4. *Dragovic V., Radnovic M.* Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards// Regullar Chaotic Dyn. РАН. 2009. 14. 479–494.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

©2020 *Е. Ю. Московченко*, *Ю. П. Вирченко*
(Белгород; *virch@bsu.edu.ru*)

Изучается класс решётчатых моделей статистической механики классических систем с суммируемым парным потенциалом взаимодействия. Изучается система уравнений для частных распределений вероятностей гиббсовского точечного случайного поля. Доказана аналитическая зависимость решений этой системы от спектрального параметра z в области $\{z\ :\ \mathrm{Re} z \geq 0\}$ при достаточно больших значений параметра $T > 0$ в распределении Гиббса. Пусть $\Lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^3 : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} n_j \mathbf{e}_j, n_j = 0 \div L - 1\}$ — последовательность множеств в $\mathbf{Z}^3$, где $\mathbf{e}_j$ — орты в $\mathbf{R}^3$. При $L \to \infty$ трансляцией $\Lambda \Rightarrow \Lambda - (L/2) \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j$ определён переход к пределу $\Lambda \to \mathbf{Z}^3$. Для каждого Λ вводится пространство случайных событий $\Omega(\Lambda)$, состоящее из класса всех дихотомических функций $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ со значениями 0 и 1. На этом пространстве определён функционал

$$\mathsf{H}_\Lambda[\rho] = -\mu \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} \rho(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda, \mathbf{y}\in\mathbf{Z}^d, \mathbf{y}\neq\mathbf{x}} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{x})\rho(\mathsf{P}_\Lambda \mathbf{y})\,, \quad (1)$$

где $\mu \in \mathbf{R}$ и функция $U(\mathbf{x})$ со значениями в $\mathbf{R}$ — центрально-симметрична, $U(-\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$ и суммируема на $\mathbf{Z}^3$, $\|U\| \equiv \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^d} |U(\mathbf{x})| < \infty$, причём $U(0) = 0$. Здесь P_Λ — оператор проектирования, определяемый $\mathsf{P}_\Lambda \mathbf{x} = \mathbf{z} \in \Lambda$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^3$ на основе однозначного представления в виде $\mathbf{x} = \mathbf{z} + L \sum_{j=1}^{3} n_j \mathbf{e}_j$, $\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \in \mathbf{Z}^3$.

На основе гамильтониана (1) вводится распределение вероятностей Гиббса на $\Omega(\Lambda)$.

$$\Pr\{\rho\} = Q_\Lambda^{-1}(z)\exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho]/T\Big), \quad T>0,$$

$$Q_\Lambda(z) = \sum_{\rho\in\,\Omega(\Lambda)} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho]/T\Big).$$

Набор p_Λ вероятностей $p_\Lambda(X,z) = \mathsf{E}\prod_{\mathbf{x}\in X}\rho(\mathbf{x})$, $X\subset\Lambda$. В пределе $\Lambda\to\mathbf{Z}^d$ он удовлетворяет системе уравнений

$$\mathsf{p}(z) = z(1+z)^{-1}\mathsf{e} + \mathsf{K}\mathsf{p}(z)\,, \quad z = e^{\mu/T}, \tag{2}$$

где $\mathsf{e} = \langle\delta_{1,|X|} : \emptyset\neq X\subset\Lambda\rangle$ и линейный оператор K, действующий в линейном банаховом пространстве $\mathcal{E}$ с нормой $\|\mathsf{p}\|_0 = \sup_{X\subset\mathbf{Z}^3;|X|<\infty}|p(X,z)|$, определяется формулой

$$\big(\mathsf{K}\mathsf{g}\big)(X) = \frac{zW(\mathbf{x};X)}{1+zW(\mathbf{x};X)}\Big[(1-\delta_{0,|X\setminus\{\mathbf{x}\}|})g(X\setminus\{\mathbf{x}\})$$

$$+\sum_{\emptyset\neq Y\subset\mathbf{Z}^d\setminus X} K(\mathbf{x};Y)\big[g(X\setminus\{\mathbf{x}\}\cup Y) - g(X\cup Y)\big]\Big], \tag{3}$$

$$K(\mathbf{x};Y) = \Big\{\prod_{\mathbf{y}\in Y}K(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\ \text{при } |Y|>0\,;\quad 1,\ \text{при } |Y|=0\,.\Big\},$$

$K(\mathbf{x}) = \exp(-U(\mathbf{x})/T) - 1$, $\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^d$, $W(\mathbf{x};X) = \exp\Big(-\sum_{\mathbf{y}\in X}U(\mathbf{x}-\mathbf{y})/T\Big)$.

Теорема 1. *Уравнение (2) с оператором (3), разрешимы однозначным образом в области* $\{z : \mathrm{Re}\,z\geq 0\}\subset\mathbf{C}$ *и их решения* $\mathsf{p} = \langle p(X,z); X\subset\mathbf{Z}^3\rangle$ *являются аналитическими функциями от* z *при* $\mathrm{Re}z>0$, *если* $T>\|U\|/|\ln\kappa_0|$, *где* κ_0 *— единственный корень полинома* $\kappa^4+4(\kappa-1)$ *на отрезке* $[0,1]$.

Литература

1. *Добрушин Р.Л.* Гиббсовские случайные поля для решётчатых систем с попарным взаимодействием // Функциональный анализ и его приложения.– 1968.– 4(1).– С.31-43.

О ЗАДАЧЕ ГАШЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВИЖУЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

©2020 *Л. А. Муравей, А. М. Романенков*
(Москва; *l_muravey@mail.ru*; *romanaleks@gmail.com*)

1. Введение.

Особенностью задач гашения колебаний гиперболических систем является то, что в них оптимальный режим зависит не только от времени, но и от пространственных переменных. Поэтому для нахождения минимального времени гашения колебаний и соответствующего ему оптимального уравнения используется метод сведения этой задачи к так называемой тригонометрической проблеме моментов. Наиболее значимой работой в этом направлении является статья 1983 года Д. Лагнесса [1], в которой исследовалось, в частности, возможность гашения колебаний закреплённой струны:

$$\frac{1}{a^2}w_{tt} - w_{xx} + q\left(x\right)w = g\left(x,t\right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0 \qquad (1)$$

Решение соответствующей смешанной задачи рассматривается как обобщённое, для которого определён интеграл энергии

$$E\left(t\right) = \int_0^l \left[w_t^2\left(x,t\right) + a^2\left(w_x^2\left(x,t\right) + q\left(x\right)w^2\left(x,t\right)\right)\right]dx, \quad (2)$$

который при $g\left(x,t\right) \equiv 0$, не зависит от t и равен значению $E(0)$.