стеклянных пластин в условиях теплообмена излучением // Прикл. механика.— 1986.— **22**, № 9.— С. 103—107.
3. *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами.— Киев : Наук. думка, 1979.— 360 с.
4. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями.— Киев : Наук. думка, 1988.— 312 с.
5. *Вигак В. М., Костенко А. В., Засадна Х. Е.* Оптимальное по быстродействию управление нагревом термоупругой пластины с помощью мощности внутренних источников тепла // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1987.— Вып. 26.— С. 55—59.
6. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости.— Киев : Наук. думка, 1970.— 307 с.
7. *Коваленко А. Д.* Избранные труды.— Киев : Наук. думка, 1976.— 762 с.
8. *Костенко А. В., Витер М. Б.* Конечно-разностное решение задачи оптимизации по быстродействию нагрева тел простой формы внутренними источниками тепла // Инж.-физ. журн.— 1987.— **52**, № 2.— С. 296—301.
9. *Мотовиловец И. А., Козлов В. И.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость.— Киев : Наук. думка, 1987.— 264 с.
10. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 512 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН Украины, Львов

Получено 20.06.89

УДК 517.94

В. М. Московкин, И. Т. Селезов,
Ю. Д. Мендыгулов

ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ С УЧЕТОМ ПРОЦЕССА БИОФИЛЬТРАЦИИ

Анализируется оператор эволюции для модели, описывающей управление качеством воды в рекреационной зоне моря. На основе квантово-механического подхода осуществляется переход от дифференциального оператора к интегральному. В случае однородного распределения концентрации и дополнительных упрощающих предположений построено и анализируется аналитическое решение.

Рассматривается двухмерное однородное уравнение турбулентной диффузии [2], моделирующее качество воды в прибрежной рекреационной зоне моря.

Для постановки задач управления качеством воды в рекреационной зоне моря учитывается процесс биофильтрации [3] посредством специальной биофильтрационной добавки в коэффициенте распада примеси. Результирующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} = k_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - [\lambda_0 + \lambda_1(t)\,\delta(y)]\,c, \tag{1}$$

где c — концентрация примеси; k_x, k_y — коэффициенты турбулентного обмена вдоль осей x и y; u_x, u_y — компоненты скоростей течений вдоль осей x и y; $\lambda_0 = \mathrm{const}$ — традиционный коэффициент распада примеси; $\lambda_1(t)$ — коэффициент биофильтрации для линейного биофильтра, расположенного на оси y; $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака.

В качестве линейного биофильтра может служить пояс гидробиоинженерных сооружений (искусственный риф). Интенсивность биофильтрации для черноморских мидий имеет суточную периодичность, что может учитываться в коэффициенте $\lambda_1(t)$ [3].

Формальное решение уравнения (1) имеет вид [1]:

$$c(x, y, t) = \exp(-\lambda_0 t) \exp\left\{\left(k_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - u_x \frac{\partial}{\partial x} - u_y \frac{\partial}{\partial y}\right) t - \int_0^t \lambda_1(\tau)\,\delta(y)\,d\tau\right\} c_0(x, y), \tag{2}$$

где $c(x, y, 0) = c_0(x, y)$.

© В. М. Московкин, И. Т. Селезов, Ю. Д. Мендыгулов, 1993

С помощью формулы перехода от дифференциального оператора к интегральному

$$\exp\left\{A\frac{d^2}{dx^2}\right\}f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{2\sqrt{\pi A}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4A}\right\}f(y) \tag{3}$$

и операторной формулы Тейлора

$$\exp\left\{B\frac{d}{dx}\right\}f(x)=f(x+B) \tag{4}$$

приведем решение (2) к виду

$$c(x,\ y,\ t)=\exp\{-\lambda_0 t\}\exp\left\{\left(k_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}-u_y\frac{\partial}{\partial y}\right)t-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^t\lambda_1(\tau)\,\delta(y)\,d\tau\right\}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{2\sqrt{\pi t k_x}}\exp\left\{-\frac{(x-u_xt-x')^2}{4k_xt}\right\}c_0(x',\ y). \tag{5}$$

Рассмотрим тождество

$$\exp\left\{\left(k_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}-u_y\frac{\partial}{\partial y}\right)t-\int\limits_0^t\lambda_1(\tau)\,\delta(y)\,d\tau\right\}t=$$

$$=\exp\left\{\left(k_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}-u_y\frac{\partial}{\partial y}\right\}+\hat{u}, \tag{6}$$

где $\hat{u}$ — некоторый оператор. Для этого оператора получаем уравнение

$$\frac{d\hat{u}}{dt}=[\hat{A}+\hat{B}(t)]\,\hat{u}+\hat{B}(t)\exp(\hat{A}t), \tag{7}$$

где
$$\hat{A}\equiv k_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}-u_y\frac{\partial}{\partial y},\qquad \hat{B}(t)\equiv-\lambda_1(t)\,\delta(y).$$

Дифференциальное уравнение (7) преобразуем в интегральное

$$\hat{u}(t)=\int\limits_0^t\exp\{\hat{A}(t-\theta)\}\,(\hat{B}(\theta)\exp\{\hat{A}\theta\}+\hat{B}(\theta)\,\hat{u}(\theta))\,d\theta, \tag{8}$$

которое имеет формальное решение

$$\hat{u}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int\limits_0^t d\theta\exp\{\hat{A}(t-\theta)\}\,\hat{B}(\theta)(\ldots)\right\}^n\int\limits_0^t d\theta\exp\{\hat{A}(t-\theta)\}\,\hat{B}(\theta)\exp\{\hat{A}\theta\}, \tag{9}$$

где $\int\limits_0^t d\theta\hat{G}(\ldots)$ — интегральный оператор $\int\limits_0^t d\theta\hat{G}(\ldots)\hat{f}(t)\equiv\int\limits_0^t d\theta\hat{G}(\theta)\,\hat{f}(\theta)$. Применяя формулы (6) и (9) к (5), получаем

$$c(x,\ y,\ t)=\exp\{-\lambda_0 t\}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'\,dy'}{4\sqrt{\pi t k_x}\sqrt{\pi t k_y}}\exp\left\{-\frac{(x-u_xt-x')^2}{4k_xt}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(y-u_yt-y')^2}{4k_yt}\right\}A(x',\ y')+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{2\sqrt{\pi t k_x}}\exp\left\{-\frac{(x-u_xt-x')^2}{4k_xt}\right\}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int\limits_0^t d\theta\exp\{\hat{A}(t-\theta)\}\,\hat{B}(\theta)\}(\ldots)\right\}^n\int\limits_0^t d\theta\exp\{\hat{A}(t-\theta)\}\times$$

$$\left.\times\hat{B}(\theta)\exp\{\hat{A}\theta\}\,A(x',\ y)\right]=\exp\{-\lambda_0 t\}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'\,dy'}{4\pi t\sqrt{k_xk_y}}\times\right.$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(x-u_xt-x')^2}{4k_xt}-\frac{(y-u_yt-y')^2}{4k_yt}\right\}A(x',\ y')+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{2\sqrt{\pi t k_x}}\exp\left\{-\frac{(x-u_x t-x')^2}{4k_x t}\right\}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t d\theta_n\int_0^{\theta_n}d\theta_{n-1}\ldots\int_0^{\theta_2}d\theta_1\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dy_n\ldots\int_{-\infty}^{\infty}dy_1\int_{-\infty}^{\infty}dy_0\int_{-\infty}^{\infty}dy'\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\theta_n)k_y}}\exp\left\{\frac{-(y-u_y t-y_n)^2}{4k_y(t-\theta_n)}\right\}\times$$

$$\times(-1)\lambda_1(\theta_n)\delta(y_n)\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta_n-\theta_{n-1})k_y}}\exp\left\{\frac{-(y_n-u_y\theta_n-y_{n-1})^2}{4k_y(\theta_n-\theta_{n-1})}\right\}\times$$

$$\times(-1)\lambda_1(\theta_{n-1})\delta(y_{n-1})\times\cdots\times\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta_2-\theta_1)k_y}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(y_2-u_y\theta_2-y_1)^2}{4k_y(\theta_2-\theta_1)}\right\}(-1)\lambda_1(\theta_1)\delta(y_1)\int_0^{\theta_1}\frac{d\theta_0}{2\sqrt{\pi(\theta_1-\theta_0)k_y}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{-(y_1-y_0-u_y\theta_1)^2}{4k_y(\theta_1-\theta_0)}\right\}\frac{(-1)\lambda_1(\theta_0)\delta(y_0)}{2\sqrt{\pi\theta_0 k_y}}\exp\left\{-\frac{(y_0-y'-u_y\theta_0)^2}{4k_y\theta_0}\right\}\times$$

$$\times A(x', y'). \qquad (10)$$

Таким образом, получено решение уравнения (1), выраженное через интегральный оператор эволюции [1]:

$$c(x, y, t)=\int dx'dy'c^e(t;\ x,\ y;\ x',\ y')A(x',\ y'), \qquad (11)$$

где ядро оператора эволюции c^e имеет вид

$$c^e(t;\ x,\ y;\ x',\ y')=\exp\{-\lambda_0 t\}\left[\frac{\exp\left\{-\frac{(x-u_x t-x')^2}{4k_x t}-\frac{(y-u_y t-y')^2}{4k_y t}\right\}}{4\pi t\sqrt{k_x k_y}}+\right.$$

$$+\frac{\exp\left\{-\frac{(x-u_x t-x')^2}{4k_x t}\right\}}{2\sqrt{\pi t k_x}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^t d\theta_n\int_0^{\theta_n}d\theta_{n-1}\ldots\int_0^{\theta_2}d\theta_1\times$$

$$\times\frac{\lambda_1(\theta_n)}{2\sqrt{\pi(t-\theta_n)k_y}}\exp\left\{-\frac{(y-u_y t)^2}{4k_y(t-\theta_n)}\right\}\frac{\lambda_1(\theta_{n-1})}{2\sqrt{\pi(\theta_n-\theta_{n-1})k_y}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{u_y^2\theta_n^2}{4k_y(\theta_n-\theta_{n-1})}\right\}\times\cdots\times\frac{\lambda_1(\theta_1)}{2\sqrt{\pi(\theta_2-\theta_1)k_y}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{u_y^2\theta_2^2}{4k_y(\theta_2-\theta_1)}\right\}\int_0^{\theta_1}\frac{d\theta_0\lambda_1(\theta_0)}{4\sqrt{\pi(\theta_1-\theta_0)k_y}\sqrt{\pi\theta_0 k_y}}\times$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{u_y^2\theta_1^2}{4k_y(\theta_1-\theta_0)}-\frac{(y'+u_y\theta_0)^2}{4k_y\theta_0}\right\}\right]. \qquad (12)$$

В случае $A(x, y)\equiv A_0=\text{const}$, $\lambda=\text{const}$, $u_y=0$, что соответствует первоначальному однородному распределению концентрации, постоянной интенсивности биофильтрации линейного источника и отсутствию компоненты скорости течения, направленной по оси oy, решение (10) существенно упрощается:

$$c(x, y, t)=A_0\exp\{-\lambda_0 t\}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\lambda^{n+1}\int_0^t\frac{d\theta}{2\sqrt{\pi(t-\theta)k_y}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{y^2}{4k_y(t-\theta)}\right\}\int_0^{\theta_n=\theta}\frac{d\theta_{n-1}}{2\sqrt{\pi(\theta_n-\theta_{n-1})k_y}}\times\cdots\times\int_0^{\theta_1}\frac{d\theta_0}{2\sqrt{\pi(\theta_1-\theta_0)k_y}}\right]. \qquad (13)$$

Пусть

$$F_n(\theta) \equiv \int\limits_{0}^{\theta_n=\theta} \frac{d\theta_{n-1}}{2\sqrt{\pi(\theta_n-\theta_{n-1})k_y}} \times \cdots \times \int\limits_{0}^{\theta_1} \frac{d\theta_0}{2\sqrt{\pi(\theta_1-\theta_0)k_y}} \times \quad (14)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \lambda_1^{n+1} F_n(\theta) \equiv F(\theta), \quad (15)$$

тогда

$$c(x, y, t) = A_0 \exp\{-\lambda_0 t\} \left[1 + \int\limits_0^t \frac{d\theta F(\theta)}{2\sqrt{\pi(t-\theta)k_y}} \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{-\frac{y^2}{4k_y(t-\theta)}\right\}\right] = A_0 \exp\{-\lambda_0 t\}\left[1 + \exp\left\{-\frac{y^2}{4k_y(t-\theta^*)}\right\}\mathscr{F}(t)\right]. \quad (16)$$

Здесь $\theta^* \in (0, t)$ (в соответствии с формулой Лагранжа для интеграла), а функция

$$\mathscr{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \lambda_1^{n+1} F_{n+1}(t). \quad (17)$$

Для функции $F_n(\theta)$ имеем рекуррентную формулу

$$F_n(\theta) \equiv \int\limits_0^{\theta} \frac{d\xi}{2\sqrt{\pi(\theta-\xi)k_y}} F_{n-1}(\xi). \quad (18)$$

Применяя к левой и правой частям формулы (18) преобразование Лапласа, получаем

$$\tilde{F}_n(p) = \left[\frac{\tilde{1}}{2\sqrt{\pi\theta k_y}}\right](p)\tilde{F}_{n-1}(p) = \left(\left[\frac{\tilde{1}}{2\sqrt{\pi\theta k_y}}\right](p)\right)^n, \quad (19)$$

где

$$\tilde{F}_n(p) = \int\limits_0^{\infty} \exp\{-p\theta\} F_n(\theta)\, d\theta,$$

$$\left[\frac{\tilde{1}}{2\sqrt{\pi\theta k_y}}\right] = \int\limits_0^{\infty} \exp\{-p\theta\} \frac{d\theta}{2\sqrt{\pi\theta k_y}} = \frac{1}{2\sqrt{pk_y}}.$$

Следовательно,

$$F_n(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} \exp\{p\theta\}\tilde{F}_n(p)\, dp = \frac{\theta^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (20)$$

где Γ — гамма-функция.
Отсюда

$$\mathscr{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda_1^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)} t^{\frac{n-1}{2}}. \quad (21)$$

Из асимптотического выражения получаем оценки для гамма-функции

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \underset{n\to\infty}{=\!=} \sqrt{\pi(\theta+1)}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}} > n!,$$

и, следовательно, ряд (21) абсолютно сходится при любых λ_1 и t:

$$|\mathscr{F}(t)| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{n+1}}{n!} t^{\frac{n-1}{2}} = \lambda_1 t^{-\frac{1}{2}} \exp\{\lambda_1 \sqrt{t}\}. \quad (22)$$

Это означает, что отличие количества примеси в момент времени t от первоначального (с учетом естественного распада примеси) обусловлено процессом биофильтрации.

Из физического смысла $c(y, t)$ и формулы (16) следует выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} [c(y, t) - A_0 \exp\{-\lambda_0 t\}]\, dy = -\lambda_1 \int_0^t \{A_0 \exp\{-\lambda_0 t\} [1 + \mathscr{F}(t)]\}\, dt. \quad (23)$$

Из выражения (23) определим вид функции $t - \theta^*(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_0 \exp\{-\lambda_0 t\} \exp\left\{-\frac{y^2}{4k_y (t - \theta^*(t))}\right\} \mathscr{F}(t)\, dy =$$

$$= A_0 \exp\{-\lambda_0 t\} \mathscr{F}(t) \sqrt{\pi 4k_y (t - \theta^*(t))}.$$

Следовательно,

$$(t - \theta^*(t)) = \frac{\lambda_1^2}{4\pi k_y} \left(\frac{\int_0^t \exp\{-\lambda_0 t\} [1 + \mathscr{F}(t)]\, dt}{\exp\{-\lambda_0 t\} \mathscr{F}(t)} \right)^2. \quad (24)$$

При малых t и λ_1 функция

$$\mathscr{F}(t) \approx \lambda_1^2 - \frac{\lambda_1}{\sqrt{\pi t}} \quad (25)$$

возрастает по времени.

В этом случае из решения (16) видим, что распределение концентрации $c(x, y, t)$ имеет вид перевернутого гауссовского колокола с вершиной в начале координат, причем при малых t высота этого колокола убывает, а его ширина

$$(t - \theta^*(t)) = \frac{\lambda_1^2}{\pi k_y} t^2. \quad (26)$$

Из (26) следует, что эта функция возрастает, причем в случае малых времен величина $c(y, t)$ совпадает с решением задачи свободной диффузии от источника типа δ-функции.

1. *Дирак П. А. М.* Основы квантовой механики.— М. ; Л. : ОНТИ, 1937.— 319 с.
2. *Котовщиков Б. Б., Худошина М. Ю.* Оценка состояния морской рекреационной системы на основе логикоинформационного и гидродинамического моделирования // Современные проблемы океанологии Черного моря.— Севастополь, 1986.— С. 106—117.
3. *Московкин В. М.* Управление качеством воды прибрежной зоны моря при интенсивной антропогенной нагрузке // Вод. ресурсы.— 1989.— № 4.— С. 95—103.

Ин-т гидромеханики АН Украины, Киев,
Сочин. НИЦ АН России

Получено 12.04.91

УДК 517.946.9

Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский, Ф. Х. Кудаева

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В КРИОХИРУРГИИ

Предложены конструктивные приближенно-аналитические и численно-аналитические методы решения задач со свободными границами для одномерных нелинейных эволюционных уравнений.

Практически во всех областях современной медицины применяют гипотермию — локальное понижение температуры ткани живого организма, и криодеструкцию — замораживание биоткани. Цель криодеструкции — гибель в процессе замораживания и последующего отогрева всех патологических клеток в четко ограниченном объеме, как примыкающем к поверхности тела, так и расположенном в глубине любого органа. К основным преимуществам этих методов относятся: локальность и относительная безболезненность, биологическая инертность, вызывающая минимальную перифокальную реакцию; бескровность, обусловленная блокированием капиллярных мелких

© Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский, Ф. Х. Кудаева, 1993