ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИЗЛОЖЕНІЕ

НѢКОТОРЫХЪ СВѢДѢНІЙ

ИЗЪ

ТЕОРІИ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ.

СОСТАВИЛА

Вѣра Шиффъ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1907.

[illegible]

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИЗЛОЖЕНІЕ

НѢКОТОРЫХЪ СВѢДѢНІЙ

ИЗЪ

ТЕОРІИ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ.

СОСТАВИЛА

Вѣра Шиффъ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1907.

Элементарное изложенiе нѣкоторыхъ свѣдѣнiй изъ теорiи опредѣлителей.

Изъ элементарной алгебры извѣстно, что, если уравненiя:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

совмѣстны, то

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \tag{1}$$

Лѣвую часть этого равенства называютъ «опредѣлителемъ» и обозначаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{α}$$

a_1, a_2, b_1 и b_2 называются «элементами» опредѣлителя; такъ какъ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1, \tag{α}$$

то отсюда ясно видно, какъ изъ обозначенiя (α) получить выраженiе (1), именно: для этого надо взять съ плюсомъ произведенiе элементовъ, расположенныхъ по дiагонали слѣва направо и со знакомъ минусъ произведенiе элементовъ, расположенныхъ по дiагонали справа налѣво. Опредѣлитель, составленный изъ четырехъ элементовъ называется «опредѣлителемъ 2-аго порядка».

Въ обозначенiи (α) опредѣлителя элементы a_1 и a_2, расположены, какъ говорятъ, въ первомъ столбцѣ, а элементы b_1 и b_2

во второмъ. Далѣе, элементы a_1, b_1 расположены въ первой строкѣ, а элементы a_2 и b_2 во второй.

Разсмотримъ свойства опредѣлителя 2-аго порядка.

1) Если мы въ опредѣлителѣ 2-аго порядка поставимъ 2-ой столбецъ на мѣсто 1-аго, то получимъ:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2,$$

т. е. *при перестановкѣ одного столбца на мѣсто другого, опредѣлитель мѣняетъ знакъ.*

2) *Если мы элементы, расположенные въ столбцы, расположимъ въ строки, то получимъ:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

т. е. опредѣлитель не мѣняется.

Такъ какъ опредѣлитель мѣняетъ знакъ при перестановкѣ одного столбца на мѣсто другого, то онъ также мѣняетъ знакъ отъ перестановки одной строки на мѣсто другой.

Если въ опредѣлители два столбца одинаковы, то опредѣлитель равенъ нулю.

Если мы въ опредѣлителѣ всѣ элементы перваго столбца умножимъ на одно и то же число k, то получимъ:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1 b_2 - ka_2 b_1 = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

т. е. *при умноженіи всѣхъ элементовъ одного столбца на число k, умножается и опредѣлитель на то же число.*

Если мы имѣемъ такой опредѣлитель, въ которомъ элементы перваго столбца не суть одночлены, напр.:

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

то опредѣлитель этотъ равенъ

$$(a_1+\alpha_1)b_2-(a_2+\alpha_2)b_1=a_1b_2-a_2b_1+\alpha_1b_2-\alpha_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

т. е. *равенъ суммѣ такихъ двухъ опредѣлителей, у которыхъ вторые столбцы одинаковы со вторымъ столбцомъ даннаго опредѣлителя, а элементы перваго столбца суть слагаемые элементовъ перваго столбца даннаго опредѣлителя.*

Аналогично получимъ, что

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1+\alpha_2 & b_1 \\ a_2+\beta_1+\beta_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \beta_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_2 & b_1 \\ \beta_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что *опредѣлитель не измѣнится, если къ элементамъ перваго столбца прибавить кратные, соотвѣтствующихъ элементовъ 2-аго столбца*, т. е. что

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Разсмотримъ теперь систему двухъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными, т. е. систему:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} a_1x+b_1y-c_1=0 \\ a_2x+b_2y-c_2=0 \end{aligned}\right\}.$$

Если мы одно изъ неизвѣстныхъ, напр. y, на время будемъ считать извѣстнымъ, то изъ необходимаго условія совмѣстности ур. (1) получимъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1y-c_1 \\ a_2 & b_2y-c_2 \end{vmatrix}=0,\ \text{т. е.}\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}y-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0,$$

аналогично, считая на время x извѣстнымъ, получаемъ:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1x-c_1 \\ b_2 & a_2x-c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

или, что одно и то же:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, при условіи, что $a_1 b_2 - a_2 b_1$ не нуль, получаемъ:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

т. е. получаемъ рѣшенія системы (1). Провѣримъ, что полученныя рѣшенія дѣйствительно удовлетворяютъ даннымъ ур.

Подставляя въ ур. системы (1) вмѣсто x и y, полученныя для нихъ значенія, имѣемъ:

$$a_1(c_1 b_2 - c_2 b_1) + b_1(a_1 c_2 - a_2 c_1) - c_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

$$a_2(c_1 b_2 - c_2 b_1) + b_2(a_1 c_2 - a_2 c_1) - c_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0,$$

т. е. тождества.

Если мы имѣемъ три ур. первой степени съ двумя неизвѣстными, т. е. ур.:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \qquad (\alpha)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \qquad (\beta)$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0, \qquad (\gamma)$$

то, подставляя вмѣсто x и y ихъ значенія изъ ур. (β) и (γ) въ ур. (α), получимъ, что необходимое условіе совмѣстности этихъ ур. есть:

$$(1) \qquad a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

лѣвая часть этого равенства называется «опредѣлителемъ 3-яго порядка» и обозначается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Опредѣлитель 3-яго порядка состоитъ изъ 9-ти элементовъ, располагаемыхъ по три въ столбецъ.

Такъ какъ

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

равенъ выраженію (1), то отсюда видно правило, какъ изъ обозначенія (α) получить выраженіе (1), именно надо 1-ый элементъ перваго столбца умножить на опредѣлитель 2-аго порядка, составленный изъ элементовъ не стоящихъ ни въ одномъ ряду, ни въ одномъ столбцѣ со взятымъ элементомъ 1-аго столбца, затѣмъ надо взять со знакомъ минусъ 2-ой элементъ перваго столбца и умножить его на опредѣлитель 2-аго порядка, составленный изъ элементовъ, не стоящихъ съ b_1 ни въ одномъ столбцѣ, ни въ одной строкѣ, и наконецъ надо взять третій элементъ перваго столбца и умножить его на опредѣлитель 2-аго порядка, составленный изъ элементовъ, не стоящихъ со взятымъ ни въ одной строкѣ, ни въ одномъ столбцѣ.

Разсмотримъ свойства опредѣлителя 3-яго порядка.

1) Если мы въ опредѣлителѣ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

который для краткости будемъ обозначать черезъ Δ, переставимъ 2-ой столбецъ на мѣсто перваго, то получимъ:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + b_3(a_1c_2 - a_2c_1) =$$

$$= -a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_1c_3 - b_3c_2) + a_3(b_2c_1 - b_1c_2),$$

откуда видно, что *при перестановкѣ одного столбца на мѣсто другого, опредѣлитель мѣняетъ знакъ.*

Если мы въ опредѣлителѣ Δ элементы, расположенные въ столбцы, расположимъ въ строки, то получимъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1),$$

т. е. опредѣлитель не мѣняется. Мы видѣли, что при перестановкѣ одного столбца на мѣсто другого опредѣлитель мѣняетъ знакъ, слѣдовательно и при перестановкѣ одной строки на мѣсто другой опредѣлитель также измѣнитъ знакъ.

Если мы всѣ элементы перваго столбца опредѣлителя Δ помножимъ на k, то получимъ:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ka_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - ka_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + ka_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

т. е. опредѣлитель Δ умножится на k.

Если имѣемъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+\alpha_1) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - (a_2+\alpha_2) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (a_3+\alpha_3) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

то легко замѣтить, что онъ равенъ слѣдующей суммѣ двухъ опредѣлителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и аналогично докажемъ, что

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1+\beta_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2+\beta_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3+\beta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & b_1 & c_1 \\ \beta_2 & b_2 & c_2 \\ \beta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Если въ опредѣлителѣ Δ два столбца одинаковы, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

то переставляя второй столбецъ на мѣсто перваго, мы, по раньше доказанному, должны получить $-\Delta$, но въ данномъ случаѣ $\Delta = -\Delta$, слѣдоват. Δ равно нулю, откуда слѣдуетъ, что опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Раньше мы имѣли, что опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

но, какъ легко провѣрить

$$\Delta = b_1 \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Опредѣлители 2-аго порядка, которые стоятъ множителями при $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, называются минорами и обозначаются, соотвѣтственно черезъ $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$, такъ что, согласно этимъ обозначеніямъ,

$$\Delta = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 = b_1 B_1 - b_2 B_2 + b_3 B_3 = c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3,$$

отсюда видно, что

$$b_1 A_1 - b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0,\ \ c_1 A_1 - c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0,$$

$$a_1 B_1 - a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0,\ \ c_1 B_1 - c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0.$$

$$a_1 C_1 - a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0,\ \ b_1 C_1 - b_2 C_2 - b_3 C_3 = 0.$$

Изучивъ свойства опредѣлителя 3-яго порядка, переходимъ къ рѣшенію системы трехъ уравненій первой степени съ 3-мя неизвѣстными. Положимъ, что имѣемъ слѣдующую систему ур.:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z - d_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha).$$

Считая на время одно изъ неизвѣстныхъ за извѣстное, напр. z, мы изъ необходимаго условія совмѣстности ур. (α) получаемъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 z - d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 z - d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 z - d_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, при условіи, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

получаемъ

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

аналогично получимъ, что

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{и} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

для провѣрки подставляемъ полученныя для x, y и z значенія въ лѣвую часть перваго ур. системы (α), тогда получаемъ:

$$a_1 \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

т. е. выраженіе, которое называется опредѣлителемъ 4-аго порядка и обозначается слѣд. образомъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

при чемъ раскрывается онъ по тому же правилу, какъ и опредѣлитель 3-яго порядка, очень легко провѣрить, что опредѣлитель этотъ, имѣющій два одинаковыхъ столбца, равенъ нулю; подставляя вмѣсто x, y, z, полученныя для нихъ значенія лѣвыя части 2-аго и 3-яго ур. системы (α) получимъ:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_2 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_3 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}, \text{ т. е. нули,}$$

слѣд. x, y, z удовлетворяютъ системѣ ур. (α). Совершенно аналогичными разсужденіями получили бы мы рѣшенія системы 4-хъ ур. съ 4-мя неизвѣстными первой степени и т. д.

Переходимъ теперь къ изслѣдованію рѣшеній системы ур. Начинаемъ съ системы двухъ ур. съ двумя неизвѣстными первой степени, т. е. съ системы:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y - c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y - c_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (\alpha)$$

Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

то изъ равенствъ

$$x\Delta - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad y\Delta - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

получаемъ для x и y конечныя опредѣленныя рѣшенія, если же $\Delta = 0$, то, для изслѣдованія полученныхъ рѣшеній поступаемъ слѣдующимъ образомъ: обозначаемъ выраженіе $a_1 x + b_1 y - c_1$ черезъ s_1, а $a_2 x + b_2 y - c_2$ черезъ s_2, тогда s_1 и s_2 суть величины, зависящія отъ значеній x и y и обращающіяся одновременно въ нуль только при тѣхъ значеніяхъ x и y, которыя суть корни системы ур. (α).

Помножаемъ обѣ части равенства (1) $a_1 x + b_1 y - c_1 = s_1$ на a_2, а обѣ части равенства (2) $a_2 x + b_2 y - c_2 = s_2$ на a_1 и почленно вычитаемъ, тогда получаемъ

(3) $x(a_1 a_2 - a_1 a_2) + y(b_1 a_2 - a_1 b_2) - (c_1 a_2 - a_2 c_1) = s_1 a_2 - s_2 a_1$.

Помножаемъ обѣ части равенства (1) на b_2, а равенства (2) на b_1 и почленно вычитаемъ, тогда получаемъ:

(4) $x(a_1 b_2 - a_2 b_1) + y(b_1 b_2 - b_2 b_1) - (c_1 b_2 - c_2 b_1) = s_1 b_2 - s_2 b_1$.

Изъ равенствъ (3) и (4) видно, что при $\Delta = 0$ возможны два случая: случай (a) ур. совмѣстны, тогда при $\Delta = 0$, непремѣнно одновремѣнно $c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0$ и $c_1 a_2 - a_2 c_1 = 0$, мы получаемъ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$, т. е. вмѣсто двухъ ур. имѣемъ одно и можемъ только одно изъ неизвѣстныхъ выразить въ зависимости отъ другого.

Случай (b), если при $\Delta = 0$, $c_1 b_2 - c_2 b_1 \gtrless 0$, *то не существуетъ конечныхъ рышеній для* x *и* y и говорятъ, что системѣ ур. (α) удовлетворяютъ $x = \infty$ и $y = \infty$.

Если въ системѣ (α) $c_1 = c_2 = 0$, то подобная система ур.:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{aligned}\right\}$$

называется системою «однородныхъ уравненій» и для опред. x и y мы имѣемъ равенства: $x . \Delta = 0$, $y . \Delta = 0$, изъ которыхъ видно, что если x и y одновременно не могутъ равняться нулю, то непремѣнно $\underline{\Delta = 0}$.

Разсмотримъ теперь рѣшенія системы 3-хъ ур. съ тремя неизвѣстными первой степени, именно:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z - d_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\beta).$$

Для опред. x, y и z мы имѣемъ, обозначая

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

черезъ Δ, слѣдующія равенства:

$$x\Delta - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \quad y\Delta - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \quad z\Delta - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0;$$

если $\Delta \gtrless 0$, то для x, y и z получаемъ значенія опредѣленныя и конечныя. Если же $\Delta = 0$, то для изслѣдованія полученныхъ значеній поступаемъ слѣдующимъ образомъ: обозначаемъ $a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1$ черезъ s_1, $a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2$ черезъ s_2, $a_3 x + b_3 y + c_3 z - d_3$ черезъ s_3, тогда s_1, s_2 и s_3 суть величины, зависящія отъ x, y, z и обращающіяся въ нуль только при тѣхъ ихъ значеніяхъ, которыя суть корни системы ур. (β).

Умножаемъ обѣ части равенства $a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = s_1$ на A_1, обѣ части равенства $a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 = s_2$ на $-A_2$, а обѣ части равенства $a_3 x + b_3 y + c_3 z - d_3 = s_3$ на A_3, гдѣ

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ и } A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

затѣмъ складываемъ почленно, тогда получаемъ:

$$x(a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3) + y(b_1 A_1 - b_2 A_2 + b_3 A_3) +$$
$$+ z(c_1 A_1 - c_2 A_2 + c_3 A_3) - (d_1 A_1 - d_2 A_2 + d_3 A_3) =$$
$$= s_1 A_1 - s_2 A_2 + s_3 A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Совершенно аналогично получимъ:

$$x(a_1 B_1 - a_2 B_2 + a_3 B_3) + y(b_1 B_1 - b_2 B_2 + b_3 B_3) +$$
$$+ z(c_1 B_1 - c_2 B_2 + c_3 B_3) - (d_1 B_1 - d_2 B_2 + d_3 B_3) =$$
$$= s_1 B_1 - s_2 B_2 + s_3 B_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

и
$$x(a_1 C_1 - a_2 C_2 + a_3 C_3) + y(b_1 C_1 - b_2 C_2 + b_3 C_3) +$$
$$+ z(c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3) - (d_1 C_1 - d_2 C_2 + d_3 C_3) =$$
$$= s_1 C_1 - s_2 C_2 + s_3 C_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Изъ равенствъ (1), (2) и (3) видно, что ур. системы (β), если они совмѣстны, имѣютъ конечныя рѣшенія только тогда, когда при $\Delta = 0$, одновременно

$$\left.\begin{aligned} d_1 A_1 - d_2 A_2 + d_3 A_3 = 0 \\ d_1 B_1 - d_2 A_2 + d_3 A_3 = 0 \\ d_1 C_1 - d_2 C_2 + d_3 C_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

Если же условія эти не выполнены, то система (β) имѣетъ только безконечныя рѣшенія.

При выполненіи же условій (4) для x, y и z опредѣленныхъ рѣшеній не получается, что указываетъ на то, что число различныхъ ур. въ системѣ (β) меньше 3-хъ, слѣд. тутъ можетъ быть или два различныхъ ур., или же можетъ быть, что всѣ три приводятся къ одному; для рѣшенія этого вопроса, мы слѣдующимъ образомъ разсуждаемъ: предположимъ, что при $\Delta = 0$ существуетъ одинъ изъ миноровъ, не равный нулю, пусть это будетъ миноръ A_1, тогда мы обѣ части равенства $a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 = 0$ умножаемъ на $-A_2$, а обѣ части равенства $a_3 x + b_3 y + c_3 z - d_3 = 0$ на A_3 и почленно складываемъ, тогда мы получаемъ:

$$x(-a_2 A_2 + a_3 A_3) + y(-b_2 A_2 + b_3 A_3) +$$
$$+ z(-c_2 A_2 + c_3 A_3) - (d_2 A_2 - d_3 A_3) = 0,$$

но изъ равенствъ

$$a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$$

$$b_1 A_1 - b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0$$

$$c_1 A_1 - c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0$$

и изъ условія совмѣстности ур.: $d_1 A_1 - d_2 A_2 + d_3 A_3 = 0$, получаемъ: $-xA_1 a_1 - yb_1 A_1 - zc_1 A_1 + d_1 A_1 = 0$, но такъ какъ $A_1 \gtrless 0$, то мы получаемъ $a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = 0$, т. е. въ этомъ случаѣ первое ур. есть слѣдствіе двухъ другихъ и значитъ различныхъ ур. два и мы только можемъ два неизвѣстныхъ выразить въ зависимости отъ 3-яго.

Разсмотримъ теперь случай, когда всѣ миноры 2-аго порядка нули, тогда непремѣнно одинъ изъ коэффиціентовъ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, не равенъ нулю, пусть будетъ $a_1 \gtrless 0$. Умножаемъ обѣ части равенства $a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = s_1$ на a_2, а обѣ части равенства $a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 = s_2$ на a_1 и почленно вычитаемъ, тогда получимъ:

$$x(a_1 a_2 - a_2 a_1) + y(b_1 a_2 - a_2 b_1) + z(a_2 c_1 - a_1 c_2) - (d_1 a_2 - a_2 d_1) = s_1 a_2 - s_2 a_1$$

и необходимое условіе совмѣстности ур.

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ будетъ: } d_1 a_2 - a_2 d_1 = 0,$$

аналогично получимъ, что необходимое условіе совмѣстности ур.:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z - d_3 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ будетъ: } d_1 a_3 - a_1 d_3 = 0.$$

Имѣя эти условія, поступаемъ теперь слѣдующимъ образомъ: умножаемъ лѣвую часть ур.: (1) $a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = 0$ на a_2, тогда получаемъ: $a_1 a_2 x + b_1 a_2 y + c_1 a_2 z - d_1 a_2 = 0$, но, принимая во вниманіе условія, что миноры $b_1 a_2 - a_1 b_2 = 0$, $c_1 a_2 - a_1 c_2 = 0$ и условіе совмѣстности $d_1 a_2 - d_2 a_1 = 0$, получаемъ

$$a_1 (a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2) = 0,$$

а такъ какъ, по предположенію, $a_1 \gtrless 0$, то $a_2x+b_2y+c_2z-d_2=0$, помножая всѣ члены ур. (1) на a_3 аналогично получимъ

$$a_1(a_3x+b_3y+c_3z-d_3)=0, \text{ т. е. } a_3x+b_3y+c_3z-d_3=0,$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ ур. 2-ое и 3-ье изъ системы ур. (β) есть слѣдствіе ур. (1) и мы можемъ только одно неизвѣстное выразить въ зависимости отъ двухъ другихъ.

Если въ системѣ ур. (β) извѣстные члены d_1, d_2 и d_3 равны нулю, то мы получаемъ слѣд. систему ур.:

$$a_1x+b_1y+c_1z=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0,$$

такая система ур. называется «системою однородныхъ ур.»; для опредѣленія x, y и z мы имѣемъ слѣд. равенства: $x\Delta=0$, $y\Delta=0$, $z\Delta=0$. Если x, y и z *одновременно* въ нуль обращаться не могутъ, то непремѣнно долженъ $\Delta=0$.

Совершенно аналогично ведется изслѣдованіе системы съ 4-мя и болѣе неизвѣстными первой степени.

Докажемъ теперь слѣдующее *тождество Эйлера-Лагранжа:*

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2.$$

Для доказательства этого тождества раскрываемъ слѣдующій опредѣлитель 2-аго порядка

$$(\delta)\qquad \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3 & b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3 \\ a_1\beta_1+a_2\alpha_2+a_3\beta_3 & b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3 \end{vmatrix},$$

получаемъ, что

$$(\delta)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}.$$

Полагая же $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$, $\alpha_3 = a_3$, $\beta_1 = b_1$, $\beta_2 = b_2$ и $\beta_3 = b_3$, получимъ:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2.$$

Выведемъ теперь правило для умноженія двухъ опредѣлителей.

Разсмотримъ сначала случай умноженія двухъ опредѣлителей 2-аго порядка; имѣемъ два опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \delta,$$

требуется составить опредѣлитель равный $\Delta . \delta$, съ этой цѣлью разсматриваемъ слѣдующія двѣ системы ур. первой степени съ двумя неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = X \\ a_2 x + b_2 y = Y \end{array}\right\} (1) \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_1 X + \beta_1 Y = 1 \\ \alpha_2 X + \beta_2 Y = 0 \end{array}\right\} (2).$$

Изъ системы (1) получаемъ $x = \frac{b_2 X - b_1 Y}{\Delta}$, подставляя изъ системы (2) значенія $X = \frac{\beta_2}{\delta}$ и $Y = -\frac{\alpha_2}{\delta}$, получаемъ: $x = \frac{b_2 \beta_2 + b_1 \alpha_2}{\Delta . \delta}$, но для опред. x мы могли бы вмѣсто X и Y подставить ихъ выраженія изъ системы ур. (1) во (2), тогда мы получили бы:

$$x = \frac{b_2 \beta_2 + b_1 \alpha_2}{\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1 & b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1 \\ a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2 & b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2 \end{vmatrix}},$$

откуда видно, что

$$\Delta . \delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1 & b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1 \\ a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_2 & b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Совершенно аналогично поступаемъ для образованія произведенія двухъ опредѣлителей 3-яго порядка, при чемъ въ этомъ случаѣ разсматриваемъ слѣдующія двѣ системы ур. первой степени съ 3-мя неизвѣстными:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= X \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= Y \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= Z \end{aligned}\right\} (1) \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z &= 1 \\ \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z &= 0 \\ \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z &= 0 \end{aligned}\right\} (2),$$

обозначая

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ черезъ } \Delta \text{ и } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \text{ черезъ } \delta,$$

получаемъ изъ системы (1)

$$(a) \ldots\ldots\ldots x = \frac{X \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - Y \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta};$$

изъ системы (2) имѣемъ:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\delta}, \quad Y = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\delta}, \quad Z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\delta},$$

слѣдовательно

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta};$$

если же мы подставили бы изъ системы (1) выраженія для X, Y, Z въ систему (2), то для x мы получили бы слѣдующее выраженіе:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 + b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 + c_3\gamma_2 \\ b_1\alpha_3 + b_2\beta_3 + b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3 + c_2\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 + b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 + c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 + a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 + b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 + c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3 + a_2\beta_3 + a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3 + b_2\beta_3 + b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3 + c_2\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 + b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 + c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 + a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 + b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 + c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3 + a_2\beta_3 + a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3 + b_2\beta_3 + b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3 + c_2\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}} \quad (b).$$

Изъ сравненія выраженій (a) и (b) для x, замѣчаемъ, что

$$\Delta . \delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 + b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 + c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 + a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 + b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 + c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3 + a_2\beta_3 + a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3 + b_2\beta_3 + b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3 + c_2\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Прилагаемъ нѣсколько примѣровъ на примѣненіе опредѣлителей.

1) Рѣшить систему ур.:

$$x + 2y + 3z = 14,$$
$$3x + y + 2z = 11,$$
$$2x + 3y + z = 11.$$

Получаемъ:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 11 & 1 & 2 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 3 & 11 & 2 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = 3.$$

2) Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28 & 33 & 8 \\ 40 & 54 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

3) Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

4) Доказать, что

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x & y_1 - y \\ 1 & x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

5) Доказать, что

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = (a + b + c)\left[(a - c)(a - b) + (b - c)^2\right].$$

6) Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & n \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

7) Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 10, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -2.$$

8)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

9) Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix}$$

и отсюда получить, что

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2.$$

Цѣна **10** коп.