеобразовательной школы.

Объект исследования: элективные курсы.

Предмет исследования: конструирование содержания элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами» в профильном обучении.

База исследования: МОУ «Бессоновская СОШ», с.Бессоновка, Белгородского района, 11 класс.

Для достижения поставленной цели были определены следующие **задачи исследования**:

- рассмотреть понятие элективные курсы их типы, задачи, функции;
- рассмотреть понятие профильное обучение как одно из направлений модернизации современного образования
- разработать методические положения по проведению элективного курса по математике;
- проанализировать программу и основные учебники, предусмотренные Федеральным перечнем учебников по математике для 5-11

классов, с точки зрения наличия материала по теме: «Уравнения и неравенства с параметрами»;

- разработать элективный курс по математике «Уравнения и неравенства с параметрами»;
- апробировать технологию конструирования содержания элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами» по математике в профильном обучении;
- проанализировать результаты выполнения заданий, предоставленных школьникам.

Структура работы: введение, две главы, заключение, список использованной литературы, приложения.

В первой главе представлен аналитический обзор литературы по проблеме исследования; выявлена сущность понятия «элективные курсы», обозначены задачи элективного курса обучения. Рассмотрено понятие «профильное обучение» как этап модернизации современного образования. Определены функции элективных курсов в преподавании в профильном обучении на старшей ступени общеобразовательной школы.

Во второй главе представлен анализ перечня школьных учебников по математике 5 - 11 класс; разработан элективный курс по теме «Уравнения и неравенства с параметрами», согласно требованиям разработки элективных курсов; представлены и описаны уроки с подробным описанием необходимой теории и разбором каждого примера, а также результаты апробации методических материалов по данному элективному курсу.

1. Теоретические основы построения элективного курса на старшей ступени обучения

1.1 Профильное обучение как одно из направлений модернизации современного образования

Постоянные изменения в системе образования связанны с модернизацией обучения, в которой основным направлением выступает профилизация.

Профильное обучение - система разделения и индивидуализирования образования, которое основывается на преобразованиях в структуре, содержании и организации образовательного процесса исходя из интересов, склонностей и способностей учащихся, создавая необходимые условия для их дальнейшего обучения [3].

Профильное образование является одним из приоритетных направлений достижения нового качества современного образования, т.е. самостоятельному и осознанному освоению, конструированию, «выращиванию» нового знания, обретению нового социального значимого опыта, что предполагает создание развивающей среды реализации индивидуальных образовательных программ.

Главной целью введения профильных классов на старшей ступени школы является приближение среднего общего и профессионального обучения. Учащиеся должны осознанно выбирать профиль для дальнейшего обучения еще в школе, чтобы дальше продолжать свою профессиональную подготовку. Так же можно выделить еще несколько основополагающих целей профильного обучения:

1) Обеспечить учащимся углубленное изучение отдельных дисциплин полной общеобразовательной программы;

2) Сформировать требования для дифференциации содержания преподавания старшеклассников с обширными и гибкими возможностями

для обучения школьников по индивидуальным образовательным программам;

3) Содействовать установлению равного доступа к полноценному образованию разным категориям учащихся в соответствии с их способностями, индивидуальными наклонностями и потребностями;

4) Расширять возможности для социализации школьников, обеспечивать непрерывность между общим и профессиональным образованием, в том числе более эффективно готовить выпускников школ для овладения программами высшего профессионального образования.

Берем во внимание тот факт, что профильное образование способствует развитию индивидуальных навыков в выбранном направлении, тогда главными задачами системы профильного образования в средней школе будут являться следующие[2]:

- развивать навыки самостоятельной познавательной деятельности;
- подготовить учеников для решения задач разного уровня сложности;
- сориентировать школьников в широком кругу проблем, связанных с той или иной сферой деятельности;
- выработать у обучающихся мышление, которое позволяет не пассивно потреблять данные, а критически и творчески перерабатывать их;
- сделать обучающихся конкурентоспособными в плане поступления в избранные ими университеты.

Гибкость системы профильного образования зарекомендовала себя прежде всего за счет возможности комбинаций учебных курсов на старшей ступени образования, предусматривающее в себе возможности обязательного включения типов учебных курсов, таковыми являются базовые, профильные и элективные курсы.

Основные общеобразовательные курсы являются обязательными для всех учащихся во всех профилях обучения.

Профильные курсы - это повышенного уровня курсы, которые определяют направленность каждого конкретного профиля обучения.

На основе базового общего образования и базовых профильных курсов проводятся единые государственные экзамены.

В каждой системе имеются сбои, на каком-либо определенном этапе процесса. В профильном обучении таковым является ошибочный выбор учащимися дальнейшего направления собственной подготовки обучения, поэтому проблему профессионального самоопределения принято возлагать на плечи учащихся только в старших классах, способных самостоятельно сделать основополагающий шаг на пути к высшему образованию. Специализированная система подготовки позволяет расширить возможность обоснованного выбора учащихся, предоставляя старшеклассникам разновидность вариантов, выражающаяся в углубленном изучении гуманитарного или физико-математического направления.

А самой главной проблемой, возникающей при введение профильного образование заключена в организации обучения, а именно в вопросах, связанных с определением структуры, модели организации обучения и направлений профилирования. Это связанно непосредственно с осуществлением профильного обучения требующая относительного сокращения учебного материала непрофилирующих предметов, которые в свою очередь являются основной целью окончания базовой образовательной подготовки обучающихся.

На сегодняшний день существует глобальный разрыв между общим и профессиональным образованием. Устранение данной проблемы, возможно за счет введения профильного образования, способствующего заметно его уменьшить.

Непрерывность между школой и институтом заметно сказывается на дальнейшем образовательном процессе учащихся. Для поступления в интересующийся вуз с целью получения выбранной профессии обучающимся приходится сталкиваться с такими проблемами как непонимание определенных аспектов необходимого учебного материала того или иного предмета. Решением этой проблемы можно считать посещение платных образовательных курсов: например занятия с репетитором. Несомненно, такие методы решения сложившейся ситуации актуальны в школьном образовании, но если изначально изменить структуру построенного на обучении непрофильной подготовки, то свои результаты от перехода систем будут выявлена на более качественных уровнях.

Введение профильной системы позволит наиболее полно реализовать запросы общества и отдельного человека, для того чтобы подготовить школьника не просто к поступлению в вуз, а к жизни как научной, так и профессиональной, потому что, профильное обучение - система специализированной подготовки старшеклассников, направленная на то, чтобы сделать процесс их обучения на последней ступени общеобразовательной школы более индивидуализированным, отвечающим реальным запросам, способная обеспечить осознанный выбор старшеклассниками своей профессиональной деятельности.

1.2 Элективные курсы в системе профильного обучения.

Каждый элемент образовательной системы играют важную роль в структуре общеобразовательных учреждений. Элективные курсы являются неотъемлемой частью в профильном образовании на высшем уровне.

Для учащихся старших классов посещение элективных курсов являются обязательными по сравнение с факультативными. Они являются инструментом построение различных образовательных программ и главным образом связаны с выбором каждого школьника.

Структура элективных курсов составляет объединение образовательных заинтересованностей, потребностей и предрасположенностей каждого индивидуума, позволяет выявить сильные стороны развития и интересов, способностей и планов в жизни.

Элективные курсы реализуются за счет компонента учебного заведения (школьного компонента) и выполняют три основные функции [9, с.4]:

1) Некоторые из них могут выступать в качестве «надстройки», дополняя содержание профиля. В этом случае такой дополнительный курс профиля становится полностью углубленным, а школа (класс), в которой она изучается, превращается в традиционную специальную школу с углубленным изучением отдельных предметов.

2) Другой тип элективных курсов может развить содержание одного из основных курсов, изучение которого в этой школе (классе) осуществляется на минимальном общем уровне образования. Это позволяет заинтересованным учащимся удовлетворять свои познавательные потребности и получать дополнительное обучение, например, для прохождения ЕГЭ по предмету на уровне профиля.

3) Третий тип элективных курсов направлен на удовлетворение когнитивных интересов школьников в области человеческой деятельности, как бы выходящих за пределы их выбранного профиля. Например, это вполне естественно для ситуации, когда учащийся, изучающий гуманитарные классы, интересуется курсом «Уравнения и неравенства с параметрами».

Можно сказать, элективные курсы являются связующим объектом дополняющие основные и специализированные курсы. Главная предметная функция которых направлена на развитие навыков и методов деятельности связанных с решением практических задач, а также получения дополнительных знаний, объединяющие в единую научную картину мира.

В. А. Орлов выделяет следующие типы элективных курсов [17, с.93-96]:

I. Тематические курсы, задачей которых является углубление и расширение знаний по предметам, включенных в базовую учебную программу.

II. Междисциплинарные элективные курсы, целью которых является интеграция знаний учащихся о природе и обществе.

III. Элективные курсы по предметам, не включенным в базовую учебную программу.

Так же элективные курсы способствуют решению комплекса задач, наиболее важными среди которых являются [10]:

- получение объективной и всесторонней информации о профессии и ее индивидуальная субъективная оценка в процессе «преломления» этой информации в сознании каждого школьника;

- профессиональная проба, целью которой является соотнесение своих возможностей и потребностей с требованиями и перспективами овладения данной профессией;

- формирование устойчивого профессионального интереса, являющегося закономерным результатом развития первичного познавательного интереса в процессе профессионально ориентированной деятельности;

- развитие профессионально важных качеств и приобретение комплекса специальных знаний, умений и навыков, позволяющих решать определенный круг задач из данной профессиональной области;

- социализация личности, включающая в себя этический и эстетический компоненты, направленные на формирование ценностных ориентаций, личной ответственности, отношения к процессу и результатам труда.

Эти задачи тесно связаны между собой и могут быть решены только в рамках единой системы, основной целью которой являются помощь старшекласснику в профессиональном самоопределении.

Определение содержания образования в рамках элективных курсов необходимо учитывать следующие требования [24, с.76]:

1) Достаточность отображаемого учебного контента для реализации поставленных целей;

2) Возможность усвоения учащимися отображаемого содержания обучения в этих конкретных условиях.

3) Избыточность (их должно быть много).

4) Кратковременность (6-16 часов).

5) Оригинальность содержания, названия.

6) Курс должен заканчиваться определенным результатом (творческое сочинение, проект и др.).

7) Нестандартность.

8) Элективные курсы, как правило, носят авторский характер.

Проведение элективных курсов полностью зависят от выделяемого времени учебного заведения. Каждому ученику необходимо выбрать как минимум один элективный курс для обязательного посещения из предложенного учреждением перечня.

Программы элективных курсов позволяют школьникам попробовать, оценить их потребности и возможности, сделать осознанный выбор профиля образования в старшей школе. Они содержат знания, которые не встречаются в основных программах, но которые вызывают когнитивный интерес учащихся и ценят их личное развитие, самоопределение, формирование теоретического или эмпирического мышления.

Необходимо учитывать, что элективные курсы в школьном образовании, представлены не только в виде программы и учебного пособия, но и отвечают за весь курс в целом как представители методологической системы обучения.

В образце учебных планов отдельных профилей за время, выделенного на элективные курсы, предусмотрены часы в 10-11 классах для организации учебной практики, проектов, исследовательской деятельности. Применение новых методов обучения является важным и неотъемлемым фактором успешного проведения занятий на элективных курсах.

Высокий уровень математического преподавания является основой для элективного курса. Специализированные вузовские дисциплины готовят к определённой профессии. Ознакомление с их основами в самых общих чертах с помощью математики позволит придать процессу обучения в рамках элективного курса конкретную профессиональную направленность, ориентацию на сравнительно узкую сферу профессиональной деятельности. Влияние этой связи определяет возможное включение в процесс обучения некоторых университетских форм: лекции, семинары, лабораторные занятия [24, с.43].

Получается, что элективные курсы формируют и развивают разнообразные интересы у учащихся, математическую культуру мышления, самостоятельность восполнения знаний, приобщение к исследовательской работе, знакомству с передовыми достижениями науки. А еще раскрывают внутренний потенциал школьников, формируя условия для их самореализации и развития. Элективные курсы успешно учитывают индивидуализацию каждого учащегося, беря во внимание их способности, удовлетворяя их познавательные и жизненные интересы.

1.3 Принципы к отбору содержания обучения в рамках элективного курса

Отбор содержания любого элективного курса должен удовлетворять некоторым педагогическим принципам. С помощью описанных ниже принципов построения содержания элективного курса возможно более полное и детальное описание сущности целей и задач образовательного процесса курса, отбор эффективных форм и методов обучения, а также средств анализа и контроля, то есть проектирования организационно-методического обеспечения курса.

Опишем принципы отбора содержания элективных курсов, удовлетворяющих современным требованиям к качеству математической подготовки учащихся образовательных учреждений [9, с.36].

Принцип дополнительности ориентирован на исследовании новейших математических понятий, не входящих в основной базовый курс по математике. Чтобы воспроизводить какие-либо математические явления, временами нужно применять систему понятий и характеристик из различных научных сфер. Это приводит к реализации расширения логической структуры, за счет изучения с разных, ранее не рассматриваемых прежде сторон явлений. И данный принцип так же не исключает использование ранее известных инструментов и способов, решения основных математических задач в новых необычных условиях. То есть, перед учениками появляется возможность получить абсолютно иную модель ситуации, в которую они не попадали, решая способами, которые они уже понимают. Применение этого образовательного принципа позволяет углубить и расширить познания, сформировать и развить способности и методы деятельности школьников по изучаемой им теме по математике.

Принцип дифференциации подразумевает введение в процесс математической подготовки учащихся задач разного уровня и типа. Эти задачи формируются и выбираются с учетом всех немаловажных и весомых вещей в процессе овладения теми или другими математическими навыками и способностями, индивидуальными качествами, необходимыми для всех возможных групп учащихся. Это значит, собственно, что целый образовательный процесс осуществляется точно, с учетом возможностей и способностей всякого учащегося. В итоге отбор задач предназначенных для овладения возможностью применить всевозможные известные методы и некоторые своеобразные методы, которые дают возможность правильно решать определенные классы задач.

Принцип проблемности основан на выявлении и формулировании, поставленной учителем или возникшей в ходе решении задачи проблемного характера, решение которой заключается в создании математической модели. На начальном этапе решения ученик нуждается в некоторой информации - методе, который ранее не был известен. С помощью учителей, которые в настоящее время являются главным звеном в своей поисковой деятельности, для этой цели проводится самостоятельный отбор ресурсов для ученика.

Процесс нахождения решения проблемы способствует развитию индивидуальности старшеклассника, его творческих способностей и когнитивных способностей, которые являются частью интеллектуальной сферы. Проблемный метод обучения довольно эффективен при решении различных задач-ловушек и задач, содержащих некоторые специально зафиксированные ошибки.

Принцип междисциплинарности его целью является включение в содержание элективного курса задач из абсолютно иной области науки (химия, физика, информатика, экология и т. д.). Это гарантирует, связь между разными дисциплинами и целостностью содержания и формирования совместной картины мира. Целенаправленное внедрение данных областей заключается в их вкладе в математическое образование для общего профиля, охватывая образовательные исследования и принятие решений по связанным с ними математическим задачам. При этом реализуется становление абстрактного мышления и креативных возможностей учащихся, формируется их мировоззрение, состоящее в рассмотрении математического явления или же закона, который не ограничивается рамками одной дисциплины.

Принцип практико-ориентированности реализуется при помощи использования базовой методологии математики в результате практической работы из повседневной жизни. В данном случае математика дает мощное оружие для решения данных задач. В то же время задачи обучения ориентированы на внедрение важных вопросов, потребностей и запросов общества. В результате устанавливается индивидуальность личности школьника, способного решать неординарные задачки в определенных ситуациях, имеющих практическое направление. В данном отношении она саморазвивается, самореализуется и будет успешно реализована в будущем современном обществе.

Приходим к выводу, что, профильное образование, которое отводит ведущую роль личности учащегося и предусматривает предрасположенности и достижения в интересующих сферах науки и дисциплинах, близких с ними.

В результате углублённого изучения отдельных дисциплин с внедрением специально созданных индивидуальных программ, предусматривающих различный уровень освоения предметного содержания учащимися, реализуется формирование их социокультурного уровня и осмысленного профессионального выбора.

2. Технология конструирования содержания элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами»

2.1 Анализ учебников математики школьного курса основной школы

Мы посчитали необходимым, разработать элективный курс «Уравнения и неравенства с параметрами», который позволил бы сформировать представление об основных понятиях данной темы. Для этого обратимся к анализу школьных учебников [6,11, 13-16].

Просмотрев школьные учебники средней школы, мы пришла к выводу, что задания связанные с параметрами относятся к задачам повышенного уровня. В связи с тем, что задания располагаются после изучения основных тем, они не всегда успевают рассматриваться в учебном году. Данные задания еще помечаются звездочкой и являются дополнительными. Но на экзаменах они часто встречаются, и учащиеся за них не берутся, потому что им не рассказывали и не показывали азы их решения. Не всем школьникам данная тема важна, но умения решать такие задачи необходимы для успешной сдачи профильного экзамена. Главное понять основу, на чем строится решение, а дальше логически подумать и начать действовать.

Открывая учебники алгебры 7-9 классов общеобразовательного учреждения под редакцией Мордковича А.Г., мы не увидим ни одного параграфа имеющего название: «Уравнения и неравенства с параметрами». Само же определение «параметр» и « уравнение с параметром» приведено в учебнике за 8 класс в главе 4 «Квадратные уравнения» в параграфе 24 «Основные понятия» в таком виде [14, с.153]: «При каких значениях параметра p заданное уравнение является неполным квадратным уравнением? Решите уравнение при найденных значениях параметра: $6x^2 + (p-1)x + 2 - 4p = 0$». Это квадратное уравнение отличается от всех рассмотренных квадратных уравнений тем, что коэффициенты не являются конкретными числами, а являются буквенными выражениями. Такие уравнения называются уравнениями с буквенными коэффициентами или уравнениями с параметрами.

Так же слово параметр встречается в главе 5 «Неравенства» в параграфе 34 «Решение квадратных неравенств», в котором необходимо установить количество корней, зависящих от значений параметра.

В учебниках алгебры для учащихся 7 и 9 классов под редакцией Мордковича А. Г. уравнения и неравенства с параметром не представлены. Часов отводимых на изучение данной темы «Уравнения и неравенства с параметрами» в учебной программе не прописано, т. е. данные задачи если и включены в какие-либо темы, то с пометкой «повышенной сложности», и на уроках алгебры чаще всего не рассматриваются.

В книге для 9 класса Мордковича А. Г. в главе 1 «Неравенства и системы неравенств» параграф 1 «Линейные и квадратные неравенства» имеются задания на нахождение количества корней уравнения. В главе 2 «Системы уравнений» параграф 5 «Основные понятия» встречаются задания вида: «При каком значении параметра p пара чисел ($a;\ b$) является решение системы уравнений» [15, с.40].

В учебнике 9 класса под редакцией Макарычева Ю.Н. задачи с параметрами рассмотрены в разделе «Задачи повышенной трудности». Это задачи на нахождение корней уравнения, а также вот такого типа: «Найдите значение a, при которых один из корней уравнения $x^2 - 3{,}75x + a^3 = 0$ является квадратом другого» [11, с.228].

В учебнике 10 класса по алгебре Мордковича А.Г. в главе 10 «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств» содержится параграф 60 «Уравнения и неравенства с параметрами». В данном параграфе разобраны 4 задачи, в которых необходимо решить уравнение и неравенство относительно неизвестной x решить квадратное уравнение, зависящее от параметра, уравнение с квадратным корнем, содержащее параметр [13, с.383].

В учебнике 11 класса по алгебре Никольского С.М., во второй главе «Уравнения. Неравенства. Системы», параграф 15 «Уравнения, неравенства и системы с параметрами» в разделе 15.1 «Уравнения с параметром» рассмотрены 5 примеров, и для самостоятельной работы предложены 8 номеров. В параграфе 15.2 «Неравенства с параметром» подробно объясняются 3 примера и для решения даны 14 номеров. В параграфе 15.3 «Системы уравнений с параметрами» подробно описываются 4 примера и для работы в классе 6 номеров. В параграфе 15.4 «Задачи с условиями» 6 примеров с подробным описание и на самостоятельную работу дают 16 номеров [16, с. 355] .

Итак, нами определено, что содержательно-методическая линия «Уравнения и неравенства с параметрами» и часы, отводимые на её исследование, находится в области «трудных задач», либо «задач высокой трудности», что приводит к «обеднению» школьного курса алгебры.

Мы отмечаем, что задачи с параметрами обладают огромной возможностью в формировании исследовательских умений, таких как способность видеть, исследовать, продвигать и обосновывать гипотезу, подводить итог и т. д. Данные трудности представляют немаловажную значимость в создании логического мышления и точной культуры школьников.

Задачи с параметрами дают возможность создать основные компетенции, применимые как в учебной, так и в предстоящей профессиональной деятельности.

Целенаправленное применение задач с параметрами дает возможность совершенствовать и распознавать формирование ряда предметных компетенций обучающихся. Осуществлять расчеты и преобразования.

К сожалению, в настоящий период, организовать работу, в том числе и весьма значительных обучающихся к решению задач с параметрами в условиях базовой школы не является допустимым. С целью этого нужен акцент в формирование вариативности математического образования, серьезная кружковая, факультативная и т. п. деятельность под управлением намеренно подготовленных педагогов.

2.2 Методические положения по проведению элективного курса по математике

Надобность ввода элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами» обоснована тем, фактически, что практика вступительных экзаменов далеко оторвалась от средних учебных заведений и достаточно велика разница между требованиями, которые предъявляет к своему выпускнику школьное учебное заведение, и требования, которые предъявляет собственно к выпускнику, вуз, тем более вуз высокой репутации. В процессе решения задач с параметрами приобретаются конкретные умения исследовательской работы.

Нередко при решении примеров с параметрами поступающие ограничиваются лишь тем, что составляют формулу, выражающие значения неизвестных через параметры. Такое формальное решение может оказаться неполным, поскольку не рассматривается вопрос о том, при каких значениях параметра эти формулы применимы.

Решить уравнение или неравенство с параметром означает:

1) Определить, при каких значениях параметров существуют решения;

2) Для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующее множество решений.

Существуют другие формы условий задач с параметрами – исследовать уравнение, определить количество решений, найти положительны решения и др.

В силу такого многообразия условий нельзя дать одинаковые указания по решению примеров, поэтому в разработанном элективном курсе приводится много примеров с решениями.

Общие методические положения по проведению элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами» располагается в Приложении А (см. Приложение А).

В процессе изучения решения задач с параметрами на элективных курсах по математике в 11 классе целесообразно использовать как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационно-методическими материалами.

2.3 Разработка элективных занятий в 11 классе.

В тексте моей работы приведены частично материалы проведенных уроков по разделу «Квадратные уравнения с параметрами». По-моему мнению, самыми интересными и чаще всего встречающимися заданиями при поступлении в Вузы являются задания связанные с квадратными уравнениями. Если школьник будет понимать, как решаются уравнения данного вида, то ему не составит труда решать самые элементарные уравнения, например линейные уравнения. Задания, связанные с квадратными уравнениями, на первый взгляд оказываются сложными, но если немного поразмышлять, то можно с легкостью их решить. По своему опыту, когда училась в школе, нам из всех уравнений были интересны именно квадратные уравнения, потому что большинство учащихся помнит до сих пор формулу вычисления дискриминанта и соответственно нахождения корней, а некоторые наоборот помнят хорошо теорему Виета. Поэтому мне стало интересно создать собственный элективный курс, посвящённый «Уравнениям и неравенствам с параметрами». Конечно, не всем пригодятся полученные знания, но многим они помогут, а в целом будут служить для расширения кругозора.

Квадратные уравнения составляют основу алгебры. Умение решать уравнения не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит практическим целям. Важность умения решать квадратные уравнения в очередной раз доказывает то, что такие уравнения умели решать еще в древности.

Квадратные уравнения широко распространены. Они применяется во многих расчетах, сооружениях, спорте, а также и вокруг нас.

Поэтому решила, что квадратные уравнения, тем более с параметрами интересные из всех видов уравнений, более подробное решение таких видов задач рассматриваются в разработанных мною уроках, представленных ниже в дальнейшем описании работы.

Так же в данной работе, в тематическом плане присутствуют самостоятельные работы по темам: «Уравнения первой степени с параметром (без «ветвлений»)», «Простейшие линейные уравнения с параметром (с «ветвлениями»)». Тексты, содержащие перечень заданий с решением для этих работ прилагаются (см. Приложение В).

Занятие №12

Тема «Решение квадратных уравнений с параметрами»

Цель: углубить ранее полученные знания об уравнениях с параметрами, закрепить навыки решения уравнений; развить логическое мышление, сформировать потребность к приобретению знаний.

I. Организационный момент
II. Актуализация знаний
III. Объяснение нового материала

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0,$ где $a, b, c \in R, a \neq 0$ называется квадратным уравнением. $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант квадратного уравнения.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

IV. Решение задач

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение

$$a(a+1)x^2 + x - a(a-1) = 0.$$

Решение. При $a = -1$ или $a = 0$ уравнение будет линейным.

1. Если $a = 0$ то, $0 \cdot (0+1)x^2 + x - 0 \cdot (0-1) = 0 \Rightarrow x = 0.$
2. Если $a = -1$ то,

$$-1 \cdot (-1+1) \cdot x^2 + x - (-1) \cdot \big((-1) - 1\big) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

3. Если $a \neq -1, a \neq 0$ – находим корни уравнения:

$$D = 1 + 4\big(a(a+1)\big)\big(a(a-1)\big) = 1 + 4(a^2 + a)(a^2 - a) =$$

$$= 1 + 4(a^4 - a^2).$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(a^4-a^2)}}{2a(a+1)}=\frac{-1\pm\sqrt{(2a^2-1)^2}}{2a(a+1)}=\frac{-1\pm(2a^2-1)}{2a(a+1)}$$

Откуда

$$x_1=\frac{-1+2a^2-1}{2a(a+1)}=\frac{-2+2a^2}{2a(a+1)}=\frac{2(a^2-1)}{2a(a+1)}=\frac{2(a-1)(a+1)}{2a(a+1)}=\frac{a-1}{a};$$

$$x_2=\frac{-1-2a^2+1}{2a(a+1)}=\frac{-2a^2}{2a(a+1)}=-\frac{a}{a+1}.$$

Если $D=0,$ т.е. $1+4(a^4-a^2)=0 \implies a=\pm(1/\sqrt{2}),$ уравнение имеет единственное решение:

При $a=1/\sqrt{2}$:

$$x=\frac{-1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}+1)}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}.$$

При $a=-1/\sqrt{2}$:

$$x=\frac{-1}{2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}.$$

Ответ: 1) $x=2$ при $a=-1;$ 2) $x=0$ при $a=0;$

3) $x=-\sqrt{2}/(\sqrt{2}+2)$ при $a=1/\sqrt{2};$ $x=\sqrt{2}/(\sqrt{2}-2)$ при $a=-1/\sqrt{2};$

4) $x_1=(a-1)/a;$ $x_2=-a/(a+1)$ при $a\neq-1, \text{a}\neq 0, a=\pm(1/\sqrt{2}).$

Пример 2. Решить уравнение

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2a \cdot x + 1 = 0. \qquad (2.3.1)$$

Решение. Рассмотрим случаи:

1. $a = b = 0$. Уравнение $0 \cdot x + 1 = 0$ решений не имеет.

2. $a^2 = b^2 \neq 0$. Уравнение (2.3.1) становится линейным:

$$-2a \cdot x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2a}.$$

3. $a^2 - b^2 \neq 0$. Находим корни уравнения (2.3.1):

$$D = 4a^2 - 4(a^2 - b^2) \cdot 1 = 4b^2 = (2b)^2.$$

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{(2b)^2}}{2(a^2 - b^2)} = \frac{a \pm b}{a^2 - b^2}$$

Откуда получаем:

$$x_1 = \frac{a + b}{(a + b)(a - b)} = \frac{1}{a - b};$$

$$x_2 = \frac{a - b}{(a + b)(a - b)} = \frac{1}{a + b}.$$

4. $b = 0:\ D = 4a^2 - 4a^2 = 0$, поэтому уравнение имеет один корень

$$x = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}, a \neq 0.$$

5. $a = 0:\ -b^2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm(1/b)$.

Ответ: $x = 1/2a$ при $a^2 = b^2 \neq 0$; $x = 1/a$ при $a \neq 0, b = 0$; решений нет при $a = b = 0$; $x_1 = 1/(a-b)$; $x_2 = 1/(a+b)$ при $a^2 \neq b^2, b \neq 0$.

Пример 3. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$8x^2 - 6xy + y^2 = 0.$$

Решение. Рассмотрим левую часть уравнения как квадратный трехчлен относительно x, считая y параметром.

$$D = 36y^2 - 4 \cdot 8 \cdot y^2 = 4y^2.$$

Тогда, получаем корни

$$x_1 = \frac{6y + 2y}{16} = \frac{12y}{16} = \frac{3y}{4}$$

$$x_2 = \frac{6y - 2y}{16} = \frac{y}{4}.$$

Следовательно, данное уравнение можно представить в виде

$$\left(x - \frac{3y}{4}\right)\left(x - \frac{y}{4}\right) = 0,$$

т.е. оно выполняется при $x = 3y/4$ и при $x = y/4$.

Так что искомое множество является объединением двух прямых с уравнениями $y = (4x)/3$ и $y = 4x$.

Ответ: $y = (4x)/3$ и $y = 4x$.

Пример 4. При каких a, система имеет решение

$$\begin{cases} 4x^2 - 4ax - 3a^2 - 2x + 7a - 2 = 0, \\ 3x^2 + ax + 2a^2 - 13x + 11a + 10 = 0. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Перепишем первое и второе уравнение системы в виде:

$$\begin{cases} 4x^2 - (4a + 2)x - 3a^2 + 7a - 2 = 0, \\ 3x^2 + (a - 13)x + 2a^2 + 11a + 10 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант первого уравнения системы (2.3.2) равен:

$$D = (4a + 2)^2 - 4 \cdot 4(-3a^2 + 7a - 2) = 64a^2 - 96a + 36 = (8a - 6)^2.$$

Значит, он нам подходит для выражения одной переменной через другую

$$x_1 = \frac{4a + 2 + 8a - 6}{8} = \frac{3a - 1}{2};$$

$$x_2 = \frac{4a + 2 - 8a + 6}{8} = \frac{-a + 2}{2}$$

Подставим во второе уравнение системы (2.3.2) , x_1 и получим:

$$3\left(\frac{3a - 1}{2}\right)^2 + a\left(\frac{3a - 1}{2}\right) + 2a^2 - 13\left(\frac{3a - 1}{2}\right) + 11a + 10 = 0$$

$$41a^2 - 54a + 69;$$

$$D = 54^2 - 4 \cdot 41 \cdot 69 < 0$$

следовательно, решений нет.

Подставим во второе уравнение системы (2.3.2), x_2 и получим:

$$3\left(\frac{-a+2}{2}\right)^2 + a\left(\frac{-a+2}{2}\right) + 2a^2 - 13\left(\frac{-a+2}{2}\right) + 11a + 10 = 0$$

$$3(a^2 - 4a + 4) - 2a^2 + 4a + 8a^2 + 26a - 52 + 44a + 40 = 0;$$

$$9a^2 + 62a = 0$$

$$a = 0\,, a = -(62/9)$$

Ответ: при $a = 0, a = -(62/9)$.

V. Домашняя работа

Задание 1. Решить уравнение: $(c+1)x^2 - 3c = 0$

Решение:

1) Если $c + 1 = 0$, т. е. $c = -1$, то уравнение примет вид $0 \cdot x^2 = -3$ – решений нет.

2) Если $c + 1 \neq 0$, т. е. $c \neq -1$, то $x^2 = 3c/(c+1)$.

Рассмотрим три случая:

1. $\mathrm{c} = 0$, тогда $x^2 = 0, x_{1,2} = 0$;
2. $3\mathrm{c}/(\mathrm{c}+1) > 0, c(c+1) > 0, c \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$, тогда

$$x_1 = -\sqrt{3c/(c+1)};$$

$$x_2 = \sqrt{3c/(c+1)}.$$

3. $3c/(c+1) < 0\,, c \in (-1; 0)$, то уравнение не имеет действительных корней

Ответ: 1) $\mathrm{c} \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty), x_1, x_2$; 2) $c = 0, x_{1,2} = 0$;

3) $c \in [-1; 0)$, действительных корней нет.

Задание 2. Решите уравнение:

$$(m^2-9)y^2-m^2+4m-3=0$$

Решение: Если $m-3=0,$ то $m=3$ и $0 \cdot y^2=0,$ откуда $y \in R$.

Если $m+3=0,$ то $m=-3$ и $0 \cdot y^2=24$ – решений нет.

Пусть $m \neq -3$ и $m \neq 3$ тогда $y^2=(m-1)/(m+3)$.

Рассмотрим три случая:

1. Если $(m-1)/(m+3)=0,$ т. е. $m=1,$ то $y^2=0, y_{1,2}=0$.
2. Если $(m-1)/(m+3)>0, m \in (-\infty; -3) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty),$ то

$$y_1=-\sqrt{\frac{m-1}{m+3}}$$

$$y_2=\sqrt{(m-1)/(m+3)}$$

3. Если $(m-1)/(m+3)<0, m \in (-3; 1)$, действительных корней нет.

Ответ: $m=1, y_{1,2}=0; m \in (-\infty; -3) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty),$ то y_1, y_2;

$m \in (-3; 1)$ действительныхкорней нет.

VI. Подведение итогов

VII. Рефлексия

<u>Занятие №13</u>

Тема урока: «Использование теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметрами»

Цель: углубить ранее полученные знания об уравнениях с параметрами, закрепить навыки решения уравнений по теореме Виета; поспособствовать развитию логического мышления, сформировать потребность к приобретению знаний.

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний.

III. Объяснение нового материала

Самым мощным инструментом при решении сложных задач с параметрами является теорема Виета. Но здесь нужно быть предельно внимательным к формулировке.

Теорема **Виета**

Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 , то выполнены равенства $x_1 + x_2 = -p;\ x_1 \cdot x_2 = q$.

Особенности теоремы:

<u>1.</u> Теорема верна только для уравнения $x^2 + px + q = 0$ и неверна для $ax^2 + bx + c = 0$

В последнем случае нужно сначала разделить обе части уравнения на ненулевой коэффициент a при x^2, а потом уже применять теорему Виета.

<u>2.</u> Для использования результатов теоремы необходимо существование корней уравнения, т.е. важно проверить условие $D > 0$.

<u>3.</u> Обратная Теорема Виета.

Если числа x_1 и x_2 таковы, что

$$x_1 + x_2 = -p \text{ и } x_1 \cdot x_2 = q,$$

то x_1 и x_2 являются корнями приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + p \cdot x + q = 0.$$

IV. Закрепление материала

<u>Пример 1.</u> Составить квадратное уравнение, имеющее своими корнями числа $x_1 = \sqrt{5} - 1$ и $x_2 = \sqrt{5} + 1$.

Решение. Имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} + 1 = 2\sqrt{5} \\ x_1 \cdot x_2 = \left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\ \right) = \ 4 \end{cases}$$

Согласно обратной теореме Виета, уравнение

$$x^2 - 2\sqrt{5}\text{x} + 4 = 0$$

имеет своими корнями числа $x_1 = \sqrt{5} - 1$ и $x_2 = \sqrt{5} + 1$.

<u>Пример 2.</u> При каком значении p отношение корней уравнения $px^2 - px - 3x = -3$ равно 3?

Решение. Приведем уравнение к виду

$$px^2 - (p + 3)x + 3 = 0.$$

Если p=0, то уравнение становится линейным, имеет вид

$$-3x + 3 = 0.$$

Решением этого уравнения будет один корень x=1. Поэтому об отношении корней не имеет смысла говорить. Следовательно, значение $p = 0$ условию задачи не удовлетворяет.

Если $p \neq 0$, то исходное уравнение – квадратное. Пусть p - искомое значение параметра, а x_1 и x_2 – соответствующие этому значению корни, отношение которых равно 3, т.е. $x_1 : x_2 = 3$. Тогда, применяя теорему Виета, получаем систему уравнений с тремя неизвестными $x_1\ , x_2, p$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{p+3}{p} & (2.3.3) \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{p} & (2.3.4) \\ \dfrac{x_1}{x_2} = 3 & (2.3.5) \end{cases}$$

Находя из уравнения (2.3.5) $x_1 = 3x_2$ и подставляя это значение в уравнение (2.3.3), получаем

$$x_2 = \frac{p+3}{4p}.$$

Следовательно,

$$x_1 = (3p+9)/4p.$$

Подставляя найденные значения x_1и x_2 во второе уравнение системы, получаем уравнение

$$\frac{3p+9}{4p} \cdot \frac{p+3}{4p} = \frac{3}{p}.$$

После несложных преобразований оно приводит к квадратному уравнению $p^2 - 10p + 9 = 0$, корни которого $p = 1$ и $p = 9$.

Ответ: $p = 1$ и $p = 9$.

<u>Пример 3.</u> При каких a сумма квадратов корней уравнения равна 10

$$x^2 - ax + a + 7 = 0\ ?$$

Решение. Пусть x_1 и x_2 − корни данного уравнения. Тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 \cdot x_2 = a + 7 \end{cases}$$

Теперь имеем

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = a^2 - 2(a + 7).$$

По условию $a^2 - 2(a + 7) = 10 \Rightarrow a^2 - 2a - 24 = 0$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \\ a_1 \cdot a_2 = 24 \end{cases}$$

Откуда $a_1 = 6, a_2 = -4$.

Легко видеть, что при $a = 6$ исходное уравнение корней не имеет, т.к. его дискриминант отрицателен, а число $a = -4$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = -4$.

Пример 4. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов этих корней.

Решение. Перепишем в виде

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a \\ x_1 \cdot x_2 = 2a - 1 \\ x_1{}^2 + x_2{}^2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Теперь имеем

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 4a^2 - 2(2a - 1).$$

По условию

$$4a^2 - 2(2a - 1) = 2a \Longrightarrow 4a^2 - 6a + 2 = 0$$

Избавимся от коэффициента 4 перед a^2:

$$a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{2} = 0$$

Откуда

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \frac{3}{2} \\ a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Получаем

$$a_1 = 1, a_2 = 0{,}5.$$

Легко видеть, что при $a = 1$ исходное уравнение корней не имеет один корень, а получаем что только число $a = 0{,}5$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 0{,}5$.

V. Домашняя работа

Задание 1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 6x + a = 0$ равна 6?

Решение:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - a \geq 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \end{cases}$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 9 \\ 36 - 2a = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 9 \\ a = 15 \end{cases}$$

Ответ: решений нет.

Задание 2. При каких значениях параметра a сумма корней квадратного уравнения $(3-a)x^2 - 2ax + 4 = 0$ больше 1, а произведение корней меньше 8?

Решение:

$$\begin{cases} a \neq 3 \\ D \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 1 \\ x_1 \cdot x_2 < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 4a - 12 \geq 0 \\ \dfrac{2a}{3-a} > 1 \\ \dfrac{4}{3-a} < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 4a - 12 \geq 0 \\ \dfrac{3a-3}{3-a} > 0 \\ \dfrac{8a-20}{3-a} < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+6)(a-2) \geq 2 \\ (a-1)(a-3) < 0 \\ (a-2{,}5)(a-3) > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in [2; 2{,}5).$$

Ответ: $a \in [2; 2{,}5)$.

VI. Подведение итогов

VII. Рефлексия

<u>Занятие №14</u>

Тема урока: «Использование теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметрами»

Цель: углубить ранее полученные знания об уравнениях с параметрами, закрепить навыки решения уравнений по теореме Виета; развивать логическое мышление, научить проводить исследование корней квадратного уравнения.

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний.

III. Объяснение нового материала

$x_B -$ абцисса вершины параболы,

которая вычисляется по формуле:

$$x_B = \frac{-b}{2a}.$$

Таблица 2.14. Условия существования корней уравнения

Условия на корни	**Равносильное условие на коэффициенты *a,b,c* и дискриминант**
Корни x_1и x_2 существуют	$D > 0$
Корни существуют и равны $x_1 = x_2 = x_B$; причем $x_B > 0; (x_B \leq 0)$	$\begin{cases} D = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \cdot x_0 = -\frac{b}{a} > 0(\leq 0) \end{cases}$
Корни существуют и $x_1 < 0;\ x_2 < 0$	$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} D \geq 0 \\ ab > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$
Корни существуют и $x_1 > 0\ ; x_2 > 0$	$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} D \geq 0 \\ ab < 0 \\ ac > 0 \end{cases}$

Корни существуют и различны $x_1 < 0 \;\; x_2 > 0$	$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \leq 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$ ac<0
Корни существуют, один корень равен нулю, а другой больше нуля (не больше 0)	$\begin{cases} c = 0 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow (\leq 0) \end{cases}$

IV. Закрепление материала

<u>Пример 1.</u> При каких значениях параметра n оба корня квадратного уравнения $(n-2)x^2 + 8\text{x} + n + 4 = 0$ будут положительными?

Решение. Так как заданное уравнение является квадратным, то $n \neq 2$.

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Так как

$$D = 64 - 4(n+4)(n-2),$$

а по теореме Виета,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8}{n-2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{n+4}{n-2} \end{cases}$$

то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 64 - 4(\text{n}+4)(\text{n}-2) \geq 0 \\ -\dfrac{8}{n-2} > 0 \\ \dfrac{n+4}{n-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 + 2n - 24 \leq 0 \\ n - 2 < 0 \\ \dfrac{n+4}{n-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq n \leq 4 \\ n < 2 \\ n < -4 \text{ или } n > 2 \end{cases}$$

Ответ: $-6 \le n \le -4$.

<u>Пример 2.</u> При каких значениях параметра k квадратное уравнение $x^2 - (2k-1)x + 1 - k = 0$ имеет два различных положительных корня?

Имеем,

$$D = (2k - 1)^2 - 4(1 - k) = 4k^2 - 3;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - k \end{cases}$$

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 4k^2 - 3 > 0 \\ 2k - 1 > 0 \\ 1 - k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2k - \sqrt{3})(2k + \sqrt{3}) > 0 \\ k > 0{,}5 \\ k < 1 \end{cases}$$

Ответ: $k \in (\sqrt{3}/2; 1)$.

<u>Пример 3.</u> При каких m корни уравнения отрицательны

$$mx^2 - 2(m-1)x + 3m - 2 = 0?$$

Решение.

$$D = 4(m-1)^2 - 4m(3m-2) = 4m^2 - 8m + 4 - 12m^2 + 8m = -8m^2 + 4$$

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8m^2 + 4 > 0 \\ \dfrac{3\mathrm{m} - 2}{m} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}) \\ (0; \dfrac{2}{3}) \end{cases} \Rightarrow m \in (0; 2/3)$$

Ответ: $m \in (0; 2/3)$.

Пример 4. Найти все значения параметра m , при которых корни квадратного уравнения $mx^2 + 2(m+3)x + m + 2 = 0$ неположительны (различны).

Решение. Так как заданное уравнение является квадратным, то m не равно 0.

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$D = 4(m+3)^2 - 4m(m+2) = 4(m^2 + 6m + 9) - 4m^2 - 8m = 4m^2 +$ $+24m + 36 - 4m^2 - 8m = 16m + 36$

а по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2(m+3)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m+2}{m} \end{cases}$$

то получим систему неравенств.

$$\begin{cases} 16m + 36 \geq 0 \\ -\frac{2(m+3)}{m} \leq 0 \\ \frac{m+2}{m} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{9}{4} \\ m > 0 \text{ и } m \leq -3 \\ m > 0 \text{ и } m \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \text{ откуда } m > 0.$$

Ответ: $m > 0$.

V. Домашняя работа

Задание 1. Дано уравнение: $(3 + a)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$. При каких значениях параметра a:

а) Оно имеет два различных действительных корня;

b) Имеет один корень;

c) Не имеет действительных корней.

Решение:

$$a)\ \begin{cases} 3+a \neq 0 \\ D > 0 \\ a \neq -3 \\ 5a+6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ a^2 - (3+a)(a+2) > 0 \\ a \neq -3 \\ a < -1{,}2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1{,}2)$$

b) При $a = -3$ уравнение $6x - 1 = 0$ имеет единственное решение.

Пусть $a \neq -3$. Рассмотрим уравнение второй степени

$$\begin{cases} a \neq -3 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ 5a+6 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1{,}2$$

$$c)\ \begin{cases} a \neq -3 \\ D < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ -5a-6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ a > -1{,}2 \end{cases} \Rightarrow a\epsilon(-1{,}2; +\infty).$$

Ответ: $a)\ a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1{,}2);\ b)\ a = -1{,}2;\ c) a\epsilon(-1{,}2; +\infty)$.

VI. Подведение итогов

VII. Рефлексия

<u>Занятие №15</u>

Тема урока: «Решение уравнений с параметрами, приводимых к квадратным»

Цель урока: углубить ранее полученные знания об уравнениях с параметрами, закрепить навыки решения уравнений сводящихся к квадратным; развивать логическое мышление, сформировать у учащихся желания и потребности теоретического обобщения изучаемого материала.

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний

III. Решение задач

Пример 1. Решите уравнение

$$\frac{x(x-p)}{x+3} = 0.$$

Решение. ОДЗ: $x + 3 \neq 0 \Longrightarrow \ x \neq -3$.

Решим уравнение-следствие приравнивая числитель к нулю.

$$x(x-p) = 0 \Longrightarrow \ x_1 = 0, x_2 = p \qquad (2.3.6)$$

Если $x_1 = 0$, то $p \in R$ т.е.

$$\frac{0 \cdot (0-p)}{0+3} = 0$$

Если $x_1 = p$, то $p \neq -3$, иначе в знаменателе получится н*о*ль.

Если $p = -3$, то $x = 0$ т. е.

$$\frac{x(x+3)}{x+3} = 0 \ \Longrightarrow x = 0$$

Если p=0, то

$$\frac{x(x-0)}{x+3} = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Если $x_1 = x_2$, то $p = 0$ следует из уравнения (2.3.6).

Ответ: 1) если $p \neq -3, p \neq 0$, то два корня $x_1 = 0, x_2 = p$;

2) если $p = -3$ или $p = 0$, то один корень $x_1 = 0$.

Пример 2. Решите уравнение

$$\frac{x^2-a^2}{x-3} = 0. \qquad (2.3.7)$$

Решение. ОДЗ: $x \neq 3$.

Приравниваем числитель к нулю:

$$x^2 - a^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = a, x_2 = -a$$

Если $x_1 = x_2$ тогда

$$a = -a;\ 2a = 0;\ a = 0.$$

Если $x_1 = a,$ то $a \neq 3$ т.к знаменатель не может быть равен нулю

$$\frac{a^2 - a^2}{a - 3} = 0$$

Если $x_2 = -a,$ то $a \neq -3$ т.к. знаменатель не может равняться нулю

$$\frac{a^2 - a^2}{-a - 3} = 0$$

Если $a = -3$ и $a = 3$, то из (2.3.7) следует $x_1 = 3, x_2 = -3$.

Ответ: 1) $a \neq -3, a \neq 0, a \neq 3,$ то два корня $x_1 = a, x_2 = -a$;

2) если $a = -3$ или $a = 3,$ то $x_1 = 3, x_2 = -3$;

3) если $a = 0,$ то $x_{1,2} = 0$.

Пример 3. Решите уравнение

$$\frac{x^2-4x+3}{x-a}=0.$$

Решение. ОДЗ: $x \neq a$.

$$x^2-4\text{x}+3=0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1 \cdot x_2=3 \end{cases} \Rightarrow x_1=1, x_2=3$$

Если $x=1,$ то $a \neq 1.$ (Знаменатель не может быть равен нулю)

Если $x=3,$ то $a \neq 3.$ (знаменатель не может быть равен нулю)

Если $a=1,$ то $x=3$ т. е.

$$\frac{x^2-4x+3}{x-1}=0 \tag{2.3.8}$$

ОДЗ: $x \neq 1$. Приравнивая числитель из уравнения (2.3.8) к нулю получаем корни $x_1=1, x_2=3$. Но x_1 не подходит по ОДЗ.

Аналогично если $a=3,$ то $x=1.$

Ответ: $a \neq 1, a \neq 3$ то $x_1=1, x_2=3; a=1,$ то $x=3; a=3,$ то $x=1.$

Пример 4. При каких значениях a уравнение имеет единственное решение

$$\frac{(x-a)(x+2a)}{(x-1)(x-2)}=0.$$

Решение. ОДЗ:$x \neq 1, x \neq 2.$

Решив уравнение

$$(x-a)(x+2a)=0$$

получим: $x_1 = a, x_2 = -2a$.

При $x_1 = x_2$ получаем $a = -2a \Rightarrow a = 0$.

И так при a=0 уравнение имеет единственное решение x=0.

Если $x_1 = 1$, то $a = 1$. Тогда $x_2 = -2$.

Если $x_2 = 1$, то

$$-2a = 1 \Rightarrow a = -0{,}5. \text{ Тогда } x_1 = -0{,}5.$$

Если $x_1 = 2$, то $a = 2$. Тогда $x_2 = -4$.

Если $x_2 = 2$, то $a = -1$. Тогда $x_1 = -1$.

Ответ: $a = -1; a = -0{,}5; a = 0; a = 1; a = 2$.

IV. Домашняя работа

Задание 1. Решите уравнение: $y^2 + 3my + 2m^2 = 0$.

Решение: $D = (3m)^2 - 4 \cdot 2m^2 = m^2$; $m^2 \geq 0$ при любых значениях $m \in R$.

Рассмотрим два случая:

1) Пусть $D = 0$, т. е. $m = 0$: $y_{1,2} = 0$.
2) Пусть $D > 0$, т. е. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ имеет два различные корня:

$$y_{1,2} = (-3m \pm m)/2;\ y_1 = -2m, y_2 = -m.$$

Ответ: 1) $m = 0, y_{1,2} = 0$; 2) $m \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), y_1, y_2$.

Задание 2. Решите уравнение

$$\frac{x^2-(2a+1)x+a^2+a}{x-2} = 0. \qquad (2.3.9)$$

Решение: ОДЗ $x \neq 2$.

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + a = 0.$$

$$D = (2a+1)^2 - 4(a^2+a) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{(2a+1) \pm 1}{2}$$

$$x_1 = a + 1;\ x_2 = a.$$

1) $x_1 \neq x_2$ при любом $a \in R$.

2) $x_1 = a + 1,$ то $a \neq 1$. (иначе знаменатель в (2.3.9) будет равен нулю)

3) $x_2 = a,$ то $a \neq 2$. (иначе знаменатель в (2.3.9) будет равен нулю)

4) $a = 2,$ то $x_2 = 3$.

5) $a = 1,$ то $x_1 = 1$.

Ответ*:* $a = 2, x_2 = 3;\ a = 1, x_1 = 1; a \neq 2$ и $a \neq 1, x_1 = a, x_2 = a + 1$.

V. Подведение итогов

VI. Рефлексия

<u>Занятие №16</u>

Тема урока: «Расположение корней квадратного уравнения в зависимости от параметра»

Цель урока: сформировать умение распознавать расположение корней квадратного уравнения и положение квадратной параболы на плоскости в зависимости от параметра; развивать логическое мышление; умение работать в проблемной ситуации.

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний

III. Объяснение нового материала.

Решение многих задач с параметрами, предлагаемых на экзаменах, в частности, на ЕГЭ по математике, требует умения правильно формулировать необходимые и достаточные условия, соответствующие различным случаям расположения корней квадратного трёхчлена на числовой оси.

Пусть квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и $x_2, x_0 = -b/2a$ - абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c, d$ - заданное число. Рассмотрим ряд утверждений, связанных с взаимным расположением x_1 и x_2 и числа d.

Теорема 1. *Для того чтобы оба корня квадратного трёхчлена были больше числа d, необходимо и достаточно выполнение условий.*

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > d \\ f(d) > 0 \\ a > 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > d \\ f(d) < 0 \\ a < 0 \end{cases} \qquad (2.3.10)$$

Теорема 2. *Для того чтобы оба корня квадратного трёхчлена были меньше числа d, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < d \\ f(d) > 0 \\ a > 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < d \\ f(d) < 0 \\ a < 0 \end{cases} \qquad (2.3.11)$$

Рассмотрим задачи на применение этих теорем, обращая внимание на алгоритм получения необходимых и достаточных условий, соответствующих данному случаю расположения корней квадратного трёхчлена на числовой оси. Учащиеся должны научиться составлять эти условия, а не пытаться механически их запомнить.

IV. Закрепление материала

<u>Пример 1.</u> При каких значениях параметра *a* корни уравнения

$$ax^2 - (2a + 1)x + 3a = 0$$

больше единицы?

Решение: При $a = 0$ получим линейное уравнение:

$$-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Корень не удовлетворяет требованию задачи, он меньше 1.

При $a \neq 0$ воспользуемся теоремами:

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a) \geq 0 \\ \dfrac{(2a+1)}{2a} > 1 \\ (a - (2a+1) + 3a) > 0 \\ a > 0 \end{cases} \qquad (2.3.12)$$

или

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a) \geq 0 \\ \dfrac{(2a+1)}{2a} > 1 \\ (a - (2a+1) + 3a) < 0 \\ a < 0 \end{cases} \qquad (2.3.13)$$

Из первой строки уравнения системы (2.3.12) найдем корни:

$$D = 4a^2 + 4a + 1 - 12a^2 = -8a^2 + 4a + 1 \qquad (2.3.14)$$

Получаем корни из (2.3.14):

$$D = 16 + 32 = 48$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{-16} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{-4}$$

Из (2.3.12) получаем:

$$\begin{cases} a \in [\frac{-1+\sqrt{3}}{-4}; \frac{-1-\sqrt{3}}{-4}] \\ a \in (0; +\infty) \\ a \in (0{,}5; +\infty) \\ a > 0 \end{cases}$$

Из (2.3.13) получаем:

$$\begin{cases} a \in [\frac{-1+\sqrt{3}}{-4}; \frac{-1-\sqrt{3}}{-4}] \\ a \in (-\infty; 0) \\ a \in (-\infty; 0{,}5) \\ a < 0 \end{cases}$$

Ответ: при $a \in (0{,}5; (-1-\sqrt{3})/(-4)]$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения меньше 2

$$x^2 + (3a-7)x + 5 - a^2 = 0.$$

Решение. Согласно теореме 2, получаем:

$$\begin{cases} (3a-7)^2 - 4(5-a^2) \geq 0 \\ -\frac{3a-7}{2} < 2 \\ 4 + 2(3a-7) - a^2 + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (13a-29)(a-1) \geq 0 \\ a > 1 \\ -(a-5)(a-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 1] \cup [\frac{29}{13}; +\infty) \\ a > 1 \\ a \in (1; 5) \end{cases}$$

Ответ:$[29/13; 5)$.

<u>Пример 3.</u> Найдите все те значения параметра z, при которых оба корня квадратного уравнения различные и меньше -1

$$x^2 + 4zx + (1 - 2z + 4z^2) = 0.$$

Решение.

$$\begin{cases} 16z^2 - 4(1 - 2z + 4z^2) > 0 \\ 1 - 4z + (1 - 2z + 4z^2) > 0 \\ -\frac{4z}{2} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2z > 0 \\ 4z^2 - 6z + 2 > 0 \\ -2z < -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z > \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} z > 1 \\ z < \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ z > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z > 1$$

Ответ:$z \in (1; +\infty)$

V. Домашняя работа

Задание 1. Дано квадратное уравнение: $x^2 - (2a - 1)x + 1 - a = 0.$ При каких значениях параметра a:

1) Корни меньше 1.

2) Корни больше 2.

Решение:

1)

$$\begin{cases} 4a^2-3\geq 0 \\ \dfrac{2a-1}{2}<1 \\ 3-3a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a\leq -\sqrt{3}/2 \end{array}\right. \\ a<1{,}5 \\ a<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a\leq -\sqrt{3}/2 \end{array}\right. \\ a<1 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} 4a^2-3\geq 0 \\ \frac{2a-1}{2}>2 \\ 7-5a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a\leq -\sqrt{3}/2 \end{array}\right. \\ a>2{,}5 \\ a<1{,}4 \end{cases}$$

Ответ:1) $a\in(-\infty;-\sqrt{3}/2]\cup[\sqrt{3}/2;1)$; 2) система не имеет решений.

VI. Подведение итогов

VII. Рефлексия

<u>Занятие №17</u>

Тема урока: «Расположение корней квадратного уравнения в зависимости от параметра»

Цель урока: закрепить и продолжить формирование умений распознавать положение квадратной параболы на плоскости в зависимости от параметра; развивать логическое мышление; умение работать в проблемной ситуации.

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний

III. Объяснение нового материала

Теорема 3. *Для того чтобы один из корней квадратного трёхчлена был больше, чем* d, *а другой - меньше чем* d, *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} a > 0 \\ f(d) < 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} a < 0 \\ f(d) > 0 \end{cases} \end{aligned}\right. \tag{2.3.15}$$

Теорема 4. *Для того чтобы оба корня квадратного трёхчлена лежали в интервале (*d;p*), необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ d < -\dfrac{b}{2a} < p \\ f(d) > 0 \\ f(p) > 0 \\ a > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ d < -\dfrac{b}{2a} < p \\ f(d) < 0 \\ f(p) < 0 \\ a < 0 \end{cases} \tag{2.3.16}$$

Теорема 5 . *Для того чтобы отрезок [d; p] лежал в интервале (*x_1*;* x_2*), необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$\begin{cases} f(d) < 0 \\ f(p) < 0 \\ a > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(d) > 0 \\ f(p) > 0 \\ a < 0 \end{cases} \tag{2.3.17}$$

Для того чтобы больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале между M и N, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(M) < 0 \\ f(N) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > 0 \\ f(M) > 0 \\ f(N) < 0 \end{cases}$$

Для того чтобы меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале между M и N, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(M) > 0 \\ f(N) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0 \\ f(M) < 0 \\ f(N) > 0 \end{cases}$$

IV. Закрепление

Пример 1. При каком значении параметра a один корень уравнения

$$2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$$

больше 1, а другой - меньше 1?

Решение. Случай 1. $a = 0.$ Тогда уравнение получается линейное:

$$-2x - 2 = 0, \text{т. е.} \, x = -1.$$

Следовательно, не подходит нам.

Случай 2 и 3.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ 2a - 2 - 3a — 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ 2a - 2 - 3a — 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ -a - 4 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ -a - 4 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in (-4; 0) \\ a \in (0; +\infty) \end{array}\right.$$

Ответ: при $a \in (-4; 0) \cup (0; +\infty)$ один корень уравнения больше 1, а другой - меньше 1.

Задачи для самостоятельного решения

Пример 2. При каких значениях параметра a оба корня уравнения

$$x^2 - ax + 4 = 0$$

удовлетворяют условию $2 < x < 5$?

Решение.

$$\begin{cases} a^2 - 16 \geq 0 \\ 2 < \dfrac{a}{2} < 5 \\ 4 - 2a + 4 > 0 \\ 25 - 5a + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \\ 4 < a < 10 \\ a < 4 \\ a < \dfrac{29}{5} \end{cases}$$

Ответ: решений нет.

<u>Пример 3.</u> При каких значениях параметра a корни уравнения

$$x^2 + ax + 1 - a^2 = 0$$

принадлежат промежутку (-1; 1)?

Решение.

$$\begin{cases} a^2 - 4 + 4a^2 \geq 0 \\ -1 < \dfrac{-a}{2} < 1 \\ 1 - a + 1 - a^2 > 0 \\ (1 + a + 1 - a^2) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a^2 - 4 \geq 0 \\ -2 < a < 2 \\ a \in (-2; 1) \\ a \in (-1; 2) \end{cases}$$

Ответ: при $a \in (-1; -2/\sqrt{5}) \cup [2/\sqrt{5}; 1)$ корни уравнения лежат на промежутке (-1; 1).

V. Домашняя работа

Задание 1. Дано квадратное уравнение: $x^2 - (2a - 1)x + 1 - a = 0$. При каких значениях параметра a корни заключены между -1 и 1.

Решение:

$$\begin{cases} 4a^2 - 3 \geq 0 \\ a + 1 > 0 \\ 3 - 3a > 0 \\ -1 < \dfrac{2a - 1}{2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a \leq -\sqrt{3}/2 \end{array}\right. \\ a > -1 \\ a < 1 \\ -0{,}5 < a < 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a \leq -\sqrt{3}/2 \end{array}\right. \\ -0{,}5 < a < 1 \end{cases}$$

Ответ: $a \in [\sqrt{3}/2; 1)$.

VI. Подведение итогов

VII. Рефлексия

2.4 Апробация методических материалов на тему «Уравнения и неравенства с параметрами»

Апробация проводилась в 11 классе МОУ «Бессоновская СОШ» Белгородской области, Белгородского района. В классе обучается 10 человек.

Из-за ограниченного количества часов выделенных на проведение элективного курса, так как школа не имеет право, предоставить на ведения целого курса постороннему человеку, поэтому мною было проведено 4 урока, два из которых были отведены на контрольные работы, остальные два на объяснение подготовленного материала, а именно двух уроков по теме:

«Решение квадратных уравнений с параметрами», и по теме «Использование теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметрами», но планировалось проведение 6 уроков из самого большого блока «Квадратные уравнения и неравенства».

Для оценки уровня первичных знаний учеников был проведён срез в виде контрольной работы по теме «Линейные уравнения и системы линейных уравнений с параметрами», а второй срез для заключительной проверки знаний, по теме «Квадратные уравнения с параметрами» с включением в работу задания по типу задачи 18 профильного уровня ЕГЭ по математике (см. Приложение Б).

Результаты следующие.

В контрольной работе по теме «Линейные уравнения и системы линейных уравнений с параметрами» было предложено 5 заданий. Почти все учащиеся справились полностью с заданиями контрольной работы, а именно 60% школьников получили оценку «5», 40% получили оценку «4» Трудности вызвало задание 5 (возможно, потому что оно содержит значения под знаком модуля). В целом результаты данной контрольной работы показали высокие показатели, а именно все учащихся справились с поставленными перед ними задачами. Это свидетельствует о сформированности у учеников базовых математических компетенций за курс математики основной и средней общеобразовательной школы.

Так как времени на осуществление учебной деятельности данных уроков было не велико, то результаты проведения второго среза оказались хуже первого. Потому что двух занятий не достаточно для того чтобы полностью объяснить весь запланированный материал, так как курс рассчитан на весь учебный год.

Проводились уроки в традиционной форме, с объяснением нового материала и подготовленными заданиями разного уровня сложности по данным темам.

В контрольной работе по теме «Квадратные уравнения с параметрами» результаты оказались такими: 40% учащихся справились на «отлично», 50% на оценку «хорошо» и 10% на «удовлетворительно». Школьники только вычислили дискриминант, корни не нашли. Успешность выполнения заданий по типу задачи 18 из профильного уровня ЕГЭ по математике составляет 5 %. Всего лишь 1 человек приступил к решению этих заданий. Но и он не справился с заданиями до конца. У остальных учеников эти задания вызвали затруднения.

После опроса учащихся 11 класса, было выяснено, что 9 человек сдает не только базовый уровень по математике, но и профильный. Из данных учащихся никто не берется за задания с параметрами, потому что они для них очень сложные, их не готовят к ним, все основное время на консультациях уделяется на решение задач с 1 по 14 включительно, потому что это база знаний за все 11 лет школы.

Школьникам предоставила все планы конспекты уроков которые планировала провести, для их расширения кругозора.

Вывод: после получения результатов, нельзя утверждать, что данный элективный курс «Уравнения и неравенства с параметрами» не подходит для реализации в образовательной школе, потому что плохие результаты в данной работе свидетельствуют лишь о том что, время на проведение уроков было слишком мало, а вывод можно сделать лишь в том случае, когда весь курс был бы проведен от начала и до конца учебного года.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи с параметрами представляют существенную и важную часть содержания современного школьного математического образования.

Мною было проведено 4 занятия, каждое из которых способствовало формированию логического мышления и математической культуры школьников, развитию логической культуры – того, чего не хватает большинству учащихся, а также чтобы школьники при решении задач с параметрами научились производить несложные, но последовательные рассуждения, составляя для себя логическую схему решаемой задачи.

Каждый урок был тщательно проработан, а именно все примеры располагались в порядке усложнения, от самого легкого до самого сложного, для того чтобы каждый учащийся смог понять закономерности решения, научился анализировать, чтобы наблюдалась правильная последовательность действий в решении, научился объединять различные случаи в единый результат, не упустив никаких тонкостей при решении.

Подробный разбор заданий сблизил меня с учениками, а мои знания и умение отвечать на их вопросы вызвало у них уважение.

Было предложено несколько вариантов решения задач, чтобы каждый ученик смог для себя выбрать наиболее простой метод решения и в дальнейшем подобные задания позволяли бы намного лучше понимать обычные, без параметров задачи, развивали геометрическую интуицию, формируя алгоритмическую культуры.

После проведенных контрольных срезов, результаты на первом занятии и на последнем, отличались. Начальный срез показал высокие результаты, что говорит о том, что школьники в полной мере владеют первичными навыками решения уравнений.

Второй срез планировался после проведения нескольких запланированных уроков. Но так как времени было выделено мало, то и результат оказался не такой хороший как при первом срезе. Несмотря на то, что срез получился не такой успешный как первый, но все же положительный, что повысило мотивацию учащихся к сдаче ЕГЭ, а именно они возьмутся за решение задания типа 18 профильного уровня.

Разработанные мною задания должны помочь учащимся не только успешно сдать экзамены в школе, но и получить все шансы поступить в высшее заведение после прохождения вступительных испытаний, в которых обязательно будет задание с параметром.

Таким образом, цель, сформулированная в выпускной квалификационной работе, была достигнута, задачи были выполнены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахметова, Г.Д. Теория и практика образования в современном мире / Г.Д. Ахметова. – СПб.: Реноме, 2012. – 244 с.

2. Безденежных, Т. Профильное обучение: реальный опыт и сомнительные нововведения / Т. Безденежных // Директор школы, 2003. – №1. – С. 28-29.

3. Гузеев, И. С Содержание образования и профильное обучение в старшей школе / И.С. Гузеев // Народное образование, 2002. – №9. – С. 23-25.

4. Каптерев, П.Ф. О разнообразии и единстве общеобразовательных курсов / П.Ф. Каптерев // Педагогический сборник, 2003. – №1. – С. 18-19.

5. Козко, А.И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А.И.Козко. – М.: МЦНМО, 2007. – 296 с.

6. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 класса / А.Н. Колмогоров. – 16–е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

7. Концепция модернизации российского образования на период до 2018 года // Нормативные документы в образовании, 2016. – №2. – С. 21-22.

8. Крамор, В.С. Задачи с параметрами и методы их решения / В.С. Крамор. – М.: Оникс, 2007. – 416 с.

9. Крутихина, М.В. Элективные курсы по математике: учебно-методические рекомендации / М.В. Крутихина. – Киров: ВятГГУ, 2006. – 40 с.

10. Липова, Л.Е. Элективные курсы как содержательный блок профильного обучения / Л.Е. Липова // Начальная школа, 2016. – №3. – С. 20-22.

11. Макарычев, Ю.Н. Алгебра 9 класс / Ю.Н.Макарычев. – М.: Просвещение, 2014. – 275 с.

12. Манвелов, С.Г. Конструирование современного урока математики / С.Г. Манвелов. – М.: Просвещение, 2012. – 175 с.

13. Мордкович, А.Г. Алгебра 10 класс / А.Г.Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 405 с.

14. Мордкович, А.Г. Алгебра 8 класс / А.Г.Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 221 с.

15. Мордкович, А.Г. Алгебра 9 класс / А.Г.Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

16. Никольский, С.М. Алгебра и начала математического анализа / С.М. Никольский. – М.: Просвещение, 2009. – 464 с.

17. Орлов, В.А. Типология элективных курсов и их роль в организации профильного обучения. – М.: ИОСОРАО, 2003. – 241 с.

18. Саржевский, Ю.И. Осуществление профильного обучения. / Ю.И. Саржевский // Школа. – 2002. – №1. – С. 42-47.

19. Симонова, И.М. Профильная модель обучения математике / И.М. Симонова // Математика в школе, 1997. – №1. – С. 36-37.

20. Слепкань, З.И. Методика обучения математике: учебник для студентов математических специальностей высших педагогических учебных заведений / З.И. Слепкань. – М.: Высшая школа, 2016. – 582 с.

21. Старков, В.Н. 165 задач с параметрами / В.Н.Старков. – СПб.: СПбГУ, 2004. – 25 с.

22. Успенский, В.А. Содержание факультативных занятий по математике / В.А. Успенский. – М.: Юнити-Данта, 2013. – 564 с.

23. Чашечникова, А.С. Развитие математических способностей учащихся средней школы / А.С. Чашечникова. – М.: Просвещение, 2014. – 95 с.

24. Шабанова, М.В. Элективные математические курсы / М.В. Шабанова. – Архангельск: Поморский университет, 2015. – 315 с.

25. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: 11 кл. / И.Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 1989. – 352 с.

26. Ященко, И. В. ЕГЭ 2017. Типовые экзаменационные варианты / И. В. Ященко. – М.: Экзамен, 2017 – 544 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программа элективного курса по математике для 11 класса по теме: «Уравнения и неравенства с параметрами»

Аннотация

Данный элективный курс «Уравнения и неравенства с параметрами» предназначен для учащихся 11 классов.

Объём курса – 34 часа.

Цель курса:

- развитие навыков логического мышления;
- расширение математических представлений школьников о методах и приемах решения задач с параметрами;
- подготовка учащихся к ЕГЭ для дальнейшего обучения в университете;
- развитие интеллекта и интереса к изучению математики.

Изучение данного курса тесно связано с такими дисциплинами, как алгебра, алгебра и начала анализа, геометрия.

По окончании курса учащиеся должны усвоить основные приёмы и методы решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств с параметрами; научиться проводить полное обоснование при решении задач с параметрами.

Данный курс представляется актуальным и современным, так как расширяет и систематизирует знания учащихся, готовит их к более осмысленному пониманию теоретических сведений.

Изучение данного курса дает учащимся возможность: повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса математики; освоить основные приемы решения задач; овладеть навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи; повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности; проводить полное обоснование при решении задач с параметрами; овладеть исследовательской деятельностью.

Задачи курса:

- овладение системой знаний об уравнениях с параметром как о семействе уравнений;
- овладение аналитическим и графическим способами решения задач с параметрами;
- формирование логического мышления учащихся;
- приобретение исследовательских навыков в решение задач с параметрами;
- вооружению учащихся специальными и общеучебными знаниями, позволяющими им самостоятельно добывать знания по данному курсу;
- развитие коммуникативной культуры учащихся.

Содержание программы элективного курса

Введение. Понятие уравнений с параметрами. Первое знакомство с уравнениями с параметром (1ч).

Тема 1. Линейные уравнения, их системы и неравенства с параметром (11 ч).

Линейные уравнения с параметром. Алгоритм решения линейных уравнений с параметром. Решение линейных уравнений с параметрами без ветвлений и с ветвлениями. Дробно-рациональные уравнения с параметром.

Решение уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий. Решение уравнений с параметрами, приводимых к линейным. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля. Линейные неравенства с параметром и к ним сводимые. Решение линейных неравенств с параметрами. Алгоритм решения систем линейных уравнений с параметрами. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Тема 2. Квадратные уравнения и неравенства(16ч).

Понятие квадратного уравнения с параметром. Алгоритмическое предписание решения квадратных уравнений с параметром. Решение квадратных уравнений с параметрами. Зависимость, количества корней уравнения от дискриминанта. Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром. Решение квадратных уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнения. Расположение корней квадратичной функции относительно заданной точки. Решение квадратных уравнений с параметром первого типа («для каждого значения параметра найти все решения уравнения»). Решение квадратных уравнений второго типа («найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение удовлетворяет заданным условиям»). Решение квадратных неравенств с параметром первого типа. Решение квадратных неравенств с параметром второго типа.

Тема 3. Решение различных видов уравнений и неравенств с параметрами (6ч).

Решение тригонометрических уравнений, неравенств с параметром. Решение логарифмических уравнений, неравенств с параметром. Решение иррациональных уравнений, неравенств с параметром.

Исходя из содержания программы элективного курса, разработано календарно-тематическое планирование решения уравнений и неравенств с параметрами по математике представленное в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Календарно-тематическое планирование

№ п/п	Содержание учебного материала	Дата проведения	Всего часов	Формы контроля
Введение (1 час)				
1	Понятие уравнения с параметрами		1	Практикум
Линейные уравнения, их системы и неравенства с параметрами (11 часов)				
2	Уравнения первой степени с параметром (без «ветвлений»)		1	Самостоятельная работа
3	Простейшие линейные уравнения с параметром (с «ветвлениями»)		1	Самостоятельная работа
4.	Дробно-рациональные уравнения с параметром		1	Практикум.
5.	Уравнения с дополнительными условиями		2	Практикум.
6.	Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля		1	Практикум
7.	Контрольная работа №1 по теме «Линейные уравнения и системы линейных уравнений с параметрами»		1	Контроль
8.	Подготовительные неравенства и их системы		1	Практикум
9.	Простейшие линейные неравенства с параметром		1	Практикум
10.	Дробно-рациональные неравенства с параметром		1	Практикум
11.	Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля		1	Практикум
Квадратные уравнения и неравенства (16 часов)				
12.	Решение квадратных уравнений с параметрами		1	Практикум
13.	Использование теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметрами		2	Практикум

14.	Решение уравнений с параметрами, приводимых к квадратным		2	Практикум
15.	Расположение корней квадратного уравнения в зависимости от параметра		2	Практикум
16.	Взаимное расположение корней двух квадратных уравнений		2	Практикум
17.	Контрольная работа №2 по теме «Квадратные уравнения с параметрами»		1	Контрольная работа
18.	Подготовительные неравенства и их системы		2	Практикум
19.	Квадратные неравенства с параметром и сводимые к ним. Системы неравенств		2	Практикум
20.	Более сложные квадратные неравенства и их системы с параметром		2	Практикум
Решение различных видов уравнений и неравенств с параметрами (6 час)				
21	Решение рациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических и иррациональных уравнений и неравенств		6	Обобщение материала

Перечень учебно – методических средств обучения

Для учителя:

1. Горштейн, П.И. Задачи с параметрами / П.И. Гроштейн. – М.: Илакса, Харьков: Гимназия, 2005. – 328 с.

2. Каспржак, А.Г. Элективные курсы в профильном обучении / А.Г.Каспржак. – М.: НФПК, 2010. – 314 с.

3. Потапов, М.К. Математика методы решения задач / М.К. Потапов. – М: Дрофа, 1995. – 201 с.

4. Дворянинов, С.В. Функции, графики, задачи с параметром / С.В. Дворянинов. – Самара: Крок, 2009. – 143 с.

5. Ястребинецкий, Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры / Г.А. Ястребинецкий.– М: Просвещение, 1989. – 236 с.

6. Неделяева, С. Особенности решения задач с параметрами / С.Неделяева // Математика, 1999 . – №20. – С. 38-39.

Для учащихся

1. Лысенко, Ф.Ф. Математика ЕГЭ – 2018 / Ф.Ф.Лысенко. – Ростов–на-Дону: Легион, 2018. – 368 с.

2. Богатырёв, С.В. Тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ по математике / С.В. Богатырёв.- Самара: СИПКРО, 2012. – 137 с.

3. Галицкий, М.Л. «Сборник задач по алгебре» / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – М: Просвещение, 2008. – 271 с.

4. Черкасов, О.Ю. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену/ О.Ю.Черкасов, А.Г.Якушев. – М.: Рольф,2009. – 430 с.

5. Локоть, В.В. «Задачи с параметрами. Иррациональные уравнения, неравенства, системы, задачи с модулем» / В.В.Локоть. – М.: Просвещение, 2010. – 205 с.

6. Колесникова, С.И. «Подготовка к ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ» / С.И.Колесникова. – М.: Просвещение, 2011. – 304 с.

7. Циганов, Ш. Квадратные трехчлены и параметры / Ш.Циганов. – М.: Матск, 2011, – 146 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Контрольная работа №1 по теме «Линейные уравнения и системы линейных уравнений с параметрами»

<u>Вариант 1</u>

1. Решить уравнение:

$$m(2x-1)-m=2m(x-1)+x-3$$

Решение: $2mx-m-m=2mx-2m+x-3; -x=-3; x=3$

Ответ: $x=3$ при любом значении $m\in R$.

2. Решите уравнение:

$$\frac{2(a+1)x}{a}=3(x+1)+\frac{7}{a}$$

Решение: ОДЗ: $a\neq 0$

$$2ax+2x=3ax+3a+7$$

$$-ax+2x=3a+7$$

$$x=\frac{3a+7}{-a+2}$$

Ответ: $a\neq 2, a\neq 0, x=(3a+7)/(-a+2);\ a=2, a=0$ решений нет.

3. Решить уравнение:

$$\frac{ax+1}{x+2} = 2a+1$$

Решение: ОДЗ: $x \neq -2$

$$ax + 1 = 2ax + x + 4a + 2$$

$$x = \frac{4a+1}{-a-1}$$

Ответ: $a \neq -1,\ x = (4a+1)/(-a-1); a = -1$ и $x = -2$ решений нет.

4. Решите уравнение:

$$\frac{2ax}{x+3} - \frac{x+4a}{2x-6} = \frac{x(4a-1)}{2x+6}$$

Решение: ОДЗ: $x \neq -3, x \neq 3$

$$4ax^2 - 12ax - x^2 - 4ax - 3x - 12a = 4ax^2 - x^2 - 12ax + 3x$$

$$-4ax - 6x = 12a$$

$$x = \frac{6a}{-2a-3}$$

Ответ: $a \neq -1{,}5, a \neq -0{,}75\ , x = 6a/(-2a-3); a = -1{,}5, a = -0{,}75$ решений нет.

5. При каких значениях параметра a уравнение имеет решения?

$$|ax-2a-2|+|(1-a)x-3a|=0$$

Решение: $ax-2a-2=0$ или $(1-a)x-3a=0$

Из первого случая: $x=(2a+2)/a$

Из второго случая: $x=3a/(1-a)$

Приравниваем x:

$$\frac{2a+2}{a}=\frac{3a}{1-a}$$

$$2a+2-2a^2-2a=3a^2$$

$$a=\pm\sqrt{0{,}4}$$

Ответ: $\pm\sqrt{0{,}4}$

<u>Вариант 2</u>

1. Решите уравнение:

$$3x-2a=8(x-1)+5(a+2)-7a-5x$$

Решение: $3x-2a=8x-8+5a+10-7a-5x;\ 0\neq 2$

Ответ: решений нет при любом $a\in R$.

2. Решите уравнение:

$$\frac{x-3}{a-1}=\frac{(2+3x)}{a}$$

Решение: ОДЗ: $a \neq 0, a \neq 1$

$$ax - 3a = 2a + 3ax - 2 - 3x$$

$$x = \frac{-2 - 5a}{-2a + 3}$$

Ответ:1) $a \neq 0, a \neq 1, a \neq 1{,}5, x = (-2 - 5a)/(-2a + 3)$;

2) $a = 0, a = 1, a = 1{,}5$ решений нет.

3. Решите уравнение:

$$\frac{a - 2}{ax + 1} = 1$$

Решение: ОДЗ:$x \neq -1/a$

$$a - 2 = ax + 1$$

$$x = \frac{a - 3}{a}$$

Ответ: $a \neq 0, a \neq 2, x = (a - 3)/a; a = 0, a = 2$ решений нет.

4. Решите уравнение:

$$\frac{3mx - 5}{(m - 1)(x + 3)} + \frac{3m - 11}{m - 1} = \frac{2x + 7}{x + 3}$$

Решение: ОДЗ:$m \neq 1, x \neq -3$

$$3mx - 5 + (3m - 11)(x + 3) = (2x + 7)(m - 1)$$

$$x = \frac{-2m + 31}{4m - 9}$$

$$\frac{-2m + 31}{4m - 9} \neq -3; m \neq 0{,}4.$$

Ответ: 1) $m \neq -0{,}4, m \neq 1, m \neq 2{,}25, x = (31 - 2m)/(4m - 9)$;

2) $a = -0{,}4, a = 1, a = 2{,}25$ решений нет.

5. При каких значениях параметра b уравнение имеет решения?

$$|bx - 2b - 2| + |(1 - b)x - 3b| = 0$$

Решение: $bx - 2b - 2 = 0$ или $(1 - b)x - 3b = 0$

Из первого случая: $x = (2b + 2)/b$

Из второго случая: $x = 3b/(1 - b)$

$$\frac{2b + 2}{b} = \frac{3b}{1 - b}$$

$$2b + 2 - 2b^2 - 2b = 3b^2$$

$$b = \pm\sqrt{0{,}4}$$

Ответ: $\pm\sqrt{0{,}4}$

Контрольная работа №2 по теме «Квадратные уравнения с параметрами»

<u>Вариант 1</u>

1) Найдите значения параметра m, при которых выражение является полным квадратом

$$x^2 - 2(2+m)x + m^2$$

Решение:

$$D = 4(2+m)^2 - 4m^2 = 0$$

$$16m = -16$$

$$m = -1$$

Ответ: $m = -1$.

2) Найдите все значения *a,* при каждом из которых уравнение имеет не более одного решения

$$(2a-1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$$

Решение: $D \leq 0$.

$$D = a^2 - 4(2a-1)(2a-3) = -15a^2 + 32a - 12 = 0$$

Находим дискриминант дискриминанта и получаем корни:

$$a_{1,2} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{19}}{-15}$$

Ответ: $a \in ((-16 + 2\sqrt{19})/(-15)); (-16 - 2\sqrt{19})/(-15))$.

3) Найдите все a, при которых уравнения имеет два различных неотрицательных корня

$$(2 - x)(x + 1) = a.$$

Решение: перенесем все в одну сторону: $-x^2 + x + 2 - a = 0$.

$$\begin{cases} 9 - 4a \geq 0 \\ 1 > 0 \\ \dfrac{2 - a}{-1} > 0 \end{cases}$$

Ответ: $a \in (2; 2{,}25)$.

4) Дано уравнение

$$(b - 3)x^2 + 2bx + b + 2 = 0.$$

При каком значении параметра b оно имеет:

а) корни, больше 3

б) один корень больше 2, а другой меньше 2

Решение:

$$\text{а)} \begin{cases} 4b^2 - 4(b - 3)(b + 2) \geq 0 \\ b - 3 > 0 \\ \frac{-2b}{2(b-3)} > 3 \\ (b - 3)9 + 6b + b + 2 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4b^2 - 4(b - 3)(b + 2) \geq 0 \\ b - 3 < 0 \\ \frac{-2b}{2(b-3)} > 3 \\ (b - 3)9 + 6b + b + 2 < 0 \end{cases}$$

$$
\text{b)}\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b-3>0 \\ (b-3)4+4b+b+2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} b-3<0 \\ (b-3)4+4b+b+2>0 \end{cases}\end{array}\right.
$$

Ответ: а) $b \in (-\infty; -6]$; б) $b \in (-\infty; 10/9) \cup (3; +\infty) \cup (10/9; 3)$.

<u>Вариант 2</u>

1) Найдите значения параметра m, при которых выражение является полным квадратом

$$2mx^2 + (2m-4)x + \frac{m}{2} + 3$$

Решение: $D = 0$.

$$(2m-4)^2 - 8m\left(\frac{m}{2} + 3\right) = 0$$

$$-40m = -16; m = 0{,}4.$$

Ответ: m=0,4.

2) При каких a, уравнение имеет более одного корня?

$$(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a = 0$$

Ответ: $a \in (-\infty;\ -3) \cup (-0{,}75; +\infty)$.

3) Найдите все a, при которых уравнение имеет только положительные корни

$$(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0.$$

Решение:

$$\begin{cases} 4a^2 - 4(a-2)(2a-3) \geq 0 \\ \dfrac{2a}{a+3} > 0 \\ \dfrac{-3}{a+3} > 0 \end{cases}$$

Ответ: $a \in (2; 6]$.

4) Дано уравнение

$$(b-3)x^2 + 2bx + b + 2 = 0.$$

При каком значении параметра b оно имеет:

а) корни, больше 3

б) один корень больше 2, а другой меньше 2 Решение:

а) $\begin{cases} 4b^2 - 4(b-3)(b+2) \geq 0 \\ b - 3 > 0 \\ \frac{-2b}{2(b-3)} > 3 \\ (b-3)9 + 6b + b + 2 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4b^2 - 4(b-3)(b+2) \geq 0 \\ b - 3 < 0 \\ \frac{-2b}{2(b-3)} > 3 \\ (b-3)9 + 6b + b + 2 < 0 \end{cases}$

b) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b - 3 > 0 \\ (b-3)4 + 4b + b + 2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b - 3 < 0 \\ (b-3)4 + 4b + b + 2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: а) $b \in (-\infty; -6]$; б) $b \in (-\infty; 10/9) \cup (3; +\infty) \cup (10/9; 3)$.

Задания по типу 18 из пробного профильного уровня ЕГЭ.

<u>Задание №1.</u> Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно три различных решения

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16 .$$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$(x-4)^2 = 2|x-a| \qquad (3.1)$$

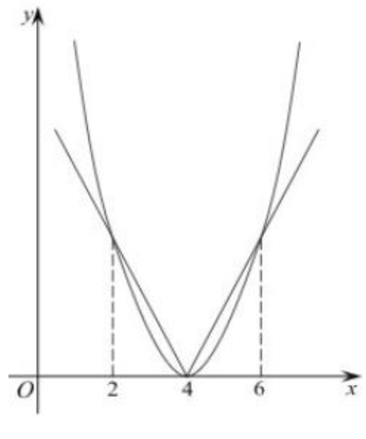
и рассмотрим графики функций

$$y = (x-4)^2 \text{ и } y = 2|x-a|.$$

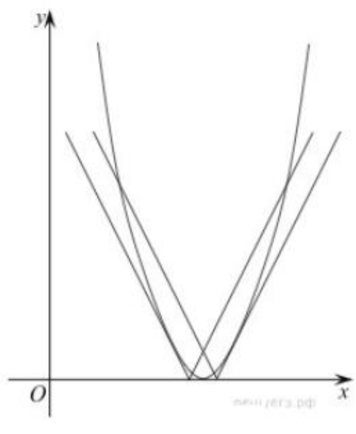
График первой функции - парабола, график второй функции - угол с вершиной точке a.

Уравнение (3.1) будет иметь три различных корня в следующих случаях:

а) Вершина параболы совпадает с вершиной угла (рис.1).



(рис.1)



(рис 2).

При $a = 4$:

$$(x-4)^2 = 2|x-4|$$

Рассмотрим два случая:

1) $x - 4 \geq 0$

$$x^2 - 8x + 16 = 2x - 8$$
$$x^2 - 8x + 24 = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = 4$$

2) $x - 4 < 0$

$$x^2 - 8x + 16 = -2x + 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_1 = 4, x_2 = 2.$$

Получаем что при $a = 4$ корни равны: 2; 4; 6.

b) Одна из сторон угла касается параболы (рис.2).

Пусть правая сторона угла касается параболы. Уравнение:

$$(x - 4)^2 = 2x - 2a,$$

должно иметь единственное решение.

Приведем уравнение к стандартному виду:

$$x^2 - 10x + 16 + 2a = 0.$$

Из равенства нулю дискриминанта получаем

$$100 - 4(16 + 2a) = 0, \text{откуда } a = 4{,}5.$$

Если параболы касается левая сторона угла, получаем уравнение

$$(x-4)^2 = 2a - 2x;$$

$$x^2 - 6x + 16 - 2a = 0.$$

$$D = 36 - 4(16 - 2a) = 0$$

$$28 + 8a = 0$$

$$a = 3{,}5$$

Ответ: 3,5; 4; 4,5.

<u>Задание №2.</u> Найти все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

Решение.

Поскольку модуль разности корней уравнения и квадрат разности корней уравнения будут иметь наибольшее значение при одних и тех же a, то можно с помощью формул Виета записать квадрат разности корней и найти, при каком a он принимает наибольшее значение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 4a + 12 \end{cases} \quad \text{то}$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{-4a^2 + 16a - 12}.$$

Итак, осталось найти наибольшее значение выражения

$$-4a^2 + 16a - 12 \le 0$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 1] \\ a \in [3; +\infty) \end{cases}$$

Потому наибольшая разность корней равна $\sqrt{(3-1)^2} = 2$ и достигается при $a = 2$.

Ответ: при $a = 2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Самостоятельная работа №1 «Уравнения первой степени с параметром (без «ветвлений»)»

1. Решите уравнение

$$x - a = 2x + 3a - 1$$

Решение : ОДЗ: $a \in R, x \in R$.

Решая данное уравнение, члены, содержащие x, переносим в одну часть уравнения, а не содержащие x- в другую.

$$2x - x = -a - 3a + 1$$

$$x = 1 - 4a$$

Ответ: $x = 1 - 4a$ при любом значении a.

2. Решите уравнение

$$\frac{x - 3a}{2} = \frac{x + a}{3}$$

Решение: $3x - 9a - 2x - 2a = 0, x = 11a$.

Ответ: $x = 11a$ при $a \in R$.

3. Решите уравнение

$$bx - b = 2x + (b - 1)x + 3b - 2$$

Решение: ОДЗ:$b \in R, x \in R$

Раскрываем скобки: $bx - b = 2x + bx - x + 3b - 2$

Перенесем члены, содержащие х, влево, не содержащие х,- вправо. Приведя подобные члены, получим

$$x = 2 - 4b$$

Ответ: $x = 2 - 4b$ при $b \in R$.

4. Решите уравнение

$$b - \frac{5 - x}{6} = \frac{2x + b}{2} - \frac{3b}{4}$$

Ответ: $x = 3$ при любом значении $m \in R$.

5. Решите уравнение

$$\frac{a}{x + 2} = 3$$

Решение: ОДЗ: $a \in R, x \neq -2$

$$a = 3x + 6$$

$$x = \frac{a - 6}{3}$$

$$\frac{a-6}{3} \neq -2$$

$$a \neq 0$$

Ответ: 1) если $a \neq 0,$ то $x = \frac{a-6}{3}$; 2) если $a = 0,$ то решений нет.

6. Решите уравнение

$$\frac{2}{x-3} = \frac{1}{x+a}$$

Ответ: 1) при $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$, получаем $x = -2a - 3$;

2) при $a = -3$ решений нет.

7. Решите уравнение

$$\frac{3}{b-1} = \frac{b}{x-b}$$

Ответ: 1) при $b \neq 0, a \neq 1$ получаем $x = (b^2 + 2b)/3$;

2) при $b = 0$ и $b = 1$ решений нет.

Самостоятельная работа № 2 «Простейшие линейные уравнения с параметром (с «ветвлениями»)»

1. Решите уравнение

$$(a-3)x = a^2 - 9$$

Решение: 1) $a = 3, x \cdot 0 = 0, x \in R$.

2) $a \neq 3, x = a + 3$

Ответ: при $a \neq 3,\ x = a + 3;$ при $a = 3, x \in R$.

2. Решите уравнение

$$a^2x - a = x - 1$$

Решение: Приведем данное уравнение к виду: $(a^2 - 1)x = a - 1$.

Рассмотри случаи:

1) $a = 1, 0 \cdot x = 0,$ где $x \in R$.

2) $a = -1, 0 \cdot x = -2 -$ решений нет.

3) $a \neq \pm 1, x = 1/(a + 1)$.

Ответ: $a \neq -1, a \neq 1, x = 1/(a + 1);\ a = 1, x \in R;\ a = -1,$ решения нет.

3. Решите уравнение

$$\frac{3x}{a} - 3 = a - x$$

Решение: $3x - 3a - a^2 + ax = 0$.

1) $a = -3, 0 \cdot x = 0, x \in R$.

2) $\begin{cases} a \neq -3 \\ a \neq 0 \end{cases}$ тогда $x = a$

Ответ: $a \neq -3, a \neq 0, x = a;\ a = -3, x\ \in R;\ a = 0$ решений нет.

4. Решите уравнение

$$\frac{2-x}{a+1}=3-x$$

Решение: $2-x-3a-3+ax+x=0$.

1) $a=0, 0\cdot x=1-$ решений нет.

2) $\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -1 \end{cases}$ тогда $x=(3a+1)/a$.

Ответ: $a\neq -1, a\neq 0, x=\frac{3a+1}{a}$; $a=-1, a=0$, решений нет.

5. Решите уравнение

$$3x(a-2)+6a=2a(x+3)$$

Решение: $3ax-6x+6a=2ax+6a$.

1) $a=6, x\in R$.

2)$a\neq 6, x=0$.

Ответ: $a\neq 6, x=0; a=6, x\in R$.

6. Решите уравнение

$$(x-2)(b^2-9)=0$$

Решение:

1) $b=3$ или $b=-3, x\in R$;

2)$b\neq \pm 3, x=2$.

Ответ: $a\neq -3, a\neq 3, x=2; b=3, b=-3, x\in R$.