Наталья Алексеевна Зинченко
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
доцент,
г. Белгород,
zinchenko@bsu.edu.ru
Наталья Николаевна Мотькина
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
доцент,
г. Белгород,
motkina@bsu.edu.ru
Александр Георгиевич Сокольский
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
доцент,
г. Белгород,
sokolsky@bsu.edu.ru

АНАЛОГ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Natalya Alekseevna Zinchenko
Belgorod National Research Universit,
Associate Professor,
Belgorod,
zinchenko@bsu.edu.ru
Natalya Nikolaevna Motkina
Belgorod National Research Universit,
Associate Professor,
Belgorod,
motkina@bsu.edu.ru
Aleksandr Georgievich Sokolsky
Belgorod National Research Universit,
Associate Professor,
Belgorod,
sokolsky@bsu.edu.ru

ANALOGUE OF THE LAW OF LARGE NUMBERS FOR ADDITIVE FUNCTIONS TWO VARIABLES

В различных разделах теории чисел встречаются аддитивные арифметические функции, т.е. функции, определенные на множестве натуральных чисел и удовлетворяющие условию: $f(m\cdot n) = f(m) + f(n)$ для взаимно простых m и n. Например, функция $\omega(n)$, определяющая количество различных простых делителей числа n, является аддитивной. Легко показать, что для любой аддитивной функции $f(1) = 0$ и, если

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \text{ где } p_i \neq p_j \text{ для } i \neq j,$$

то

$$f(n)=\sum_{1\le i\le k} f(p_i^{\alpha_i}),$$

т.е. аддитивная функция полностью определяется своими значениями от степеней простых сомножителей.

Можно обобщить это понятие на арифметические функции нескольких переменных. Аддитивные арифметические функции нескольких переменных рассматривались в работах [3] и [5].

Будем рассматривать аддитивные функции от двух переменных, определенные на N^2, для которых $f(m_1m_2,n_1n_2)=f(m_1,n_1)+f(m_2,n_2)$ при условии взаимной простоты m_1n_1 и m_2n_2. Например, аддитивной является функция $f(m,n)=\omega(m)+\omega(n)$. Очевидно, что для любой аддитивной функции от двух переменных $f(1,1)=0$. Если

$$m=\prod_{1\le i\le k} p_i^{\alpha_i},\ n=\prod_{1\le j\le s} q_j^{\beta_j},\ (m,n)=1,$$

то

$$f(m,n)=\sum_{1\le i\le k} f(p_i^{\alpha_i},1)+\sum_{1\le j\le s} f(1,q_j^{\beta_j})=\sum_{1\le i\le k}\sum_{1\le j\le s} f(p_i^{\alpha_i},q_j^{\beta_j}).$$

Распределение значений аддитивных функций от пар натуральных чисел весьма хаотично, но в целом, как и для функций от одной натуральной переменной, для многих аддитивных функций двух переменных существуют закономерности распределения их значений. При этом возникает вопрос об отклонениях значений функций от средних значений (или их аналогов) в области $\{1,2,\ldots,M\}\times\{1,2,\ldots,N\}$. В случае аддитивных функций от одной переменной подобные задачи рассматривались в работах [1], [4], [6]. Особенностями работ [1] и [6] является аналогия с доказательством П.Л.Чебышева закона больших чисел. Глубокое содержание этого закона состоит в том, что в то время, как отдельная случайная величина может часто принимать значения, далекие от ее среднего значения, среднее арифметическое большого числа случайных величин ведет себя в этом отношении совершенно иначе. Такая величина очень мало рассеяна и с подавляющей вероятностью принимает лишь значения, очень близкие к среднему значению. Происходит это потому, что при взятии среднего арифметического случайные уклонения в ту или другую сторону взаимно уничтожаются, вследствие чего суммарное уклонение в большинстве случаев и оказывается малым. В случае аддитивных функций их значения являются аналогами случайных величин. В монографии А.Г. Постникова приводится подробное доказательство неравенства, из которого следует аналог закона больших чисел для аддитивных функций одной переменной [2, с. 295-303].

Опираясь на идеи работ [1] и [2], можно доказать неравенство, из которого будет следовать аналог закона больших чисел для аддитивных функций двух переменных.

Теорема. Пусть $g(m,n)-$ аддитивная комплекснозначная функция,

$$A(M,N,g)=\frac{1}{MN}\sum_{p^\alpha\le M}\sum_{q^\beta\le N} g(p^\alpha,q^\beta),$$

$$B^2(M,N,g)=\sum_{p^\alpha\le M}\sum_{q^\beta\le N}\frac{|g(p^\alpha,q^\beta|^2}{p^\alpha q^\beta}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\frac{1}{MN}\sum_{m\le M}\sum_{n\le N}|g(m,n)-A(M,N,g)|^2<cB^2(M,N,g),$$

где c – константа, не зависящая от g.

С помощью этой теоремы можно показать, что для всех аддитивных функций их значения от почти всех пар натуральных чисел (m,n) из области $\{1,2,\ldots,M\}\times\{1,2,\ldots,N\}$ «мало» отличаются от величины $A(M,N,g)$, являющейся аналогом «среднего значения».

Список литературы

1. Кубилюс, Й.П. Вероятностные методы в теории чисел / Й.П. Кубилюс. – Вильнюс: Госполитиздат Литов. ССР, 1962. – 220 с.
2. Постников, А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел / А.Г. Постников. – Москва: Наука, 1971. – 416 с.
3. Delange, M.H. Sur les fonctione additives de plusieurs entire / M.H. Delange // C.R. Acad. Sc., t. 278. - Paris, 1974, p. 63-66.
4. Hardy, G.H. The normal number of prime factor. / G.H. Hardy, S. Ramanujan // Quart. J. Hure and Appl. Math., 48. - 1917, p. 76-92
5. Mauclare, M. J.-L. Quelques resultants sur les fonctions additives a deux variables. / M. J.-L. Mauclare // C.R. Acad. Sc., t. 274. - Paris, 1972, p. 373-376
6. Turan, P. On a theorem of Hardy and Ramanujan / P. Turan // J. London Math. Soc., t. 9 (4). – London, 1934, p. 274 – 276