ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ, 1994, том 21, № 1, с. 115 - 118

КРАТКИЕ НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 551.468

ДИНАМИКА БЕРЕГОВОЙ ЭКОГЕОСИСТЕМЫ ОБЛОМОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ–БИОМАССА ДОННОГО БИОЦЕНОЗА

© 1994 г. В. М. Московкин

Ялтинский отдел Сочинского научно-исследовательского центра "Управление развитием рекреационных территорий и туризма"

Поступила в редакцию 17.06.91 г.

Рассматривается линейное уравнение баланса пляжеобразующего материала, в котором коэффициент истираемости этого материала поставлен в линейную зависимость от биомассы донного биоценоза. При этом предполагается, что с увеличением биомассы увеличивается шероховатость дна, а следовательно, уменьшаются подвижность донных наносов и их истираемость. Для замыкания уравнения баланса вводится нелинейное уравнение динамики биомассы, в которое заложен нелинейный механизм саморегулируемого роста биомассы и линейный механизм уменьшения ее прироста при увеличении объема материала в береговой зоне. Полученная динамическая система второго порядка исследуется на предмет возникновения в ней бифуркаций рождения цикла (автоколебательных режимов). Определены условия возникновения автоколебаний и их период для случая, соответствующего данным натурных измерений на одном из участков побережья Черного моря.

Рассмотрим линейное уравнение баланса пляжеобразующего материала [3], в котором дополнительно коэффициент истираемости k этого материала поставим в линейную зависимость от биомассы донного биоценоза:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= aH\gamma(W_m - W) - \\ &- \left[C_0\left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) + C_{\min}\right]W + u,\end{aligned} \qquad (1)$$

где W – объем пляжеобразующего материала на единицу длины береговой линии ($0 \le W \le W_m$), м^2; a – доля пляжеобразующего материала в породах, слагающих берег; H – высота берегового уступа (клифа), м; $\gamma(W_m - W)$ – скорость отступания клифа, м/год, $\gamma = \text{const}$, м$^{-1}$ год$^{-1}$; u – интенсивность поступления ($u > 0$) или уноса ($u < 0$) за счет естественных или искусственных факторов, м^2/год; B – биомасса донного биоценоза на абразионной отмели (шельфе), т/м ($0 \le B \le B_{\max}$); $C_0, C_{\min} = \text{const}$, год$^{-1}$; $k(B) = C_0(1 - B/B_{\max}) + C_{\min}$ – коэффициент истираемости материала, год$^{-1}$; t – время, год.

Предполагалось, что с увеличением биомассы донного биоценоза увеличивается шероховатость дна, а следовательно, уменьшаются подвижность донных наносов и их истираемость. Это наиболее простой вариант уравнения баланса пляжеобразующего материала с линейными по B и W функциями. Для замыкания уравнения (1) введем нелинейное уравнение динамики биомассы донного биоценоза

$$dB/dt = K_1 B(1 - B/B_{\max}) - K_2 W, \qquad (2)$$

в основу которого положены следующие экологические и литодинамические особенности рассматриваемого процесса:

саморегулируемый рост биомассы, описываемый уравнением Ферхюльста (при $K_2 = 0$), решением которого является выпукло-вогнутая логистическая кривая, выходящая на стационарный уровень;

уменьшение прироста биомассы при увеличении объема материала (он способствует угнетению и деградации донного биоценоза).

Переходя к безразмерным переменным ($t' = K_{\perp}t$, $B' = B/B_{\max}$, $W' = W/W_m$), получаем следующую нелинейную динамическую систему второго порядка:

$$\begin{aligned} dW'/dt' &= -\tilde{K}_1 W' + \tilde{K}_2 B' W' + \tilde{K}_3, \\ dB'/dt' &= B'(1 - B') - \tilde{K}_4 W', \end{aligned} \qquad (3)$$

где $K_1 = (aH\gamma + C_0 + C_{\min})/K_1 > 0$, $\tilde{K}_2 = C_0/\tilde{K}_1 > 0$, $\tilde{K}_3 = aH\gamma/K_1 + u/K_1 W_m \gtrless 0$, $\tilde{K}_4 = K_2 W_m/K_1 B_{\max} > 0$.

Координаты особых точек системы (3) определяются из выражений

$$\begin{aligned} W'_* &= B'_*(1 - B'_*)/\tilde{K}_4, \\ B'_* &= (\tilde{K}_1 W'_* - \tilde{K}_3)/\tilde{K}_2 W'_*, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $0 \le B'_* \le (\tilde{K}_1 - 4\tilde{K}_3\tilde{K}_4)/\tilde{K}_2$, $0 \le W'_* \le 1/4\tilde{K}_4$, $0 \le \tilde{K}_3/\tilde{K}_1 \le W'_* \le \tilde{K}_3/(\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2) \le 1$. Значения W'_*

через параметры системы (3) определяются с помощью кубического уравнения

$$(W'_*)^3 + \frac{\tilde{K}_1(\tilde{K}_1-\tilde{K}_2)}{\tilde{K}_2^2\tilde{K}_4}(W'_*)^2 + \\ + \frac{(\tilde{K}_2-2\tilde{K}_1)\tilde{K}_3}{\tilde{K}_2^2\tilde{K}_4}W'_* + \frac{\tilde{K}_3^2}{\tilde{K}_2^2\tilde{K}_4} = 0, \quad (5)$$

из которого может быть получено первое бифуркационное множество для точек седлового типа [1].

Матрица линеаризованной системы (3) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -\tilde{K}_1+\tilde{K}_2B'_* & \tilde{K}_2W'_* \\ -\tilde{K}_4 & 1-2B'_* \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Второе бифуркационное множество (граница устойчивости узлов и фокусов) находится из условия приравнивания нулю следа матрицы A [1] (первое бифуркационное множество определяется также из условия $\det A = 0$ [1]):

$$\mathrm{tr}A = 1-\tilde{K}_1-2B'_*+\tilde{K}_2B'_* = 0, \quad (7)$$

откуда

$$0 \le B'_* = (\tilde{K}_1-1)/(\tilde{K}_2-2) \le 1, \quad (8)$$

$$\det A = -\left(\frac{\tilde{K}_2-2\tilde{K}_1}{\tilde{K}_2-2}\right)^2 + \\ + \frac{\tilde{K}_2(\tilde{K}_1-1)(\tilde{K}_2-\tilde{K}_1-1)}{(\tilde{K}_2-2)^2}. \quad (9)$$

Из выражений (4), (8) получим бифуркационный параметр $\tilde{K}_{4б}$, при котором происходит бифуркация рождения цикла ($\mathrm{tr}A = 0, \det A > 0$):

$$\tilde{K}_{4б} = \frac{(\tilde{K}_1-1)(\tilde{K}_2-\tilde{K}_1-1)(K_2-2K_1)}{\tilde{K}_3(\tilde{K}_2-2)^3}. \quad (10)$$

Анализ выражений, описывающих $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$, показывает, что $\tilde{K}_1 > \tilde{K}_2$. Отсюда с учетом ограничений (8) получим $0 \le K_1 \le 1$, $0 \le \tilde{K}_2 \le 2$, $\tilde{K}_2 < 1+\tilde{K}_1$. Объединяя эти неравенства, имеем $0 \le \tilde{K}_2 \le K_1 \le 1$ (треугольная область). С учетом последних неравенств и положительности параметра (10) получим, что $\tilde{K}_3 > 0$.

Критерий устойчивости Марсдена и Мак-Кракена получим в виде [2]

$$V'''(0) = \frac{3\pi\tilde{A}}{2\tilde{\gamma}^3}(2+\tilde{K}_2-\tilde{K}_2^2)\left(1+\frac{\tilde{A}^2}{\tilde{\gamma}^2}\right), \quad (11)$$

где

$$\tilde{A} = (\tilde{K}_2-2\tilde{K}_1)/(\tilde{K}_2-2) > 0,$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\sqrt{\tilde{K}_2(\tilde{K}_1-1)(\tilde{K}_2-\tilde{K}_1-1)-(\tilde{K}_2-2\tilde{K}_1)^2}}{2-\tilde{K}_2} > 0.$$

Отсюда видно, что $V'''(0) > 0$, и, следовательно, имеется неустойчивый предельный цикл.

Условие

$$\det A > 0 \Leftrightarrow \tilde{K}_2(\tilde{K}_1-1)(\tilde{K}_2-\tilde{K}_1-1) - (\tilde{K}_2-2\tilde{K}_1)^2 = \\ = (\tilde{K}_2-\tilde{K}_1)\tilde{K}_1(4+\tilde{K}_2)+\tilde{K}_2(1-2\tilde{K}_2) > 0$$

приводит к неравенству

$$\tilde{K}_2^2 + \frac{\tilde{K}_2(4\tilde{K}_1-\tilde{K}_1^2+1)}{\tilde{K}_1-2} - \frac{4\tilde{K}_1^2}{\tilde{K}_1-2} < 0, \quad (12)$$

решение которого имеет вид

$$\frac{-(4\tilde{K}_1-\tilde{K}_1^2+1)+\sqrt{D}}{2(\tilde{K}_1-2)} < \tilde{K}_2 < \\ < \frac{-(4\tilde{K}_1-\tilde{K}_1^2+1)-\sqrt{D}}{2(\tilde{K}_1-2)}, \quad (13)$$

где D – детерминант левой части (12).

Границы интервала (13) положительны, так как $0 \le \tilde{K}_1 \le 1$. Область (13) в треугольнике $0 \le \tilde{K}_2 \le \tilde{K}_1 \le 1$ представлена заштрихованным сегментом (рисунок)

$$\frac{-(4\tilde{K}_1-\tilde{K}_1^2+1)+\sqrt{D}}{2(\tilde{K}_1-2)} < \tilde{K}_2 < \tilde{K}_1, \quad (14)$$

проекции которого на оси координат равны: $0 < \tilde{K}_1, \tilde{K}_2 < 1/2$.

Для возникновения бифуркации рождения цикла необходимо, чтобы бифуркационная кривая (10) проходила через сегмент (14).

Приближенные аналитические характеристики предельного цикла могут быть получены согласно [4]. В обозначениях этой работы выражения, необходимые для приближенного аналитического представления предельного цикла, имеют вид

$$\mathrm{Re}\,C_1(0) = \frac{\tilde{A}}{8\tilde{\gamma}^2}(2+\tilde{K}_2-\tilde{K}_2^2)\left(1+\frac{\tilde{A}^2}{\tilde{\gamma}^2}\right), \tag{15}$$

$$\mathrm{Im}\,C_1(0) = -\frac{(\tilde{K}_2+1)}{8\tilde{\gamma}^3}(4\tilde{A}^2+\tilde{\gamma}^2+3\tilde{A}^2\tilde{K}_2) - \frac{1}{24}(\tilde{K}_2+1)^2\left(1+\frac{2\tilde{A}^2}{\tilde{\gamma}^2}+\frac{10\tilde{A}^4}{\tilde{\gamma}^4}\right)<0, \tag{16}$$

$$\alpha'(0) = \left.\frac{d\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{-(\tilde{K}_2-2)^3}{2\tilde{K}_3[\tilde{K}_1(\tilde{K}_2-\tilde{K}_1)(4+\tilde{K}_2)+\tilde{K}_2(1-2\tilde{K}_2)]}>0, \tag{17}$$

где $\alpha = \mathrm{Re}\lambda_1 = (1/2)\mathrm{tr}A$ определяется с помощью выражения (7), $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\omega$, $\omega = (1/2)\sqrt{4\det A-(\mathrm{tr}A)^2}>0$, $\lambda = \tilde{K}_4$, $\lambda_0 = \tilde{K}_{4б}$ – с помощью выражения (10),

$$\omega'(0) = \left.\frac{d\omega}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = -(\tilde{K}_2-2)^2\{[\tilde{K}_1(\tilde{K}_2-\tilde{K}_1)(4+\tilde{K}_2) + \tilde{K}_2(1-2\tilde{K}_2)]\tilde{K}_2(\tilde{K}_3^2-1)-(3+\tilde{K}_2)\times (\tilde{K}_2-2\tilde{K}_1^2)\}/\tilde{K}_3(\tilde{K}_2-2\tilde{K}_1)[\tilde{K}_1(\tilde{K}_2-\tilde{K}_1)\times(4+\tilde{K}_2)+\tilde{K}_2(1-2\tilde{K}_2)]^{3/2} \tag{18}$$

(при $0 \le \tilde{K}_3^2 \le 1$ имеем $\omega'(0)<0$),

$$\mu_2 = -\mathrm{Re}\,C_1(0)/\alpha'(0) < 0, \tag{19}$$

$$\beta_2 = 2\mathrm{Re}\,C_1(0) > 0, \tag{20}$$

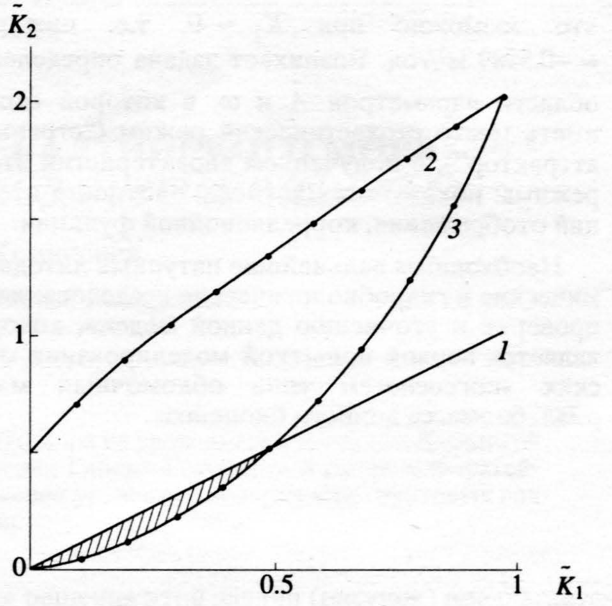
$$\tau_2 = -(1/\omega_0)\times[\mathrm{Im}\,C_1(0)-\mathrm{Re}\,C_1(0)\omega'(0)/\alpha'(0)]. \tag{21}$$

Тогда период предельного цикла определяется с помощью выражения

$$T = (2\pi/\omega_0)(1+\tau_2\varepsilon^2+0(\varepsilon^4)), \tag{22}$$

где $\omega_0 = \tilde{\gamma}$, $\varepsilon^2 = (\lambda-\lambda_0)/\mu_2+0(\lambda-\lambda_0)^2$.

Амплитуда колебаний пропорциональна ε. Так как $\mu_2<0$, то периодическое решение существует при $\lambda<\lambda_0$ (докритическая бифуркация). С учетом того что показатель Флоке $\beta=\beta_2\varepsilon^2+0(\varepsilon^4)$



Условия, необходимые для возникновения бифуркации Хопфа.

1 – прямая $\tilde{K}_2 = \tilde{K}_1$, *2* и *3* – соответственно графики правой и левой частей неравенства (13).

больше нуля, имеем неустойчивый предельный цикл. Это соответствует критерию Марсдена и Мак-Кракена [2]. Само периодическое решение с точностью до выбора начальной фазы может быть легко записано по предложенной в работе [4] процедуре.

Для реальных значений исходных размерных параметров $C_0 = 0.05$ год$^{-1}$, $C_{\min} = 0.01$ год$^{-1}$ (истирание гальки от 1 до 6% в год), $a = 0.02$, $\gamma = 1/3$ м$^{-1}$ год$^{-1}$, $H = 3$ м, $W_m = 30$ м^2 (условия рыхлых глинистых пород в районе м. Бурнас, Черное море), $K_1 = 0.6$ год$^{-1}$ (прирост биомассы в отсутствие обломочного материала при малых значениях биомассы B составляет 60% в год) получим по формуле (10) $\tilde{K}_{4б} = 0.02369/\tilde{K}_3 > 0$. С учетом того что $\tilde{K}_3 > 0$, получим $u > -0.5989$ м^2/год. Таким образом, бифуркация рождения цикла возникает здесь при подпитке материала или его уносе (изъятии) с интенсивностью < 0.6 м^2/год. Отметим, что точка $(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) = (0.13333; 0.08333)$ находится в сегменте (14). При $\tilde{K}_1 \approx 0.5$ - 0.6 год$^{-1}$, когда $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$ лежат в сегменте (14), получим $\tilde{\gamma} \approx 0.1$ - 0.2. Тогда при $\varepsilon^2 \approx 0$ размерный период колебаний составит $T = 2\pi/\tilde{\gamma}K_1 \approx 50$ - 100 лет.

Стохастический режим может возникнуть при малом периодическом возмущении бифуркационного параметра [1]:

$$\tilde{K}_4(t') = 0.02369/\tilde{K}_3 + \tilde{A}\sin\omega t',$$

$$0.02369/\tilde{K}_3 \gg \tilde{A},$$

что возможно при $\tilde{K}_3 \approx 0$, т.е. при $u \approx \approx -0.5989$ м^2/год. Возникает задача определения области параметров $\tilde{A}$ и ω, в которой может иметь место стохастический режим ("странный аттрактор"), с получением характеристик этого режима: показателя Ляпунова, плотности итераций отображения, корреляционной функции.

Необходимы дальнейшие натурные литодинамические и гидробиологические исследования по проверке и уточнению данной модели, которая является первой попыткой моделирования морских экогеосистем типа обломочный материал–биомасса донного биоценоза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутенин Н.В., Наймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
2. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 386 с.
3. *Московкин В.М., Есин Н.В.* // ДАН СССР. 1985. Т. 284. № 3. С. 731 - 734.
4. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.