УДК 532.59

И.Т. СЕЛЕЗОВ, д-р физ.-мат. наук, Ин-т гидромеханики НАН Украины,
В.М. МОСКОВКИН, д-р геогр. наук, Харьковский нац. ун-т
Ю.Д. МЕНДЫГУЛОВ, асп.

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ПЛЯЖЕОБРАЗУЮЩЕГО МАТЕРИАЛА ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

Исследуется задача эволюции берега на основе динамического уравнения баланса пляжеобразующего материала. Показано, что в стационарном случае не существуют периодические решения.

Исследование динамики абразионного берега под воздействием поверхностных гравитационных волн представляет большой научный и прикладной интерес. В частности можно отметить, что в последнее время наблюдается интенсивное разрушение берегов в акваториях морей и в частности Черного моря.

Математическое моделирование движения взвешенных частиц, их седиментации, процессов абразии и переформирования берегов и прибрежной зоны моря было предметом многочисленных исследований [1-4] и требует дальнейшего развития в связи со сложностью и многофакторностью задачи.

Здесь рассматривается задача баланса пляжеобразующего материала на основе диффузионной модели, предложенной в [5]

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = aHf\left(w(x,t)\right) - \varphi\left(w(x,t)\right) + c\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где $W(x,t)$ -- объем пляжеобразующего материала на единице длины береговой линии, a -- доля пляжеобразующего материала в породах слагающих берег, H -- высота клифа, $f(w)$ -- скорость отступания клифа, $\varphi(w)$ -- интенсивность истирания пляжеобразующего материала, c -- коэффициент диффузионной миграции материала, связанный с волновым воздействием (все направления подхода волн равновероятны).

В стационарном случае изменение объема материала определяется скоростью отступания клифа и истиранием пляжеобразующего материала, замедляющего этот процесс в связи с подпиткой материалом. В этом случае уравнение (1) переходит в уравнение Эйлера-Лагранжа

© И.Т. Селезов, В.М. Московкин, Ю.Д. Мендыгулов

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{aH}{c} f(w) + \frac{1}{c}\varphi(w) \qquad (2)$$

с лагранжианом [6]

$$L = \frac{c}{2}(w'(x))^2 - aH\int f(w)dw + \int\varphi(w)dw, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) имеет первый интеграл движения (энергию) [2]

$$E = \frac{\partial L}{\partial \frac{dw}{dx}}\frac{dw}{dx} - L = \frac{c}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left\{aH\int f(w)dw - \int\varphi(w)dw\right\}, \qquad (4)$$

откуда

$$\frac{dW}{dx} = \sqrt{\frac{2}{c}\left(E - aH\int f(w)dw + \int\varphi(w)dw\right)}. \qquad (5)$$

Из выражения (5) получаем решение уравнения (2) в квадратурах

$$x = \int_{w_0}^{w} \frac{d\tilde{w}}{\sqrt{\frac{2}{c}\left(E - aH\int f(\tilde{w})d\tilde{w} + \int\varphi(\tilde{w})d\tilde{w}\right)}} \qquad (6)$$

Для анализа этого решения используем то обстоятельство, что лагранжиан (3) описывает одномерную динамическую систему с массой c и потенциальной энергией

$$U = aH\int f(w)dw - \int\varphi(w)dw, \qquad (7)$$

и это позволяет применить методы анализа, разработанные в классической механике [2]. Из выражения (7) следует $\frac{dU}{dw} = aHf(w) - \varphi(w)$, следовательно, точки экстремума потенциальной функции удовлетворяют уравнению $aHf(w) - \varphi(w) = 0$, то есть являются стационарными точками динамической системы

$$\frac{dw}{dt} = aHf(w) - \varphi(w), \qquad (8)$$

которая представляет собой математическую модель баланса пляжеобразующего материала без учета диффузии ($c = 0$)

Рассмотрим случай

$$f(w) = \frac{v_{\max}}{w_{onm}} w\left(2 - \frac{w}{w_{onm}}\right),$$

$$\varphi(w) = kw \qquad \text{, где } w_{onm},\ v_{\max},\ k = const > 0.$$

Здесь при $\frac{2v_{\max}}{w_{onm}} > \frac{k}{Ha}$ уравнение (8) имеет две стационарные точки: $w = 0$ неустойчивая, $w^* = w_{onm}\left(2 - \frac{kw_{onm}}{aHv_{\max}}\right)$ устойчивая, при этом $U_0 = U_{\min}$ -- локальный минимум потенциальной энергии, $U(w^*) = U_{\max}$ -- локальный max. При $E < 0$ решения $w(x)$, определяемые из выражения (6), ограничены снизу и неограничены сверху, при этом они симметричны относительно прямой параллельной оси ow и проведенной через точку x_0, в которой функция $w(x)$ принимает минимальное значение $w(x_0) = w_{\min}$. Значение $w_{\min}$ определяется из условия $U(w_{\min}) = E$, а значение x_0 из решения (6) при верхнем пределе интегрирования, равном $w = w_{\min}$.

При $E > 0$ возможны три случая:

1. $E > U(w^*)$. Решение $w(x)$ неограничено возрастает от 0 при $x = \tilde{x}$, которое находится из решения (6) при верхнем пределе интегрирования равном $w = 0$.

2. $E < U(w^*)$, $w_0 \le \min(w_1, w_2)$,

где $E = U(w_i)$, $i = 1,2$. Решение $w(x)$ имеет вид холма, симметричного относительно его вершины. Его вершина имеет координаты $\max w(x) = \min(w_1, w_2)$, $x' = x'(E, w_0)$ -- находится из решения (6) при верхнем пределе интегрирования равном $w = \min(w_1, w_2)$.

3. $w_0 = \max(w_1, w_2)$. Этот случай полностью аналогичен случаю $E < 0$ при $\min w(x) = \max(w_1, w_2)$.

Случай $E > 0$ при $\min(w_1, w_2) < w_0 < \max(w_1, w_2)$ невозможен.

Случай одной стационарной (нулевой) точки при $\frac{2v_{\max}}{w_{onm}} \le \frac{k}{Ha}$ сводится к ряду предыдущих случаев.

Из анализа всех возможных случаев следует, что для данной модели не существуют периодические решения, ввиду того, что потенциальная функция не имеет локального минимума в ненулевой точке. Такой минимум возникает при введении в модель (1) фактора искусственного изъятия (или естественного уноса) материала с постоянной скоростью $V = const$ (пересечение параболы $aHf(w)$ с прямой

$kW + V$ в двух ненулевых точках). В этой ситуации появятся периодические решения $w(x)$, анализ которых (период и амплитуда колебаний) представляет самостоятельную задачу.

І.Т.Селезов, В.М.Московкин, Ю.Д. Мендигулов. **Про стаціонарні розв'зки рівняння балансу пляжеформуючого матеріалу.дифузійного типу.**

РЕЗЮМЕ. Досліджується задача еволюції берега на основі динамічного рівняння балансу пляжеформуючого матеріалу. Показано, що в стаціонарному випадку не існують періодичні розв'язки.

I.T. Selezov, V.M. Moskovkin, Yu.D. Mendygulov **On stationary solutions of the equation for a balance of beachforming material of diffusion type.**

SUMMARY. The problem of beach evolution is investigated on the basis of dynamic equation of a balance of beachforming material. It is shown that the periodic solutions do not exist in stationary case.

Список использованной литературы

1. Selezov I. T., Volynsky R. I. Modelling of the sea-bed performances due to waves. Hydraul and Environ. The 23rd Congr. Int. Assoc. Hydraul. Res., Ottawa, Aug.21-25, 1989. Vol C. Ottawa. Canada. 1989. – P. 509-514.
2. Selezov I. T., Volynsky R. I. Simulation of nonlinear and KdV-waves action to salinity transport and bottom performance. – Proc. 24th IAHR Congress, Madrid, Spain, Sept. 9-13, 1991. -- P. B202 – B210.
3. Selezov I. T., Volynskiy R.I., Morozov V.I. Mathematical simulation of fluid -and lithodynamics of the shore region. -*Int. J. of Fluid Mech. Research*, 1996, 23, N 1 & 2. – P. 101-103.
4. Selezov I. T. Interaction of water waves with engineering constructions and topography in a coastal area. - Proc. of the 5th Int. Conf. on Coastal and Port Engineering in Developing Countries, COPEDEC V, Cape Town, South Africa, April 19-23, 1999, 1. – P. 1-12.
5. Есин Н.В., Дмитриев В.А., Московкин В.М. К теории эволюции абразионного берега. – Водные ресурсы, 1984, № 1. –С. 172-176.
6. Ландау А.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М: Наука, 1988. – С. 207 с.

Поступила в редколлегию 07.10.2005