УДК 551.468.1

В.М. Московкин, Ю.Д. Мендыгулов

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПЛЯЖЕФОРМИРОВАНИЯ

Рассматривается способ учета флюктуаций в береговой системе клиф – пляж на основе стохастического уравнения Ито-Фоккера-Планка. Получено формальное решение последнего уравнения при помощи оператора эволюции и его дальнейшее представление, пригодное для развития теории возмущений, теории поля. В простейшем линейном случае получено решение в квадратурах, которое имеет определенный практический интерес с точки зрения динамики процесса пляжеформирования.

Стохастическое уравнение баланса пляжеобразующего материала предлагается нами в виде уравнения Ито [5]:

$$dw = [aHf(w) - \varphi(w) + u(t)]dt + g(w)d\rho(t), \tag{1}$$

где w – объем пляжеобразующего материала на единицу длины береговой линии; $a = \mathrm{const}$ – доля пляжеобразующего материала в породах, слагающих клиф (береговой уступ); $H = \mathrm{const}$ – высота клифа; $f(w)$ скорость отступания клифа; $\varphi(w)$ – интенсивность истирания пляжеобразующего материала; $u(t)$ – интенсивность искусственной или естественной подпитки ($u > 0$) или уноса ($u < 0$) материала; $\rho(t)$ – переменная, описывающая вклад случайных флюктуаций в приращение w; $g(w)$ – функция, описывающая зависимость амплитуды флюктуаций от величины w.

На $d\rho(t)$ наложены условия [5]

$$< d\rho(t) >= 0, \qquad < (d\rho(t))^2 >= dt.$$

Здесь $< ... >= \int_0^\infty (...) M(w,t \mid w_0, t_0) dw$ – статистическое усреднение; M – вероятность того, что в момент времени t объем материала будет равен w при условии, что в момент времени t_0 он был равен w_0.

Характерные полуэмпирические виды функций $f(w)$, $\varphi(w)$ для детерминированного уравнения баланса пляжеобразующего материала предложены в работе [3].

Из уравнения (1) и статистической независимости $d\rho(t)$ и w следует уравнение для функции распределения вероятности [5]

$$\frac{\partial M(w,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w}\left\{[aHf(w) - \varphi(w) + u(t)]\, M(w,t)\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial w^2}(g^2(w)M(w,t)), \tag{2}$$

которое является уравнением типа Фоккера–Планка, связанным со стохастическим уравнением Ито (1).

Получим формальное решение уравнения (2) при помощи оператора эволюции [1]. Если имеется уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{x},t) = \hat{L}_t \Psi(\vec{x},t), \tag{3}$$

где $\hat{L}_t$ – некоторый линейный оператор, действующий на переменные $\vec{x} \in \mathcal{R}^n$ и зависящий от t, то решение этого уравнения можно представить в виде $\Psi(\vec{x},t) = \hat{U}(t)\Psi(\vec{x},0)$, где $\hat{U}(t)$ – оператор эволюции; $\Psi(\vec{x},0) \equiv \varphi(\vec{x})$ – произвольная функция координат. Подстановка такого решения в уравнение (3) дает

ISSN 0367-4088.Гидромеханика.1993.Вып.66

уравнение для оператора эволюции $\frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{L}_t\hat{U}(t)$, решение которого имеет вид $\hat{U}(t) = T\exp\left\{\int_0^t \hat{L}_\tau d\tau\right\}$.

Следовательно, решение исходного уравнения такое:

$$\Psi(\bar{x},t) = T\exp\left\{\int_0^t \hat{L}_\tau d\tau\right\}\varphi(\bar{x}), \tag{4}$$

где T – оператор упорядочения Дайсона

$$TA(\tau)B(\acute{\tau}) \equiv \begin{cases} A(\tau)B(\acute{\tau}), & \acute{\tau} < \tau, \\ B(\acute{\tau})A(\tau), & \acute{\tau} > \tau, \end{cases}$$

который применяется в случае, если коммутатор $[\hat{L}_\tau, \hat{L}_{\acute{\tau}}] \equiv \hat{L}_\tau \hat{L}_{\acute{\tau}} - \hat{L}_{\acute{\tau}}\hat{L}_\tau$ не равен нулю [1]. Применяя формулу (4) к уравнению (2), получаем его формальное решение:

$$\begin{aligned} M(w,t) = T\exp\Big\{\Big[\tfrac{1}{2}\tfrac{d^2}{dw^2}g^2(w) - \tfrac{d}{dw}(aHf(w) - \varphi(w))\Big]t- \\ - \textstyle\int_0^t u(\tau)d\tau \tfrac{d}{dw}\Big\} M(w,0). \end{aligned} \tag{5}$$

Используя формулу $\left[\frac{d}{dw}, f(w)\right] = f'(w)$, где $[A,B] \equiv AB\text{-}BA$ – коммутатор операторов A и B [1], приведем выражение (5) к виду

$$\begin{aligned} M(w,t) = T\exp\Big\{[\tfrac{1}{2}(g^2(w)\tfrac{d^2}{dw^2} + 2(g^2(w))'\tfrac{d}{dw} + \\ +(g^2(w))'') - (aHf(w) - \varphi(w))\tfrac{d}{dw} - (aHf'(w) - \varphi'(w))]t- \\ - \textstyle\int_0^t u(\tau)d\tau\tfrac{d}{dw}\Big\} M(w,0). \end{aligned}$$

Последние две формулы позволяют предсказывать распределение вероятностей при $t > 0$.

Для дальнейшего анализа построим оператор эволюции (5), для чего обозначим

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dw^2}g^2(w) \equiv B, \qquad -\frac{d}{dw}(aHf(w) - \varphi(w) + u(t)) \equiv A(t). \tag{6}$$

Тогда формула (5) примет вид

$$M(w,t) = T\exp\left\{\int_0^t d\tau(A(\tau) + B)\right\} M(w,0). \tag{7}$$

Введя операторную функцию $Z(t)$ из соотношения

$$T\exp\left\{\int_0^t d\tau(A(\tau) + B)\right\} = T\exp\left\{\int_0^t d\tau A(\tau)\right\} Z(t)$$

получим уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = Te^{-\int_0^t A(\tau)d\tau} BTe^{\int_0^t A(\tau)d\tau} Z(t),$$

причем

$$\begin{aligned} Te^{-\int_0^t A(\tau)d\tau} BTe^{\int_0^t A(\tau)d\tau} = B+ \\ +\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \times \int_0^{t_n=t} dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2}\ldots\int_0^{t_1} dt_0[A(t_{n-1})[\ldots[A(t_0),B]\ldots]], \end{aligned} \tag{8}$$

где квадратных скобок под системой интегралов n.

Итак, получена формула (7) в виде, пригодном для развития систематической теории возмущений, подобно тому, как это делается в квантовой теории поля [2]:

$$M(w,t) = T\exp\left\{\int_0^t A(\tau)d\tau\right\} T\exp\left\{\int_0^t \tilde{B}(\tau)d\tau\right\} M(w,0), \tag{9}$$

$$\tilde{B}(t) = T\exp\left\{-\int_0^t A(\tau)d\tau\right\} BT\exp\left\{\int_0^t A(\tau)d\tau\right\}. \tag{10}$$

Видно, что превратить формальное решение (5) уравнения (2) в решение этого уравнения в квадратурах возможно лишь при сравнительно прстом виде операторов A и B. Возьмем $g(w) = \text{const}$ и линейное приближение для $aHf(w)$-$\varphi(w)$, тогда

$$A \equiv -\frac{d}{dw}(\alpha w + u(t)) = -(\alpha w + u(t))\frac{d}{dw} - \alpha,$$

где

$$\alpha = (aHf'(0) - \varphi'(0)).$$

Отсюда

$$[A(t_0), B] = -\frac{\alpha g^2}{2}\left[w\frac{d}{dw}, \frac{d^2}{dw^2}\right] = \alpha g^2\frac{d^2}{dw^2}.$$

Следовательно,

$$\tilde{B} = B\exp\{-2\alpha\tau\}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} &M(w,t) = T\exp\left\{\int_0^t A(\tau)d\tau\right\} T\exp\left\{\tfrac{1-e^{-2\alpha t}}{4\alpha} g^2 \tfrac{d^2}{dw^2}\right\} M(w,0) = \\ &T\exp\left\{\int_0^t A(\tau)d\tau\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{d\eta}{\sqrt{\Pi}}\exp\left\{-\eta^2 + \eta g\sqrt{\tfrac{1-\exp(-2\alpha t)}{\alpha}}\tfrac{d}{dw}\right\} M(w,0) = \\ &= T\exp\left\{\int_0^t A(\tau)d\tau\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{d\eta}{\sqrt{\Pi}} e^{-\eta^2} M(w + \eta g\sqrt{\tfrac{1-\exp(-2\alpha t)}{\alpha}}, 0). \end{aligned} \tag{11}$$

Вводя замену

$$w_1 = w + \eta g\sqrt{\frac{1-\exp(-2\alpha t)}{\alpha}},$$

получаем

$$\begin{aligned} &\eta = \frac{w_1 - w}{g\sqrt{\frac{1-\exp(-2\alpha t)}{\alpha}}}, \\ &M(w,t) = T\exp\left\{\int_0^t A(\tau)d\tau\right\} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 g^{-1} \times \\ &\times \left(\tfrac{\Pi(1-\exp(-2\alpha t))}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tfrac{\alpha(w-w_1)^2}{g^2(1-\exp(-2\alpha t))}\right\} M(w_1,0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 g^{-1}\exp(-\alpha t)\left(\tfrac{\Pi(1-\exp(-2\alpha t))}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times T\exp\left\{-(\alpha wt + \int_0^t u(\tau)d\tau)\tfrac{d}{dw}\right\} \exp\left\{-\tfrac{\alpha(w-w_1)^2}{g^2(1-\exp(-2\alpha t))}\right\} M(w_1,0). \end{aligned}$$

Для дальнейшего анализа, с учетом (9), рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} &T\exp\left\{-[\alpha wt + \int_0^t u(\tau)d\tau]\tfrac{d}{dw}\right\} = \\ &= \exp\left\{-\alpha wt\tfrac{d}{dw}\right\} \exp\left\{\int_0^t d\tau(-\widetilde{u(\tau)\tfrac{d}{dw}})\right\}. \end{aligned}$$

Согласно выражениям (8), (10) имеем

$$\begin{aligned} &-\widetilde{u(\tau)\tfrac{d}{dw}} = -u(\tau)\tfrac{d}{dw} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\tau} dt_{n-1} \\ &\int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2}\ldots\int_0^{t_1} dt_0[-\alpha w\tfrac{d}{dw}[\ldots[-\alpha w\tfrac{d}{dw}, -u(\tau)\times \\ &\times\tfrac{d}{dw}]\ldots]] = -\exp\{-\alpha t\}u(\tau)\tfrac{d}{dw}. \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$T\exp\left\{-[\alpha wt+\int_0^t u(\tau)d\tau]\frac{d}{dw}\right\}=$$
$$=\exp\left\{-\alpha wt\frac{d}{dw}\right\}\exp\left\{-\int_0^t d\tau\exp(-\alpha\tau)u(\tau)\frac{d}{dw}\right\}.$$

Используя выражение (11), получаем

$$M(w,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dw_1\exp(-\alpha t)g^{-1}\left(\frac{\Pi(1-\exp(-2\alpha t))}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\alpha(we^{-\alpha t}-\int_0^t d\tau e^{-\alpha\tau}u(\tau)-w_1)^2}{g^2(1-\exp(-2\alpha t))}\right\}M(w_1,0).$$

Пусть в начальный момент времени распределение вероятности таково, что с вероятностью, равной 1, реализуется какое-либо определенное значение w. Предположим, что при $t=0$ вдоль всей береговой линии с одинаковыми макроусловиями изъят весь пляжеобразующий материал, тогда в этот момент времени береговая система будет находиться в микросостоянии $w=0$ с вероятностью 1, что равносильно $M(w_1,0)=\delta(w_1)$, где δ – дельта-функция Дирака. Тогда плотность вероятности в дальнейшие моменты времени будет иметь вид

$$M(w,t)=g^{-1}\left(\frac{\Pi(e^{2\alpha t}-1)}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\exp\left\{-\frac{\alpha[w-\int_0^t d\tau\exp(\alpha(t-\tau))u(\tau)]^2}{g^2(e^{2\alpha t}-1)}\right\}.$$

Следовательно, эта плотность вероятности представляет собой гауссовский колокол с характерной шириной $g\left(\frac{e^{2\alpha t}-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$ и вершиной в точке $\tilde{w}=\int_0^t d\tau e^{\alpha(t-\tau)}u(\tau)$. Таким образом, он будет со временем двигаться в положительном или отрицательном направлении оси w в зависимости от знаков $u(\tau)$ и α. При этом наиболее вероятное значение $\tilde{w}$ (которое чаще других будет обнаружено в результате измерений) будет совпадать с вершиной гауссовского колокола и удовлетворять уравнению (линейному детерминированному уравнению баланса пляжеобразующего материала)

$$\frac{d\tilde{w}}{dt}=\alpha\tilde{w}+u(t). \qquad (12)$$

В процессе наблюдений мы чаще всего будем обнаруживать согласие с уравнением (12), однако отклонение от него, т.е. от $\tilde{w}$; будет порядка $g\left(\frac{\exp(2\alpha t)-1}{\alpha}\right)$. При $\alpha>0$ эти отклонения будут возрастать неограниченно с течением времени, при $\alpha<0$ – возрастать, стремясь к $\frac{g}{\sqrt{|\alpha|}}$, причем этот рост при $\alpha\neq 0$ будет порядка $e^{\alpha t}$. Легко показать, что при $u(t)=0$ $M(w,t)$ эволюционирует к стационарному распределению вероятности:

$$\lim_{t\to\infty}M(w,t)=\begin{cases}0, & \alpha>0\\ \frac{\sqrt{|\alpha|}}{g\sqrt{\Pi}}\exp\left\{-\frac{|\alpha|w^2}{g^2}\right\}, & \alpha<0.\end{cases} \qquad (13)$$

Итак, при $t\to\infty$ в случае $\alpha>0$ обнаружить систему в состоянии с конечным объемом пляжеобразующего материала w невозможно, следовательно, система уходит на бесконечность, что согласуется с решением уравнения (12). При $\alpha<0$ наиболее вероятно обнаружить систему в состоянии с $w=0$, что также согласуется с решением этого уравнения. Однако возможны отклонения от этого значения, причем почти всегда эти флюктуации будут принадлежать отрезку. Среднее значение w в этом случае будет

$$< w >= \frac{\sqrt{|\alpha|}}{g\sqrt{\Pi}} \int_0^\infty dwexp\left\{-\frac{|\alpha| w^2}{g^2}\right\} w = \frac{g}{2\sqrt{\Pi |\alpha|}},$$

т.е. прямо пропорционально амплитуде флюктуаций g и обратно пропорционально $|\alpha|$. Стационарное состояние (13) достигается системой за характерное время порядка $\Theta = \frac{1}{|\alpha|}$. Для некоторых реальных береговых систем это время порядка 17 лет [4].

Стационарное поведение стохастической динамической системы клиф-пляж получим из диффузионного уравнения (2) $\left(\frac{\partial M}{\partial t} = 0\right)$ с учетом условий $\lim_{w\to\infty} M\prime(w) = \lim M(w) = 0$,

$$M(w) = \frac{C}{g^2(w)} \exp\left\{2 \int \frac{dw}{g^2(w)} [aHf(w) - \varphi(w) + u_0]\right\},$$

где константа интегрирования C находится из условия нормировки, причем $u(t) = u_0 =$const является следствием стационарности.

При $g(w) =$ const экстремумы плотности вероятности находятся из условия

$$aHf(w) - \varphi(w) + u_0 = 0,$$

т.е. являются стационарными точками детерминированной динамической системы клиф-пляж [3, 4], причем очевидно, что точка максимума функции $M(w)$ является устойчивой стационарной точкой системы, а точка минимума – неустойчивой. При одной устойчивой стационарной точке наиболее вероятно обнаружить систему в этой точке, иначе говоря, большую часть времени система будет проводить в этой точке и ее ближайшей окрестности. При этом распределение вероятности в достаточно малой окрестности этой точки приближенно будет иметь гауссовский вид (13).

Наименее вероятно обнаружить систему в неустойчивой стационарной точке. При нескольких устойчивых стационарных точках система может быть обнаружена в любой из них, причем отношение времени пребывания (вероятность обнаружения) в одной из них ко времени пребывания в другой

$$\frac{M(w_1)}{M(w_2)} = exp\left\{\frac{2}{g^2} \int dw [aHf(w) - \varphi(w) + u_0] \Big|_{w_2}^{w_1}\right\},$$

где w_1, w_2 – координаты соответствующих устойчивых точек. При $g(w) \neq$ $\neq$ const наиболее вероятные значения w находятся из условия

$$aHf(w) - \varphi(w) + u_0 - g(w)\frac{dg(w)}{dw} = 0.$$

Отсюда видно, что поведение стохастической динамической системы при $g(w) \neq$ const существенно отличается от поведения системы при $g =$ const. Действительно, уже в линейном случае может быть несколько максимумов $M(w)$ или они могут отсутствовать вообще в зависимости от вида функции $g(w)$.

С физической точки зрения это означает следующее. Ранее было показано, что при $\alpha < 0$ и $g(w) =$ const наиболее вероятно обнаружить систему в состоянии $w = 0$ (13) (отсутствие пляжа). В этом же случае при вводе переменной амплитудной функции ($g(w) \neq$ const) могут возникать ненулевые устойчивые точки, свидетельствующие о формировании пляжа.

Представляет интерес для дальнейшего развития стохастической динамики береговых систем типа клиф-пляж разработать методы вычисления функций $g(w), f(w), \varphi(w)$, что возможно только на основе построения микроскопической теории динамики береговых систем подобно тому, как вычисление термодинамических функций возможно лишь на основе микроскопических теорий статистической физики.

1. *Ахиезер А.И., Пелетминский С.В.* Методы статистической физики. –М.: Наука, 1977. –233 с.
2. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантовых полей.– М.: Наука, 1976. –384 с.
3. *Есин Н.В., Московкин В.М., Дмитриев В.А.* К теории управления абразионным процессом // Природные основы берегозащиты. –М.: Наука, 1987. –С. 5–17.
4. *Московкин В.М., Есин Н.В., Ковтун Е.А.* Исследование устойчивости морских берегов методами теории катастроф // Океанология. –1989. –29, N1. –С. 108–111.
5. *Хакен Г.* Синергетика. –М.: Мир, 1985. –360 с.

Ялт. отд. Соч. НИЦ АН России
Упр. развитием рекреац. территорий и туризма
Ялта

Получено 04.01.91

УДК 533.6.013.42

И.Т. Селезов, О.В. Авраменко

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГИДРОУПРУГИХ ВОЛН В УПРУГОМ ИЛИ ЖИДКОМ СЛОЕ, КОНТАКТИРУЮЩЕМ С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

Исследуется распространение гармонических волн в гидроупругих системах: жидкий слой–упругая среда, упругий слой–жидкая среда. Получены дисперсионные уравнения, проведен их асимптотический и численный анализ. Результаты для фазовых и групповых скоростей в зависимости от длины волны при различных соотношениях плотностей представлены в виде графиков. Рассматриваются также моды, соответствующие симметричным и антисимметричным колебаниям упругого слоя.

Исследуется распространение гармонических волн в гидроупругих системах двух типов: упругий слой толщиной $2h$, помещенный в жидкую среду, и жидкий слой, ограниченный упругими полупространствами. Жидкость предполагается идеальной и сжимаемой, движение упругой среды описывается уравнениями классической линейной теории упругости. Указанные задачи частично рассматривались в [1]–[6].

Цель исследования состоит в определении и анализе условий распространения гармонических волн (симметричных и антисимметричных) и основных характеристик распространяющихся волн: фазовых и групповых скоростей и мод.

Введем обозначения областей в прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3:

$$\begin{bmatrix} \Omega^+ \\ \Omega \\ \Omega^- \end{bmatrix} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_k < \infty (k=1,2), \quad \begin{matrix} h < x_3 < \infty \\ -h \le x_3 \le h \\ -\infty < x_3 < -h \end{matrix} \right\}.$$

В предположении, что волны распространяются вдоль координаты x_1, приходим к плоской задаче, для которой искомые функции не зависят от координаты x_2. Задача в случае упругого слоя формулируется следующим образом. Определить функции скалярного и векторного потенциалов упругого поля φ и