

творенных веществ с территории СССР. - М.: Наука, 1964. - 144 с.

Балков В. А., Антошенко Ю. П. Материалы по водно-солевому балансу ландшафтов умеренного пояса. - Уч. зап. Башкирского ун-та; 1975, вып. 92, с. 117 - 128.

Бондарев Л. Г. Вечное швижение. Планетарное перемещение вещества и человек. - М.: Мысль, 1974. - 158 с.

Зверев В. П. Роль подземных вод в миграции химических элементов. - М.: Недра, 1982. - 184 с.

Немерюк Г. Е. Роль испарения при миграции солей в атмосферу. - Гидрохимические материалы, 1969, т. 50, с. 38 - 46.

Пелешенко В. И. Оценка взаимосвязи химического состава различных типов природных вод (на примере равнинной части Украины). - Киев: Вища школа, 1975. - 167 с.

А.М. Трофимов, В.М. Московкин

МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КЛИС-ПЛЯЖ И ЕЕ
ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕЙ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ
БЕРЕГОВ

Интенсивное вовлечение прибрежной зоны морей и водохранилищ в хозяйственную деятельность человека обусловило особую актуальность проблемы прогноза динамики береговых процессов.

Существует множество математических моделей, так или иначе относящихся в морфодинамике подрезаемых берегов. Перечислять и анализировать их нет смысла, поскольку каждая из них описывает какой-либо отдельно взятый процесс. Для прогнозных же заключений целесообразными и наиболее приемлемыми следует считать сопряженные динамические модели, описывающие одновременное проявление ряда береговых процессов.

Одним из наиболее приемлемых с прогнозных позиций можно считать сопряженное уравнение баланса пляжеобразующего материала (при отсутствии вдольберегового типа наносов), учитывающее одновременно процессы разрушения (абразии) морских берегов и пляжеформирование (Есин, 1980)

$$\frac{dW}{dt} = \alpha V H - K W, \quad (1)$$

где $W > 0$ – объем обломочного материала на пляже на единицу его длины, $\text{м}^3/\text{м}$; $V = f(W)$ – скорость отступления берегового уступа (клифа), зависящая от объема материала W , $\text{м}/\text{год}$; H – высота клифа, м ; K – коэффициент истираемости наносов (материала), год^{-1} ; t – время, год .

В случае прямолинейного берегового склона и вертикаль – ного клифа, когда высота последнего изменяется в процессе его отступления (рис. 1), Н.В.Есиным, В.М.Московкиным и А.В.Ску- невым (1983) в дальнейшем было получено кинематическое урав- нение, необходимое для замыкания уравнения (1). Это позволило окончательно прийти к следующей динамической автономной систе- теме:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = \alpha f(W) H - K W \\ \frac{dH}{dt} = \text{tg} \alpha_0 f(W) \end{cases}, \quad (2)$$

которая при функции $f(W) = \beta/W$, $\beta = \text{const}$ (для легкораз- рушаемых глинистых пород) была решена в указанной выше работе

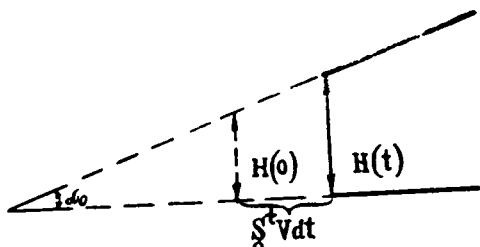


Рис. 1. Схема к выводу второго (кинематического) уравне- ния системы (2) (объяснение в тексте)

в функциях Бесселя (в фазовых переменных (H, W))

$$W(H) = \frac{\beta \operatorname{tg} \alpha_0}{k} \left[\frac{1}{2H} + \frac{Z'_{1/3}(\lambda i H^{3/2})}{Z_{1/3}(\lambda i H^{3/2})} \right], \quad (3)$$

где α_0 - угол наклона берегового склона; $Z_{1/3}(x) = C_1 J_{1/3}(x) + C_2 Y_{1/3}(x)$, C_1, C_2 - постоянные интегрирования; $J_{1/3}, Y_{1/3}$ - функции Бесселя; $\lambda = (2/3 \operatorname{tg} \alpha_0) \sqrt{ak/\beta}$; штрих над функцией $Z_{1/3}$ означает дифференцирование ее по H ; i - мнимая единица.

Приведем это решение к более удобному виду, избавившись от мнимого аргумента. Для этого в решении (3) перейдем к модифицированным бесселевым функциям ($J_m(x) = i^{-m} J_m(ix)$), выбрав при этом действительные значения функции $W(H)$, положив $i^{2/3} = -1$. В результате получим окончательное общее решение

$$W(H) = \sqrt{\frac{\alpha \beta H}{k}} \left[\frac{J_{2/3}(\lambda H^{3/2}) - \tilde{C} J_{-2/3}(\lambda H^{3/2})}{J_{-1/3}(\lambda H^{3/2}) - \tilde{C} J_{1/3}(\lambda H^{3/2})} \right], \quad (4)$$

где J - модифицированные функции Бесселя, $\tilde{C} = C_1/C_2$.

Близкое решение было получено Е.Ф. Мищенко и Н.Х. Розовым (1976) при рассмотрении специального уравнения Риккати. Там же изучено поведение интегральных кривых этого уравнения. Нами показано, что расчеты по аналитическому решению (4) с достаточной точностью совпадают с численными расчетами по методу Н.В. Есина, В.М. Московкина и А.В. Окуня (1983).

Рассмотрим теперь более универсальную аппроксимационную функцию

$$V = f(W) = (\alpha W + \xi) e^{-\beta W}, \quad (5)$$

которая для $\alpha = 0$ соответствует абразии легкоразрушаемых пород, а для $\alpha \neq 0$ - абразии прочных пород. Аналитическое решение системы уравнений (2) с учетом функции (5) может быть получено при $\xi = 0$ в фазовых переменных (H, W). В этом случае, разделив первое уравнение системы (2) на второе, получим:

$$\frac{dW}{dH} = \frac{\alpha H}{\operatorname{tg} \alpha_0} - \frac{k \exp(\beta W)}{\alpha \operatorname{tg} \alpha_0}. \quad (6)$$

После замены $\exp(\beta W) = u$ приходим к уравнению Бернулли

$$\frac{du}{dH} = \frac{\alpha \beta H}{\operatorname{tg} \alpha_0} u - \frac{k \beta}{\alpha \operatorname{tg} \alpha_0} u^2. \quad (7)$$

Заменой $\sigma(H) = 1/u(H)$ последнее уравнение приведем к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\sigma}{dH} + \frac{\alpha \beta H}{\operatorname{tg} \alpha} \sigma = \frac{k \beta}{\alpha \operatorname{tg} \alpha_0}, \quad (8)$$

решение которого имеет вид

$$\sigma(H) = \exp\left(-\frac{\alpha \beta H^2}{2 \operatorname{tg} \alpha_0}\right) \left[C + \frac{k \beta}{\alpha \operatorname{tg} \alpha_0} \int \exp\left(\frac{\alpha \beta H^2}{2 \operatorname{tg} \alpha_0}\right) dH \right], \quad (9)$$

где C - постоянная интегрирования.

Окончательное решение в исходных переменных с учетом начального условия $W(H_0) = W_0$ получим в виде

$$W(H) = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\alpha \beta H^2}{2 \operatorname{tg} \alpha_0} - \ln \left[\exp\left(\frac{\alpha \beta H_0^2}{2 \operatorname{tg} \alpha_0}\right) - \beta W_0 \right] + \right. \\ \left. + \frac{k}{\alpha} \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha \operatorname{tg} \alpha_0}} \left[\operatorname{Erfi}\left(H \sqrt{\frac{\alpha \beta}{2 \operatorname{tg} \alpha_0}}\right) - \operatorname{Erfi}\left(H_0 \sqrt{\frac{\alpha \beta}{2 \operatorname{tg} \alpha_0}}\right) \right] \right\}, \quad (10)$$

где $\gamma(x) = \int_0^x \exp(t^2) dt = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(ix) = \operatorname{Erfi}(x)$, i - мнимая единица, $\Phi(ix)$ - интеграл вероятности (Янко, Эмле, Леш, 1977, с. 342).

Используя асимптотическое разложение для $\Phi(Z)$ из решения (10) при больших H , получим асимптотическое стационарное решение

$$W_{ст} = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\alpha dH}{k} \right), \quad (11)$$

которое также следует из первого уравнения системы (2) с учетом функции (5) ($\xi = 0$) при $dW/dt = 0$ (стационарное ре-

шение).

Следует отметить, что при делении первого уравнения системы (2) с учетом функции (5) при $\xi = 0$ на второе теряется стационарная точка $W = 0$ ввиду сокращения величины W при делении. Поэтому при определенных соотношениях параметров и начальных условий, когда правая часть уравнения (6) отрицательна, возможны нереальные ситуации перехода W через ноль (при возрастании H) в отрицательную область. Анализ же первого уравнения системы (2) с учетом функций (5) показывает, что величина $W(t)$ не может быть отрицательной и $W = 0$ является стационарной точкой этого уравнения. С помощью линеаризации первого уравнения системы (2) с учетом функции (5) в окрестности нулевой стационарной точки можно показать, что она будет устойчивой при $\alpha \Delta H/k < 1$ и неустойчивой при обратном неравенстве. В связи с этим при анализе численных расчетов по аналитическому решению (10) следует игнорировать отрицательные значения W .

Для целей проведения численных расчетов по решению (10) приведем его к безразмерному виду с помощью следующих замен в исходной системе уравнений: $t' = kt$, $W = W\beta$, $H' = H/H_{\max}$, где характерные масштабы времени, объема материала и высоты клифа соответственно равны k^{-1} , β^{-1} , H_{\max} .

Тогда уравнение (6) и решение (10) примут соответственно вид

$$\frac{dW'}{dH'} = K_1 H' - K_2 \exp(W') \quad (12)$$

$$W'(H') = \frac{K_1 (H_0')^2}{2} - \ln \left[\exp\left(\frac{K_1 (H_0')^2}{2} - W_0'\right) + \sqrt{\frac{2}{K_1}} K_2 \left[\operatorname{Erfi}\left(H' \sqrt{\frac{K_1}{2}}\right) - \operatorname{Erfi}\left(H_0' \sqrt{\frac{K_1}{2}}\right) \right] \right] \quad (13)$$

где $K_1 = \frac{\alpha \beta H_{\max}^2}{\operatorname{tg} \alpha_0}$, $K_2 = \frac{k \beta H_{\max}}{\alpha \operatorname{tg} \alpha_0}$ — безразмерные параметры, $H_0' = H_0/H_{\max}$, $W_0' = W_0\beta$. Стационарное решение (11) в без-

размерных координатах примет вид $W'_{ст} = \ln((K_1/K_2)H')$

При проведении численных экспериментов ввиду отсутствия стандартных подпрограмм для вычисления быстро возрастающей функции $\text{Erfi}(x)$ она вычислялась с помощью представления интеграла вероятностей в степенной ряд

$$\varphi(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Z^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \quad (14)$$

тогда

$$\text{Erfi}(x) = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varphi(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n}. \quad (15)$$

Обозначим n -й член ряда (15) через a_n , тогда

$$a_n = a_{n-1} \frac{(2n-1)x^2}{(2n+1)n}, \quad (16)$$

и частичная n -я сумма ряда вычислялась по выражению $S_n = S_{n-1} + a_n$. Посмотрим, как ведет себя в выражении (16) функция $F(x,n) = \frac{(2n-1)x^2}{(2n+1)n}$. Если $F > 1$, то члены ряда (15) возрастают, в противном случае - убывают. При больших n функция $F(x,n)$ примет вид $F(x,n) = x^2/n$, и члены ряда начнут убывать при $n > x^2$ ($n_{кр.} = x^2$). В нашем случае $x = H' \sqrt{K_1/2}$ и при реально возможных параметрах, соответствующих условиям Новороссийского геологического района (см. выше): $\alpha = 0,3$; $\tan \alpha = 0,3$; $\beta = 2 \text{ м}^{-1}$; $H_{\max} = 10 \text{ м}$, получим $x = 10 H' = 10 \frac{H}{H_{\max}} = H$, где H - безразмерная величина, равная реальной высоте клифа. Например, при $x = H = 10$, что соответствует десятиметровой высоте клифа, ряд (15) начнет убывать, начиная с сотого члена. При расчетах по формуле (16) не будет возникать ситуации машинного переполнения при вычислении n -го члена ряда, в отличие от расчетов по формуле $a_n = \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$. Ситуацию переплетения следует ожидать при вычислении суммы ряда. Оценим максимальное значение x , при котором величина $\text{Erfi}(x)$ уже не будет представима в ЭВМ. Взяв максимально представимое чис-

ло в ЭВМ в виде 10^{75} , получим из асимптотического выражения функции $\text{Erfi}(x) \sim \exp(x^2)/2x$ максимальное значение, равное приблизительно 13. Таким образом, при указанных выше значениях параметров ситуации переполнения следует ожидать при высоте клифа более 13 м. В этом случае ввиду явного доминирования $\text{Erfi}(H\sqrt{K_1/2})$ члена в выражении (13) при $H > 13$ м можно пользоваться стационарным логарифмическим решением (II).

Сходимость ряда (15) следует из признака Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n} = 0.$$

Оценим относительную погрешность, допускаемую при вычислении частичных сумм S_n через величину $x^2/n = \varepsilon < 1$. Для заданного ε определим $n : n_\varepsilon = x^2/\varepsilon$ и соответствующее ему приращение частичной суммы ряда $\Delta S = S_{n_\varepsilon+1} - S_{n_\varepsilon} = a_{n_\varepsilon+1} = \varepsilon a_{n_\varepsilon}$. Ввиду того, что $S_{n_\varepsilon} > n_\varepsilon \cdot a_{n_\varepsilon}$, получим следующую оценку для относительного приращения суммы (относительной погрешности):

$$\frac{\Delta S}{S_{n_\varepsilon}} < \frac{\varepsilon a_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon a_{n_\varepsilon}} = \frac{\varepsilon^2}{x^2} = \delta. \quad (17)$$

Допустим, что при $x = 10$ задана следующая относительная погрешность частичной суммы $\delta = 10^{-4}$, тогда $\varepsilon = 10^{-1}$ и $n_\varepsilon = x^2/\varepsilon = 1000$, то есть для вычисления ряда (15) с заданной точностью следует взять тысячу первых его членов.

По аналитическому решению (13) проведена серия численных экспериментов при следующих значениях параметров K_1 и K_2 : $K_1 = 200, 400, \dots, 1000$; $K_2 = 25, 50, \dots, 150$. В качестве начальных условий рассматривались: $W'(0) = 0; 10; 20; 30$. Итак, всего было проведено $30 \cdot 4 = 120$ вариантов численных расчетов. В качестве примера на рис. 2 приведены расчетные кривые при $K_1 = 1000$ и $K_2 = 25$. Хорошо видно стремление кривых к стационарному решению $W_{ст} = \ln\left(\frac{K_1}{K_2} H'\right)$. Кривые при $W'(0) = 20; 30$ на рис. 2 не показаны, так как они

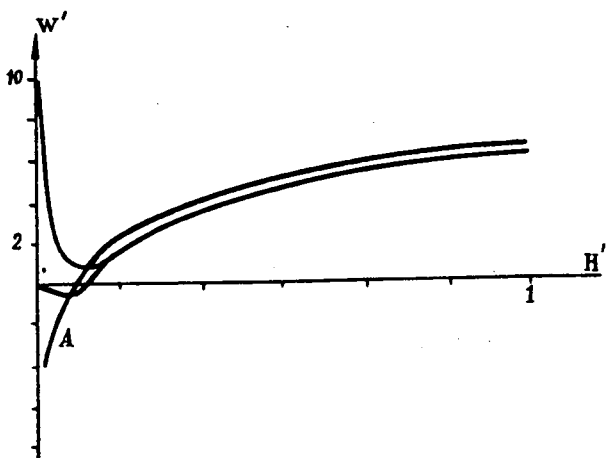


Рис.2. Расчетные кривые по аналитическому решению (13) при $K_1 = 1000$ и $K_2 = 25$. А - предельная кривая, соответствующая стационарному логарифмическому решению

быстро выходят на кривую, соответствующую $W'(0) = 10$. Видно, что в случае, когда начальная точка лежит выше предельной кривой, соответствующей стационарному решению, фазовая траектория понижается, достигая минимума на предельной кривой, и далее возрастает, асимптотически стремясь к ней. При заданном K_1 минимум функции $W'(H')$ уменьшается при увеличении K_2 , а при заданном K_2 он уменьшается при уменьшении K_1 . Как уже отмечалось выше, фазовые траектории, переходящие в отрицательную область ($W' < 0$), теряют физический смысл и фактически должны заканчиваться в точке $W' = 0$; которая в этом случае является устойчивой стационарной точкой. Из всех проведенных численных расчетов при $W'(0) \geq 10$ только при $K_2 = 25$ и $K_1 \geq 400$ фазовые траектории полностью лежат выше оси абсцисс ($W' = 0$), причем при $K_2 = 25$ и $K_1 = 400$ минимум, близкий к нулю, достигается в точке $W'(0.7/2) \approx 0$ ($H_{max} = 12$ м). Реальная высота клифа равняется 0,7 м.

В качестве базовых размерных параметров, необходимых для пересчета к реальным условиям, возьмем следующие: $K = 0,1 \text{ год}^{-1}$,

$\alpha = 0,3$; $\text{tg } \alpha_0 = 0,3$; $H_{\text{max}} = 12$ м, которые соответствуют условиям Новороссийского геологического района. Параметры аппроксимационной функции (5) при $\xi = 0$ оценим на основе квадратичной функции (Есин, 1980).

$$V = f(W) = V_{\text{max}} \frac{W}{W_{\text{opt}}} \left(2 - \frac{W}{W_{\text{opt}}} \right),$$

в которой для условий указанного района $V_{\text{max}} = 0,01$ м/год, $W_{\text{opt}} = 0,5$ м². Тогда для функции (5) имеем $df/dW = \alpha \exp(-\beta W) - \alpha W \beta \exp(-\beta W)$, откуда $W_{\text{max}} = 1/\beta$ и $\beta = 1/0,5$ м⁻² = 2 м⁻². Далее $V_{\text{max}} = f_{\text{max}}(W_{\text{max}}) = \alpha \cdot 0,5 \exp(-2 \cdot 0,5) = 0,01$ м/год, откуда $\alpha = e/50$ (м год)⁻¹, где e - основание натуральных логарифмов.

Таким образом, функция (5) принимает конкретный вид

$$f(W) = \frac{e}{50} W \exp(-2W). \quad (18)$$

При указанном выше наборе численных параметров получим следующие значения для безразмерных параметров: $K_1 = 288$, $K_2 = 149$. Функция этих значений, но в более широком диапазоне изменения начальных условий: $W(0)$, $W(2)$, $W(4)$, $W(6) = 0,5$; 1; 1,5; 2 м² (здесь представлено 16 вариантов начальных условий в размерных переменных). Расчеты показывают, что при данных начальных условиях, исключая случаи $W(6) = 0,5$; 1; 1,5; 2 м², объем материала на пляже исчезает при увеличении высоты клифа не более чем на 2,5% ($H_{\text{max}} = 12$ м взята за 100%). В последних случаях ($W(6)$) объем материала уменьшается почти до нуля, но не достигая его, так как предельная кривая пересекает фазовые траектории $W(H)$ выше оси абсцисс (в их пересечении находится минимум функции $W(H)$). Отметим, что для получения временных решений использовался численный метод Рунге-Кутты для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для указанных выше безразмерных параметров $K_1 = 149$, $K_2 = 288$ и начальных условий $W(0) = 5$ м², $H(0) = 2$ м имеем относительно быстрое уменьшение объема материала на пляже до ну-

ля (через 80 лет) и очень медленное, приблизительно линейное, увеличение высоты клифа: $H(80 \text{ лет}) = 2,1 \text{ м}$. В заключение отметим: что время счета одного варианта по системе уравнений (2) при различных функциях $f(w)$ на машине ЕС-1066 составляет 5 - 10 сек.

Л и т е р а т у р а

Е с и н Н. В. О роли обломочного материала в абразионном процессе. - Океанология, 1980, т. 20, № 1, с. III - II5.

Е с и н Н. В., М о с к о в к и н В. М., О к у н ь А. В. Математическая модель абразионного процесса для условий прямолинейного берегового склона. - Водные ресурсы, 1983, № 5, с. 92 - 97:

М и щ е н к о Е. Ф., Р о з о в Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. - М.: Наука, 1976. - 247 с.

Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. Изд. 7. - М.: Наука, 1977. - 342 с.