

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(НИУ "БелГУ")

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ
НАУК

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**ДИФФУЗИОФОРЕЗ КРУПНЫХ НЕЛЕТУЧИХ
РАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ КАПЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОЙ
ФОРМЫ.**

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 03.03.02 Физика
очной формы обучения, группы 07001310
Зиньковой Ирины Михайловны

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Малай Н.В.

Белгород 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
I. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия	6
II. Решение уравнений теплопроводности и диффузии	11
III. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления	17
IV. Вывод выражения для силы и скорости диффузиофореза крупной равномерно нагретой нелетучей капли сферической формы. Анализ полученных результатов	22
Заключение.....	26
Литература.....	27

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В современной науке и технике, в областях химических технологий, гидрометеорологии, охраны окружающей среды и т.д. широко применяют многофазные системы. Наибольший интерес представляют аэродисперсные системы, состоящие из двух фаз, одна из которых есть вязкая газообразная среда, а вторая - взвешенные в ней частицы, которые называют аэрозолями. Аэрозольные частицы могут оказать значительное влияние на протекание физических и физико-химических процессов различного вида в аэродисперсных системах.

Одной из основных проблем механики аэродисперсных систем, активно разрабатываемой как в нашей стране, так и за рубежом, является проблема теоретического описания поведения взвешенных частиц в вязких неоднородных газообразных средах. Без знания закономерностей этого поведения невозможно моделирование эволюции аэродисперсных систем и решение такого важного вопроса как целенаправленное воздействие на них.

Если на поверхности аэрозольной частицы происходит испарение (сублимация) или конденсация образующего их вещества, то такие частицы называют летучими. В случае отсутствия фазового перехода на поверхности частиц их называют нелетучими.

В физике аэродисперсных систем встречаются аэрозольные частицы различных размеров. Размер частиц аэродисперсной фазы находится в очень широких пределах: от макроскопических (~ 500 мкм) до молекулярных (~ 10 Нм) значений; варьирует соответственно и концентрация частиц – от одной частицы до высококонцентрированных систем ($> 10^{10}$ см $^{-3}$). В настоящее время, с учетом развития нанотехнологий, большую перспективу представляет применение ультрадисперсных (нано-) частиц, например, в наноэлектронике, наномеханике и т.д. Аэрозольные частицы могут отличаться также и формой поверхности (сферические, цилиндрические, сфероидальные и т.д.).

Для классификации аэрозольных частиц по размерам в многокомпонентных системах проводят из сравнения характерных размеров частицы R со средней длиной свободного пробега молекул λ . Для этого применяют критерий Кнудсена: $K_n = \frac{\lambda}{R}$ ($\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$). Частицы называются крупными, если $K_n \leq 0.01$ и умеренно крупными при $0.01 \leq K_n \leq 0.3$, где λ_k - средняя длина свободного пробега газовых молекул k - сорта.

В многокомпонентных газах с неоднородным распределением темпе-

ратуры и концентраций возникает упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярной природы [1-3]. Их появление вызвано передачей не скомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. В частности, движение частиц относительно центра инерции неоднородной по составу газовой смеси при наличии градиентов относительных концентраций ее компонентов называется диффузиофоретическим. Скорость, которую приобретают частицы, когда сила вязкого сопротивления среды уравнивает диффузиофоретическую, называется скоростью диффузиофореза. Диффузиофорез играет важную роль в промышленности, природе, медицине, сельском хозяйстве и т.д.

При теоретическом описании явления диффузиофореза важным понятием в физике аэродисперсных систем является относительный перепад температуры. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы T_{iS} и температурой вдали от нее T_∞ к последней. Относительный перепад температуры считается малым, если имеет место следующее неравенство $\frac{(T_{iS} - T_\infty)}{T_\infty} \ll 1$. В этом случае коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) считаются слабо зависящими от средней температуры поверхности частицы, а газ рассматривается как несжимаемая среда.

В дипломной работе рассматривается диффузиофорез крупной равномерно нагретой нелетучей капли сферической формы в бинарной газовой смеси при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

Тема исследования. Диффузиофорез крупных равномерно нагретых нелетучих капель сферической формы.

Объектом исследования является изучение явления диффузиофореза в газообразной среде.

Предметом исследования: влияние равномерного нагрева на силу и скорость диффузиофореза крупной нелетучей капли сферической формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

Цель исследования - получить аналитические выражения для диффузиофоретической силы, действующей на равномерно нагретую нелетучую крупную аэрозольную частицу сферической формы и скорости диффузиофореза.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие *задачи исследования*:

— изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в сферической системе координат;

— решить уравнения теплопроводности, диффузии и систему уравнений Навье-Стокса с соответствующими граничными условиями;

— получить аналитические выражения для диффузиофоретической силы, действующей на крупную равномерно нагретую нелетучую каплю сферической формы и скорости ее диффузиофореза при малых относительных перепадах температуры;

— провести качественный анализ влияния равномерного нагрева поверхности на силу и скорость диффузиофореза.

Научная новизна исследования. В дипломной работе изучается влияние равномерного нагрева поверхности крупной нелетучей капли сферической формы на диффузиофорез в неоднородной по составу бинарной газовой смеси.

Практическая значимость исследования заключается в том, что его материалы и выводы дополняют и углубляют исследования по данной проблеме и могут быть использованы при оценке скорости диффузиофореза равномерно нагретой крупной нелетучей капли в каналах; при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц.

Апробация исследования. Основные результаты докладывались на Международной научно-практической и научно-методической конференции профессорского и преподавательского состава и аспирантов «Современные проблемы математики и механики» (г. Белгород, БУКЭП, 3 апреля 2017 г.).

Структура работы. Дипломная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы.

Глава I. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим равномерно нагретую крупную сферическую нелетучую каплю радиуса R , взвешенную в неоднородной по концентрации бинарной газовой смеси с температурой T_e , плотностью ρ_e , теплопроводностью λ_e и вязкостью μ_e . До средней температуры поверхности частицы T_{iS} незначительно отличающейся от температуры окружающей ее бинарной газовой смеси можно нагреть, например, в поле лазерного излучения. В работе считается величина T_{iS} заданной.

С помощью внешних источников в объеме бинарной газовой смеси поддерживается постоянный малый градиент относительных концентраций ее компонентов, которые мы обозначим, соответственно, $\nabla C_{1\infty}$ и $\nabla C_{2\infty}$. Здесь $C_1 = \frac{n_1}{n_e}$, $C_1 + C_2 = 1$, $n_e = n_1 + n_2$ - полное количество молекул в единице объема, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$ - плотность бинарной газовой смеси, $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, n_1 , m_1 и n_2 , m_2 - соответственно, концентрация и масса молекул первого и второго компонента бинарной газовой смеси. Поскольку $C_1 + C_2 = 1$, то $\nabla C_1 = -\nabla C_2$ и, следовательно, для описания полей относительных концентраций бинарной газовой смеси достаточно описать одну из компонент смеси, например, первую компоненту C_1 (решить уравнение диффузии с соответствующими граничными условиями).

Заданный вдали от нелетучей капли (на бесконечности) малый постоянный градиент относительной концентрации $\nabla C_{1\infty}$ вызывает неоднородное распределение концентрации в окрестности капли, что приводит к ее диффузиофоретическому движению. Индексы "e" и "i" здесь и далее будем относить к газу и капле, индексом "s" - обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности капли равной T_{iS} , а индексом " ∞ " - обозначены средние значения физических величин, характеризующие бинарную газовую среду в отсутствии внешнего градиента концентрации $\nabla C_{1\infty}$.

Предполагается, что крупная равномерно нагретая нелетучая капля при своем движении сохраняет сферическую форму. Это справедливо, если силы внешнего давления малы по сравнению с давлением от поверхностного натяжения, что можно выразить в виде соотношения

$$\frac{\sigma}{R} \gg \mu_e \frac{|U|}{R},$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела капли - бинарная газовая смесь; $|U|$ - абсолютное значение скорости газовой смеси относительно капли.

Задача решается в сферической системе координат r, θ, φ ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$), начало которой совпадает с центром масс нелетучей капли. При указанном выборе начала системы координат каплю можно считать покоящейся, а бинарную смесь - движущейся с постоянной скоростью U_∞ относительно центра капли (см. рис.). Таким образом, наша задача сводится к анализу обтекания нелетучей капли бесконечным плоскопараллельным потоком, скорость которого U_∞ подлежит определению. Определенная в такой системе координат скорость газа на бесконечности равна с обратным знаком величине скорости диффузиофореза капли. Вектор $\nabla C_{1\infty}$ направлен вдоль полярной оси $z = r \cos \theta$. Распределения скорости V_e , давление P_e , температуры T_e и относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси C_1 должны быть симметричны относительно оси, проходящей через центр, т.е. зависят только от радиальной координаты r и полярного угла θ .

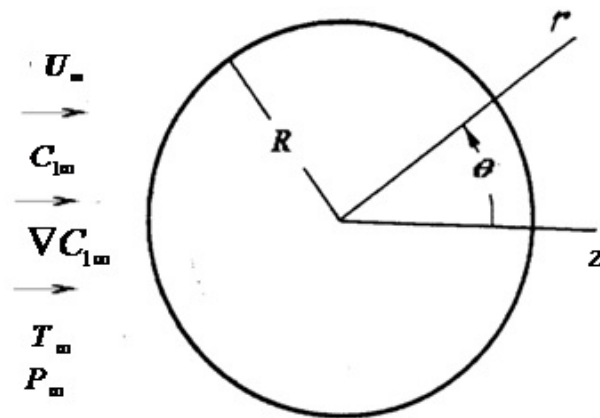


Рис. 1: Обтекание крупной равномерно нагретой нелетучей капли

Остановимся на некоторых аспектах при описании диффузиофореза равномерно нагретой нелетучей капли:

1. характерные значения времен установления распределения полей концентраций, температуры и скорости течения в среде малы по сравнению с характерным временем ее нагрева. Будем считать, что в силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации процессы теплопереноса и массопереноса в системе капля - газ протекают квазистационарно;

2. предполагается, что примеси в капле отсутствуют, т.е. она образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

Определяющими параметрами в нашей задаче являются материальные постоянные $\mu_e, \rho_e, \lambda_e, c_p$ (удельная теплоемкость при постоянном давлении) и сохраняющиеся в процессе движения нелетучей сферической капли $R, |\nabla C_{1\infty}|, T_\infty$ и U_∞ ($U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$). Из этих параметров можно составить три безразмерные комбинации: числа Рейнольдса и Пекле и $\varepsilon = R|\nabla C_{1\infty}| \ll 1$. Малость последнего параметра вытекает из следующих соображений. Величина $|\nabla C_{1\infty}|$, как правило, не больше $10^3 \text{ м}^{-1} \div 10^4 \text{ м}^{-1}$. В свою очередь, для крупных капель $10 \cdot 10^{-6} \leq R \leq 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, и тогда $\varepsilon = R|\nabla C_{1\infty}| \ll 1$.

С учетом указанных выше допущений, распределения массовой скорости \mathbf{V}_e , давления P_e , температуры T_e и относительной концентрации первого компонента C_1 описываются следующей стационарной системой уравнений [4,5]:

$$\mu_e \Delta \mathbf{V}_e = \nabla P_e, \quad \text{div} \mathbf{V}_e = 0, \quad (1)$$

$$\mu_i \Delta \mathbf{V}_i = \nabla P_i, \quad \text{div} \mathbf{V}_i = 0, \quad (2)$$

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta C_1 = 0. \quad (3)$$

Система уравнений (1) - (3) решалась со следующими граничными условиями в сферической системе координат. На поверхности нелетучей равномерно нагретой нелетучей капли ($r = R$) учитываются:

— непроницаемость поверхности капли для радиального потока второго компонента бинарной газовой смеси

$$n_2 V_r^e + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

— непроницаемость поверхности капли для радиального потока первого компонента бинарной газовой смеси

$$n_1 V_r^e - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Здесь в (4) - (5) $n_2 V_r^e, n_1 V_r^e$ - радиальные конвективные потоки соответствующих компонентов, а $D_{12} \frac{n_e m_1}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r}, D_{12} \frac{n_e m_2}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r}$ - радиальные диффузионные потоки.

— непроницаемость поверхности капли для радиальной компоненты массовой скорости внутри капли

$$V_r^i = 0, \quad (6)$$

— разность касательных составляющих скоростей внешней и внутренних сред равна сумме диффузионного скольжения, пропорционального коэффициенту K_{DS} [1-3]

$$V_\theta^e - V_\theta^i = K_{DS} \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial C_1}{\partial \theta}, \quad (7)$$

— температура поверхности капли постоянна

$$T_e = T_{iS}, \quad (8)$$

— непрерывность касательных составляющих тензора напряжений на поверхности капли

$$\mu_e \left(\frac{\partial V_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r^e}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^e}{r} \right) = \mu_i \left(\frac{\partial V_\theta^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r^i}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^i}{r} \right). \quad (9)$$

Рассмотрим граничные условия вдали от крупной равномерно нагретой нелетучей капли, т.е. при $r \rightarrow \infty$:

— в качестве граничных условий для радиальной V_r^e и тангенциальной V_θ^e составляющих массовой скорости \mathbf{V}_e можно записать:

$$\mathbf{V}_e = U_\infty \cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta, \quad (10)$$

— для температуры T_e , давления P_e и относительной концентрации C_1 справедливы условия :

$$T_e = T_\infty, \quad P_e = P_\infty, \quad C_1 = C_{1\infty} + |\nabla C_{1\infty}| r \cos\theta, \quad (11)$$

Учтем конечность скорости и давления в центре аэрозольной частицы, при $r \rightarrow 0$:

$$P_i \neq \infty, \quad |\mathbf{V}_i| \neq \infty. \quad (12)$$

В приведенных выше уравнениях газовой динамики и граничных условиях для крупной частицы введены следующие обозначения: D_{12} - коэффициент взаимной диффузии; λ_e, λ_i - коэффициенты теплопроводности газообразной среды и капли; \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ - единичные векторы сферической системы координат.

Общая сила, действующая на частицу в сферической системе координат, определяется по формуле [4,5]:

$$F = \int_{(S)} (-P_e \cos\theta + \sigma_{rr} \cos\theta - \sigma_{r\theta} \sin\theta) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (13)$$

Здесь $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ - компоненты тензора напряжений в сферической системе

координат, $\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial V_r^e}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial V_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r^e}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^e}{r} \right).$

При нахождении силы и скорости диффузиофореза крупной равномерно нагретой нелетучей капли сферической формы мы ограничимся первой поправкой малости по $\varepsilon = R|\nabla C_{1\infty}|$.

Глава II. Решение уравнений теплопроводности и диффузии.

Чтобы найти силу и скорость диффузиофореза необходимо знать поле температуры и распределение концентрации первого компонента бинарной газовой смеси в окрестности равномерно нагретой нелетучей капли. Для этого необходимо решить уравнения (3). В общем случае уравнение теплопереноса имеет следующий вид [5]:

$$\rho_e c_p (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e. \quad (14)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Здесь слева — конвективный перенос тепла (за счет движения бинарной газовой смеси), а справа — перенос тепла, обусловленный теплопроводностью.

Скорость диффузиофореза равна взятой с обратным знаком скорости центра инерции среды на большом расстоянии от частицы, поэтому

$$|V_e| \sim |K_{DS}| D_{12} \left| \frac{\Delta C_1}{L} \right| \sim |K_{DS}| D_{12} |\nabla C_{1\infty}|. \quad (15)$$

Отношение правой части уравнения (14) к его левой части равно:

$$\frac{c_p \rho_e (\mathbf{V}_e \cdot \nabla T_e)}{\lambda_e \Delta T_e} \sim \frac{K_{DS} D_{12}}{\chi_e} R |\nabla C_{1\infty}|. \quad (16)$$

Здесь $\chi_e = \lambda_e / (c_p \rho_e)$ коэффициент температуропроводности.

Для большинства газов величина $\frac{K_{DS} D_{12}}{\chi_e}$ всегда меньше единицы.

Поэтому величина, стоящая в (16), всегда меньше $R |\nabla C_{1\infty}|$. Следовательно, в уравнении (15) можно пренебречь правой нелинейной частью, и мы получаем уравнение (3), т.е.

$$\Delta T_e = 0. \quad (17)$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения диффузии. Чтобы найти распределение концентрации первого компонента бинарной газовой смеси в окрестности нелетучей капли необходимо решить уравнение конвективной диффузии [5]:

$$(\mathbf{V}_e \cdot \nabla)C_1 = D_{12} \Delta C_1, \quad (18)$$

где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии.

Линеаризуя это уравнение по аналогии с конвективным уравнением теплопереноса, получаем:

$$\Delta C_1 = 0. \quad (19)$$

Уравнения (17), (19) решаются в сферической системе координат методом разделения переменных. Рассмотрим решение уравнения

$$\Delta T_e = 0.$$

В сферической системе координат оно имеет вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) = 0,$$

перейдем в этом уравнении к новым переменным: $y = r/R$, $x = \cos \theta$ и, введем безразмерную температуру $t_e = T_e/T_\infty$. В результате получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial t_e}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - x^2 \right) \frac{\partial t_e}{\partial x} \right] = 0, \quad (20)$$

Будем искать решение полученного уравнения в виде:

$$t_e(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{en}(y) P_n(x), \quad (21)$$

где $t_{en}(y)$ — произвольная функция, зависящая от координаты y , а $P_n(x)$ — полиномы Лежандра [6,7,8].

Полиномы Лежандра могут быть определены представлением

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right],$$

которое называется формулой Родрига [8]. В частности: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$. В дальнейшем нам потребуются следующие свойства полиномов Лежандра:

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] + n(n+1) P_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Подставляя (21) в (20) и, учитывая свойство полиномов Лежандра, получаем следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения функции $\tau_{en}(y)$:

$$y^2 \frac{d^2 \tau_{en}}{dy^2} + 2y \frac{d\tau_{en}}{dy} - n(n+1) \tau_{en} = 0. \quad (22)$$

Решение уравнения (22) ищем в виде:

$$\tau_{en}(y) = y^\nu. \quad (23)$$

После подстановки (23) в (22), получаем следующее характеристическое уравнение: $\nu^2 + \nu - n(n+1) = 0$, корни которого равны соответственно $\nu_1 = n$, $\nu_2 = -(n+1)$.

Таким образом, получаем следующее общее решение уравнения $\Delta T_e = 0$:

$$T_e(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_n}{r^{n+1}} + A_n r^n \right) P_n \cos \theta.$$

Аналогично решается уравнение $\Delta C_{1e} = 0$. В сферической системе координат оно имеет вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial C_{1e}}{\partial \theta} \right) = 0,$$

перейдем в этом уравнении к новым переменным: $y = r/R$, $x = \cos \theta$. В результате получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial C_{1e}}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - x^2 \right) \frac{\partial C_{1e}}{\partial x} \right] = 0, \quad (24)$$

Будем искать решение полученного уравнения в виде:

$$C_{1e}(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{en}(y) P_n(x), \quad (25)$$

где $C_{en}(y)$ — произвольная функция, зависящая от координаты y , а $P_n(x)$ — полиномы Лежандра [6,7,8].

Подставляя (25) в (24) и, учитывая свойство полиномов Лежандра, получаем следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения функции $C_{en}(y)$:

$$y^2 \frac{d^2 C_{en}}{dy^2} + 2y \frac{dC_{en}}{dy} - n(n+1)C_{en} = 0. \quad (26)$$

Решение уравнения (26) ищем в виде:

$$C_{en}(y) = y^\nu. \quad (27)$$

После подстановки (27) в (26), получаем следующее характеристическое уравнение: $\nu^2 + \nu - n(n+1) = 0$, корни которого равны соответственно $\nu_1 = n$, $\nu_2 = -(n+1)$.

Таким образом, получаем следующее общее решение уравнения $\Delta C_{1e} = 0$:

$$C_{1e}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M_n}{r^{n+1}} + N_n r^n \right) P_n \cos \theta.$$

Таким образом, рассматривая задачу о диффузиофорезе крупной равномерно нагретой нелетучей капли сферической формы радиуса R при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, температура вне и концентрация первого компонента бинарной газовой смеси подчиняются уравнениям Лапласа:

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta C_1 = 0 \quad r \geq R. \quad (28)$$

Эта система уравнений решается с граничными условиями (4), (5), (8), (11), (13).

Общее решение этих уравнений в сферической системе координат имеет вид:

$$T_e = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_n}{y^{n+1}} + A_n y^n \right) P_n(x),$$

$$C_{1e} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M_n}{y^{n+1}} + N_n y^n \right) P_n(x).$$

Здесь $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, A_n , M_n , N_n , Γ_n — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий (4), (5), (8), (11), (13).

Из граничных условий имеем: $A_0 = 1$, $A_n = 0$ ($n \geq 1$), $\Gamma_0 = \frac{T_{is}}{T_{\infty}} - 1$, $\Gamma_n = 0$ ($n \geq 1$), $N_0 = C_{1\infty}$, $N_1 = R |\nabla C_{1\infty}|$, $N_n = 0$ ($n \geq 2$), $M_0 = 0$, $M_1 = 1/2$, ($n \geq 2$).

Таким образом, имеем следующие выражения для распределения полей температур и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси в окрестности крупной нелетучей капли:

$$t_e(y, \theta) = 1 + \frac{\frac{T_{iS}}{T_\infty} - 1}{y}, \quad (29)$$

$$C_1(y, \theta) = C_{1\infty} + \varepsilon \left(y + \frac{1}{2y^2} \right) \cos\theta. \quad (30)$$

Глава III. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления

Уравнения гидродинамики, описывающие течение газа в окрестности крупной летучей капли (уравнение Навье-Стокса и непрерывности) имеют вид [4,5]:

$$\rho_e(\mathbf{V}_e \nabla) \mathbf{V}_e = -\nabla P_e + \mu_e \Delta \mathbf{V}_e, \quad \text{div } \mathbf{V}_e = 0 \quad \text{при } r > R, \quad (31)$$

$$\rho_i(\mathbf{V}_i \nabla) \mathbf{V}_i = -\nabla P_i + \mu_i \Delta \mathbf{V}_i, \quad \text{div } \mathbf{V}_i = 0 \quad \text{при } r < R. \quad (32)$$

В эти уравнения входит нелинейный (конвективный) член $(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V}$. Если число Рейнольдса много меньше единицы, то этот конвективный член квадратичен по скорости и тогда в уравнениях (31) - (32) мы можем им пренебречь. Это так называемые ламинарные течения. В отличие от случая, когда число Рейнольдса много больше единицы. Такие течения называют турбулентными. В литературе такой способ решения уравнения Навье-Стокса получил название линеаризованные по скорости уравнения Навье-Стокса, который впервые применил Стокс в 1827 году. С учетом выше сказанного имеем следующую систему гидродинамических уравнений, описывающих стационарные поля скорости и давления в окрестности крупной неиспаряющейся капли:

$$\nabla P_e = \mu_e \Delta \mathbf{U}_e, \quad \text{div } \mathbf{U}_e = 0 \quad \text{при } r > R, \quad (33)$$

$$\nabla P_i = \mu_i \Delta \mathbf{U}_i, \quad \text{div } \mathbf{U}_i = 0 \quad \text{при } r < R. \quad (34)$$

Найдем сначала решение уравнения (33). В сферической системе координат уравнение непрерывности и линеаризованного по скорости уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат имеют вид [4,5]:

$$\frac{\partial P_e}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rr}^{(e)}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{rr}^{(e)} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(e)}}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \theta}{r} \sigma_{r\theta}^{(e)} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^{(e)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(e)}}{r} \quad (35)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P_e}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(e)}}{\partial r} + \frac{3}{r} \sigma_{r\theta}^{(e)} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(e)}}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \theta}{r} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(e)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(e)} \right) \quad (36)$$

$$\frac{\partial V_r^e}{\partial r} + \frac{2}{r}V_r^e + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r}V_\theta^e = 0, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(e)} &= 2\mu_e \frac{\partial V_r^e}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(e)} = \frac{2}{r}\mu_e \left(\frac{\partial V_\theta^e}{\partial \theta} + V_r^e \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(e)} &= \frac{2}{r}\mu_e \left(V_r^e + ctg\theta V_\theta^e \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(e)} &= \mu_e \left(\frac{\partial V_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r^e}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^e}{r} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что аналогичным образом запишутся уравнения и для уравнений (34).

$$\frac{\partial P_i}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{rr}^{(i)} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r}\sigma_{r\theta}^{(i)} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^{(i)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}}{r} \quad (38)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P_i}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{3}{r}\sigma_{r\theta}^{(i)} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} \right) \quad (39)$$

$$\frac{\partial V_r^i}{\partial r} + \frac{2}{r}V_r^i + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r}V_\theta^i = 0, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)} &= 2\mu_i \frac{\partial V_r^i}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{2}{r}\mu_i \left(\frac{\partial V_\theta^i}{\partial \theta} + V_r^i \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} &= \frac{2}{r}\mu_i \left(V_r^i + ctg\theta V_\theta^i \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(i)} &= \mu_i \left(\frac{\partial V_\theta^i}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r^i}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^i}{r} \right). \end{aligned}$$

Исходя из граничных условий вдали от крупной летучей капли, будем искать решения системы уравнений (38)–(40) в виде:

$$V_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos\theta G(y), \quad V_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta g(y). \quad (41)$$

Здесь $G(y)$, $g(y)$ – произвольные функции, зависящие от радиальной координаты $y = r|R$.

Связь между функциями $G(y)$, $g(y)$ находим из уравнения непрерывности. Подставляя (41) в (40), получаем:

$$\frac{1}{y^2} \cos\theta \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 G(y) \right) - \frac{1}{y \sin\theta} g(y) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2\theta \right) = 0,$$

$$g(y) = \frac{1}{2} y \frac{dG}{dy} + G(y). \quad (42)$$

Подставляя (41), (42) в уравнения (38)–(39), имеем:

$$\frac{dP_e}{dy} = \mu_e U_\infty \cos\theta \left(\frac{d^2 G}{dy^2} + \frac{4}{y} \frac{dG}{dy} \right), \quad (43)$$

$$\frac{dP_e}{d\theta} = -\mu_e U_\infty \sin\theta \left(\frac{y^2}{2} \frac{d^3 G}{dy^3} + 3y \frac{d^2 G}{dy^2} + 2 \frac{dG}{dy} \right). \quad (44)$$

Уравнение (43) продифференцируем по θ , а уравнение (44) по y и, вычитая, из первого второго получаем обыкновенное дифференциальное четвертого порядка для нахождения функции $G(y)$:

$$y^3 \frac{d^4 G}{dy^4} + 8y^2 \frac{d^3 G}{dy^3} + 8y \frac{d^2 G}{dy^2} - 8 \frac{dG}{dy} = 0 \quad (45)$$

Решение этого уравнения ищем в виде постановки Эйлера [3,4] и, в результате, окончательно имеем следующее выражение для функции $G(y)$:

$$G(y) = \left(A_0 + A_1 y^2 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{y^3} \right), \quad (46)$$

и, учитывая связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ находим выражение для функции $g(y)$:

$$g(y) = \left(A_0 + 2A_1 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_3}{2y^3} \right). \quad (47)$$

Таким образом, имеем следующие выражения для компонент массовой скорости \mathbf{V}_e :

$$\mathbf{V}_e = V_r \mathbf{e}_r + V_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (48)$$

$$V_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos\theta \left(A_0 + A_1 y^2 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{y^3} \right), \quad (49)$$

$$V_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta \left(A_0 + 2A_1 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_3}{2y^3} \right). \quad (50)$$

Подставляя (42) в (40), после интегрирования получаем следующее выражение для поля давления:

$$P_e = P_0 + \mu_e \cos\theta \frac{U_\infty}{Ry^2} \left(10yA_1 + \frac{A_2}{y^2} \right). \quad (51)$$

Таким образом, общим решением системы уравнений Стокса в области $0 \leq y < \infty$

$$\mu \Delta \mathbf{V} = \nabla P, \quad \text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (52)$$

в сферической системе координат являются следующие функции:

$$V_r(y, \theta) = U_\infty \cos\theta \left(A_0 + A_1 y^2 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{y^3} \right), \quad (53)$$

$$V_\theta(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta \left(A_0 + 2A_1 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_3}{2y^3} \right), \quad (54)$$

$$P = P_0 + \frac{U_\infty}{R} \mu \cos\theta \left(10yA_1 + \frac{A_2}{y^2} \right). \quad (55)$$

Как выше мы отмечали, что при плоско-параллельном обтекании крупной равномерно нагретой нелетучей капли сферической формы вся наша область от 0 до ∞ разбивается на две:

I. Область внутри капли, т.е. $0 \leq r \leq R$, где R - радиус нелетучей капли; имеем следующие выражения для компонент массовой скорости и давления:

$$V_r^{(i)} = U_\infty \cos\theta \left(A_0 + A_1 y^2 \right),$$

$$V_\theta^{(i)} = -U_\infty \sin\theta \left(A_0 + 2A_1 y^2 \right),$$

$$P_i = P_{0i} + \frac{U_\infty}{R} \mu_i \cos\theta 10yA_1.$$

II. Область вне нелетучей капли, т.е. $1 \leq r < \infty$:

$$V_r^{(e)} = U_\infty \cos\theta \left(1 + \frac{B_1}{y} + \frac{B_2}{y^3} \right),$$

$$V_\theta^{(e)} = -U_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{B_1}{2y} - \frac{B_2}{2y^3} \right),$$

$$P_e = P_{0e} + \frac{U_\infty}{R^2} \frac{\mu_e \cos\theta}{y^2} B_1.$$

Неизвестные постоянные интегрирования, входящие в эти выражения определяются из граничных условий.

Глава IV. Вывод выражения для силы и скорости диффузиофореза крупной нелетучей капли сферической формы. Анализ полученных результатов

Во второй главе нами получены выражения для распределения полей температуры и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси в окрестности крупной летучей капли, удовлетворяющие нашим граничным условиям, которые имеют следующий вид:

$$t_e(y, \theta) = 1 + \frac{1}{y} \left(\frac{T_{iS}}{T_\infty} - 1 \right), \quad (56)$$

$$C_1(y, \theta) = C_{1\infty} + \varepsilon \left(y + \frac{1}{2y^2} \right) \cos\theta. \quad (57)$$

и в третьей главе в приближении Стокса нами были получены выражения для полей скорости и давления в ее окрестности.

— вне испаряющейся капли ($r > R$):

$$V_r^{(e)} = U_\infty \cos\theta \left(1 + \frac{B_1}{y} + \frac{B_2}{y^3} \right), \quad (58)$$

$$V_\theta^{(e)} = -U_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{B_1}{2y} - \frac{B_2}{2y^3} \right), \quad (59)$$

$$P_e = P_{0e} + \frac{U_\infty}{R} \frac{\mu_e \cos\theta}{y^2} B_1. \quad (60)$$

— внутри испаряющейся капли ($r < R$):

$$V_r^{(i)} = U_\infty \cos\theta \left(A_0 + A_1 y^2 \right), \quad (61)$$

$$(62)$$

$$V_{\theta}^{(i)} = -U_{\infty} \sin\theta \left(A_0 + 2A_1 y^2 \right), \quad (63)$$

$$P_i = P_{0i} + \frac{U_{\infty}}{R} \mu_i \cos\theta \, 10yA_1 \quad (64)$$

Поскольку выражения для компонент массовой скорости и поля давления нам известны, то мы можем найти общую силу, действующую на крупную летучую каплю сферической формы. Полная сила, как мы отмечали в главе 1, определяется интегрированием компонент тензора напряжений по поверхности частицы и она имеет следующий вид [4,5]:

$$F = 2\pi \int_0^{\pi} \left(-P_e \cos\theta + \sigma_{rr} \cos\theta - \sigma_{r\theta} \sin\theta \right) r^2 \sin\theta d\theta,$$

где $\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial V_r^e}{\partial r}$, $\sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial V_{\theta}^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r^e}{\partial \theta} - \frac{V_{\theta}^e}{r} \right)$.

Подставляя сюда соответствующие выражения и после интегрирования, имеем:

$$F = 4\pi R \mu_e U_{\infty} B_1 \quad (65)$$

Из (65) видим, чтобы найти общую силу, необходимо знать коэффициент B_1 . Постоянная интегрирования B_1 определяется из граничных условий на поверхности нашей нелетучей капли и она имеет следующий вид:

$$B_1 = -\frac{3}{2} \frac{1 + \frac{2\mu_e^{(S)}}{3\mu_i^{(S)}}}{1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}}} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{U_{\infty}} K_{DS} \frac{D_{12}^{(S)}}{R \left(1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}} \right)}. \quad (66)$$

Здесь индексом "S" обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности нелетучей капли равной T_{iS} .

Подставляя (66) в выражение (65), получаем, что общая сила, действующая на крупную равномерно нелетучую каплю аддитивно складывается из силы вязкого сопротивления среды \mathbf{F}_μ и диффузиофоретической силы \mathbf{F}_{df} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{df}, \quad (67)$$

где

$$\mathbf{F}_\mu = 6\pi R\mu_e^{(S)}U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z, \quad (68)$$

$$\mathbf{F}_{df} = -6\pi R\mu_e^{(S)} f_{df} \text{grad} C_{1\infty}, \quad (69)$$

где \mathbf{n}_z — единичный вектор в направлении оси OZ.

Коэффициенты f_μ , f_{df} определяются по формулам:

$$f_\mu = \frac{1 + \frac{2\mu_e^{(S)}}{3\mu_i^{(S)}}}{1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}}}, \quad (70)$$

$$f_{df} = K_{DS} \frac{D_{12}^{|S|}}{1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}}}. \quad (71)$$

Приравнивая полную силу \mathbf{F} к нулю, получаем выражение для диффузиофоретической скорости \mathbf{U}_{df} ($\mathbf{U}_{df} = -\mathbf{U}_\infty$):

$$\mathbf{U}_{df} = -\frac{f_{df}}{f_\mu} \text{grad} C_{1\infty}. \quad (72)$$

В дипломной работе получены аналитические выражения, позволяющие оценивать общую силу, действующую на крупную равномерно нагретую нелетучую каплю сферической формы, движущейся во внешнем заданном поле градиента концентрации при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности. В граничном условии на поверхности частицы учтено диффузионное скольжение.

Полученные аналитические выражения для силы и скорости диффузиофореза позволяют провести качественный и количественный анализ влияния средней температуры поверхности частицы (нагрев поверхности) незначительно отличающейся от температуры окружающей ее бинарной газовой смеси на диффузиофорез крупной нелетучей капли.

Из приведенных формул для силы и скорости диффузиофореза видно, что в случае малых относительных перепадов температуры имеет место линейная зависимость влияния средней температуры поверхности частицы на диффузиофорез крупной равномерно нагретой нелетучей капли. Это вытекает, как видно из формул (69), (72), коэффициент динамической вязкости и коэффициент диффузии экспоненциально зависят от температуры. В случае малых относительных перепадов температуры в окрестности нелетучей капли будет иметь место линейная зависимость и вклад будет не более 10

Если не учитывать влияния средней температуры поверхности частицы на диффузиофорез крупной равномерно нелетучей капли, полученные выше формулы переходят в известные ранее полученные формулы [1].

Заключение

В квазистационарном приближении при малых числах Рейнольдса и Пекле (тепловом и диффузионном) получены аналитические выражения, позволяющие оценивать диффузиофоретическую силу и скорость крупной равномерно нагретой нелетучей капли сферической формы, когда средняя температура поверхности капли незначительно отличается от температуры вдали от нее. Проведенный качественный анализ показал, что случае малых относительных перепадов температуры имеет место линейная зависимость влияния средней температуры поверхности частицы (нагрев поверхности) на силу и скорость диффузиофореза крупной равномерно нагретой нелетучей капли сферической формы, который дает вклад не более 10 %.

Список литературы:

1. Галоян В.С., Яламов Ю.И. Движение капель в вязких средах. Ереван: Луйс. 1985. - 209 с
2. Шукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей. Учебное пособие для студентов и аспирантов. М.: МПУ. 1992. 297 с.
3. Шукин Е.Р., Малай Н.В. Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц //Инженерно-физический журнал. 1988. Т. 54. № 4. С. 628-634
4. Дж. Хаппель, Г. Бреннер Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 630 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. Москва: Техничко-теоретической литературы. 1954. 795 с.
6. Н.М. Матвеев Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1967. 409 с.
7. В.А. Шалдырван, В.С. Герасимчук Методы математической физики. М.: Вузовская книга. 2006. 511 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.