УДК 517.9

Чернова О.В.
Chernova O.V.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород
Belgorod State University, Belgorod
E-mail:chernova_olga@bsu.edu.ru

Оценки интегралов типа потенциалов в весовых пространствах

Estimates of Potential Type Integrals in Weighted Spaces

Аннотация: *Приведены оценки интегралов типа потенциала с разностным ядром в весовых лебеговых и соболевских пространствах. Рассмотрены также сингулярные интегралы, полученные их дифференцированием, которые понимаются в смысле Кальдерона-Зигмунда.*

The estimates of integrals of potential type in weighted Lebesgue and Sobolev spaces are given. The Calderon-Zygmund singular integrals which are received by their differentiation are also considered.

Ключевые слова: *Разностные ядра, весовые* L^p *– пространства, сингулярные интегралы.*

Keywords:*Difference Kernels, Weighted* L^p *– spaces, Singular Integrals.*

Введем в рассмотрение интеграл

$$\psi(x) = \int_{R^2} k(x,y;y-x)\varphi(y)dy_1dy_2, (1)$$

где ядро $k(x,y;\xi)$ однородно степени -1 по переменной $\xi=(\xi_1,\xi_2)$. Предполагая, что функция φ равна нулю вне единичного круга, применение обычного неравенства Гельдера [2] $|\varphi(x)-\varphi(y)| \le C|x-y|^{\mu}, 0<\mu<1$ дает L^p-оценку интеграла (1).

Лемма 1. *Пусть ядро* $k(x,y;\xi)$ *непрерывно и ограничено по переменным* $x,y\in R^2, |\xi|=1$. *Пусть* $\varphi\in L^p(R^2)$, $p\ge 1$ *и* φ *обращается* *в нуль вне круга* $B=\{|y|\le 1\}$. *Тогда определяемый (1) оператор* $\varphi \to \psi$ *компактен в* $L^p(B)$ *и для его нормы справедлива оценка*

$$|\psi|_{L^p} \le C|k|_0|\varphi|_{L^p}, \quad |k|_0 = \sup_{x,y,|\xi|=1} |k(x,y;\xi)| \quad (2)$$

где постоянная $C>0$ *зависит только от* p.

Прежде чем перейти к обсуждению дифференцируемости интеграла (1), заметим, что для однородной степени -1 функции $k(\xi)$ производные $K(\xi)=\frac{\partial k}{\partial \xi_i}$ удовлетворяют условию $\int_0^{2\pi} K(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 0,$ которое является необходимым для существования аналогичного (1) сингулярного интеграла типа Кальдерона- Зигмунда [3] с ядром $K(\xi)$.

Через $W^{1,p}(R^2)$ обозначим соболевское пространство всех функций $\varphi \in L^p(R)$, обобщенные производные первого порядка которых принадлежат $L^p(R^2)$. Обобщенные производные здесь понимаются в смысле теории обобщенных функций. Аналогичным образом пространство $W^{n,p}(D)$ определяется для любой области $D \subseteq R^2$. Относительно соответствующей нормы это пространство банахово [1]. Следующую лемма показывает, что при дополнительных условиях гладкости на ядро $k(x,y;\xi)$, интеграл (1) принадлежит классу $W^{1,p}$ и для его обобщенных производных производных справедлива формула дифференцирования.

Лемма 2. *Пусть ядро* $k(x,y;\xi)$ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}(R^2 \times R^2)$, $\mu<\nu$, $\varphi(y) \in L^p$, $p>1$ *и обращается в нуль вне единичного круга* B. *Тогда* $\psi \in W^{1,p}(B)$ *и справедлива формула*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) = -\sigma_i(x)\varphi(x) + \int_{R^2} \frac{\partial k}{\partial x_i}(x,y;y-x)dy_1dy_2 - \int_{R^2} \frac{\partial k}{\partial \xi_i}(x,y;y-x)dy_1dy_2, \quad i=1,2. \quad (3)$$

В частности, $|\psi|_{W^{1,p}} \le C|k|_{C^{1,\nu}}|\varphi|_{L^p}$, *с некоторым* $\varepsilon>0$, *где постоянная* $C>0$ *не зависит от* k *и* φ.

Доказательство. Заметим, что второе утверждение леммы есть следствие известной теоремы Кальдерона-Зигмунда [2], примененной к сингулярному интегралу в (3) и первого утверждения данной леммы. Используя эту теорему, лемму 1 и тот факт, что класс $C_0^\infty(R^2)$ плотен в $W^{n,p}(R^2)$ при любом n, доказательство первого утверждения сводится к обоснованию формулы (3) для функций $\varphi(y)\in C_0^\infty(R^2)$ В этом случае оно проводится обычным образом, «вырезая» сингулярную точку и интегрируя по частям.

Лемма 1 позволяет рассматривать интегралы (1) с плотностью $\varphi\in L_\lambda^p(R^2;F)$, где пространство $L_\lambda^p(R^2;F)$определяется следующим образом.

Определение. С каждым семейством вещественных чисел $\lambda=(\lambda_\tau,\tau\in F)$ (весовым порядком), где F есть конечное множество сферы Римана $\overline{\mathrm{R}^2}=\mathrm{R}^2\cup\infty$, содержащее точку $\tau=\infty$, свяжем весовую функцию $\rho_\lambda(x)=(1+|x|)^{\lambda_\infty}\prod\limits_{\tau\neq\infty}\left(\frac{|x-\tau|}{1+|x|}\right)^{\lambda_\tau}$. Весовое пространство $L_\lambda^p(R^2;F)$ состоит из всех измеримых функций φ, для которых $\rho_{-\lambda}\varphi$ принадлежит L^p-пространству относительно меры $\rho_2(x)dx$, которое обозначается $L_0^p(R^2;F)$. Таким образом, пространство $L_\lambda^p(R^2;F)$ задается нормой $|\varphi|_{L^p}=\left(\int\limits_{R^2}\rho_{-p\lambda-2}(y)|\varphi(y)|^p\,dy_1dy_2\right)^{1/p}$.

Аналогичным образом введем и весовое соболевское пространство $W_\lambda^{1,p}(R^2;F)$, которое определим условиями $\varphi\in L_\lambda^p$, $\varphi'\in L_{\lambda-1}^p$.

Теорема. *Пусть ядро* $k(x,y;\xi)$ *непрерывно и ограничено по переменным* $x,y\in R^2$ *и* $|\xi|=1$. *Пусть* $\varphi\in L_\lambda^p(R^2;F)$, $p\geq 1$, *с весовым порядком* λ, *удовлетворяющим условию* $-2<\lambda_\tau<-1$, $\tau\neq\infty$. *Тогда функция* $\psi(x)$ *из (1) принадлежит* $L_{\lambda+\sigma}^p$ *с соответствующей оценкой норм* $|\varphi|_{L_{\lambda+1}^p}\leq C|k|_0|\varphi|_{L_\lambda^p}$.*Если дополнительно функции* $k(x,y;\xi)$ *и* $\frac{\partial k}{\partial\xi_j}$, $j=1,2$, *принадлежат классу* $C^{1,\mu}(R^2)$ *по каждой переменной* x,y *равномерно по* $\xi\in R^2,|\xi|=1$, *то оператор* K *ограничен* $L_\lambda^p\to W_{\lambda+1}^{1,p}$.

Литература

1. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. Задача Дирихле для функций, гармонических на двумерной сети / К.А. Ковалева, А. П. Солдатов // Материалы международной конференции «International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS-17», Санкт-Петербургский политехнический университет, 24–28 июля 2017 г., Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., – 2019. – Т. 160. – С. 42-48.
2. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I / А. П. Солдатов // СМФН. – 2017. – Т. 63, № 1. – С. 1-189.
3. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 342 с.