**Всероссийская конференция «Алгебра и теория алгоритмов»,
посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук
Ивановского государственного университета**

г. Иваново, 21–24 марта 2018 г.

О НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ТЕОРЕТИКО–ЧИСЛОВЫХ ЗАДАЧАХ

Н. А. Зинченко (Белгород)[1], Н. Н. Мотькина (Белгород)[2]

Простые числа интересовали ученых с древнейших времен. Они были известны древним египтянам и вавилонянам, отличавшимися своим искусством вычислений [1].

В теории чисел важную роль играют аддитивные задачи с простыми числами. Пусть $k \geq 2$ и $n \geq 1$ — числа. Рассмотрим уравнение

$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N \tag{1}$$

в простых числах $p_1,\ p_2, \ldots, p_k$.

Ряд классических проблем теории чисел сводится к вопросу о числе решений уравнения (1). Например, если $n = 1$, а $k = 2$, или 3, то (1) — уравнение Гольдбаха; если $n \geq 3$, то (1) — уравнение Варинга–Гольдбаха.

Уравнение Гольдбаха при $k = 3$ относят к тернарным задачам. А представление натурального числа в виде суммы двух простых чисел — к бинарным.

В 1937 г. И. М. Виноградов полностью решил тернарную проблему Гольдбаха [6]. Утверждение бинарной проблемы Гольдбаха остается до сих пор недоказанным.

Настоящий доклад посвящен некоторым бинарным аддитивным задачам теории чисел.

В 1938 г. Н. Г. Чудаков [8] доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $K(X)$ равно числу тех четных чисел между 6 и X, которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых. Тогда*

$$K(X) \leq C_D \frac{X}{\log^D X}, \quad 6 \leq X < \infty,$$

где D — произвольное фиксированное положительное число, C_D — положительная константа, зависящая только от D.

Пусть η — алгебраическое число степени n, a и b — произвольные фиксированные действительные числа из отрезка $[0, 1]$. Тогда верна теорема [4].

Теорема 2. *Пусть $K(X)$ — число тех четных чисел между 6 и X, которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых специального вида*

$$a < \{\eta p_i\} < b, \quad i = 1, 2.$$

Тогда при любом фиксированном $D > 0$

$$K(X) = O(X \log^{-D} X), \quad 6 \leq X < \infty.$$

В докладе будет представлено краткое изложение доказательства теоремы 2.

К бинарным аддитивным задачам относят и проблему делителей Титчмарша, состоящую в выводе асимптотической формулы для числа решений уравнения

$$p - 1 = xy, \qquad p \leq n.$$

Она была решена Ю. В. Линником при помощи дисперсионного метода [7].

 Получено 17.12.2017. УДК 511.34.

[1]Белгородский государственный национальный исследовательский университет.
E-mail: zinchenko@bsu.edu.ru.

[2]Белгородский государственный национальный исследовательский университет.
E-mail: motkina@bsu.edu.ru.

После опубликования И. М. Виноградовым [2] асимптотической формулы для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках специального вида, которые получили название «коротких», или «виноградовских», стали рассматриваться аддитивные задачи с простыми числами из таких промежутков. Методом Виноградова были решены некоторые тернарные аддитивные задачи, например, в работе [3]. Однако, бинарные аддитивные задачи с простыми числами из коротких промежутков, в том числе и проблему Титчмарша, пока решить не удается. Можно рассмотреть проблему делителей Титчмарша с полупростыми числами p_1p_2, на которые наложены ограничения [5].

Число решений уравнения

$$p_1p_2 - xy = 1, \tag{2}$$

где $p_1p_2 \le n$, обозначим через $T(n)$. Уравнение (2) решается в переменных x, y, p_1 и p_2, где x и y — числа натуральные. Простые числа p_1 и p_2 удовлетворяют также дополнительным условиям:

$$p_1 > e^{\sqrt{\log n}}, \quad p_2 > e^{\sqrt{\log n}},$$
$$\{(1/2)(p_1p_2)^{1/c}\} < 1/2.$$

Теорема 3. *Пусть c — произвольное число из полуинтервала $(1,2]$, p_1, p_2 — простые числа,*

$$T(n) = \sum_{\substack{p_1p_2\le n\\ p_1>e^{\sqrt{\log n}},\ p_2>e^{\sqrt{\log n}}}} \tau(p_1p_2-1),$$

$$T_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2\le n\\ p_1>e^{\sqrt{\log n}},\ p_2>e^{\sqrt{\log n}}\\ \{(1/2)(p_1p_2)^{1/c}\}<1/2}} \tau(p_1p_2-1).$$

Тогда справедливо равенство:

$$T_1(n) = \frac{1}{2}T(n) + O(n\log\log\log n), \tag{3}$$

где

$$T(n) \sim c_0 n\log\log n$$

и

$$c_0 = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}.$$

С помощью идей и методов, использованных при доказательстве теоремы 3, можно решать и другие бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами специального вида из «виноградовских» промежутков.

Литература

1. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. М. : Просвещение, 1966. 384 с.
2. *Виноградов И. М.* Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Математический сборник. 1940. № 7. С. 365—372.
3. *Гриценко С. А.* Три аддитивные задачи // Известия РАН. Серия математическая. 1992. Т. 56, № 6. С. 1198—1216.
4. *Гриценко С. А., Мотькина Н. Н.* О теореме Чудакова в простых числах специального вида // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 75—84.
5. *Зинченко Н. А.* Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, вып. 2. С. 145—162.
6. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М. : Наука, 1983. 240 с.
7. *Линник Ю. В.* Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л. : Изд-во ЛГУ, 1961. 208 с.
8. *Чудаков Н Г.* О плотности совокупности четных чисел, непредставимых как сумма двух нечетных простых // Известия АН СССР. Серия математическая. 1938. № 1. С. 25—40.