А. М. ТРОФИМОВ, В. М. МОСКОВКИН

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ И РАСЧЕТ СКЛОНОВОГО СТОКА

Рассмотрим прямолинейный склон (или прямолинейный отрезок склона) длины l с перепадом высот a.

Уравнение Бернулли для турбулентного течения воды в общем случае имеет вид (Чугаев, 1975)

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_f. \quad (1)$$

Для равномерного течения воды, когда скорость постоянна вдоль потока, имеем

$$\frac{\alpha V_1^2}{2g} = \frac{\alpha V_2^2}{2g}.$$

Полагая

$$P_1 = P_2 = 0,$$

из (1) получим

$$Z_1 - Z_2 = a = h_f,$$

где h_f — общая потеря напора. Для равномерного течения h_f равно потери напора по длине, т. е. h_l. Тогда получим выражение

$$a = h_l. \quad (2)$$

h_l имеет следующий вид (Чугаев, 1975):

$$h_l = \frac{V^2}{C^2 R} l. \quad (3)$$

Гидравлический радиус (R) в случае плоскостного стока равен мощности стекающей воды, т. е.

$$R = H. \quad (4)$$

Коэффициент Шези (C) возьмем по формуле Маннинга (Чугаев, 1975)

$$C = \frac{1}{n} H^{\frac{1}{6}}, \quad (5)$$

где n — коэффициент шероховатости. Подставляя (4) и (5) в (3) и учитывая (2), получим

$$a = \frac{n^2}{H^{\frac{4}{3}}} l V^2. \quad (6)$$

Используя соотношение для постоянства расхода воды

$$Q = HV = \text{const} \quad (7)$$

и подставляя H из (7) в формулу (6), получим

$$\frac{n^2}{Q^{4/3}} V^{\frac{10}{3}} l = a, \quad (8)$$

и так как

$$\frac{a}{l} = \sin \alpha = I$$

(уклон склона), то, выражая из (8) V, окончательно придем к формуле, полученной В. Г. Пыжовым (1969)

$$V = \frac{1}{n^{0,6}} I^{0,3} Q^{0,4}. \quad (9)$$

Рассмотрим случай течения воды по криволиней-

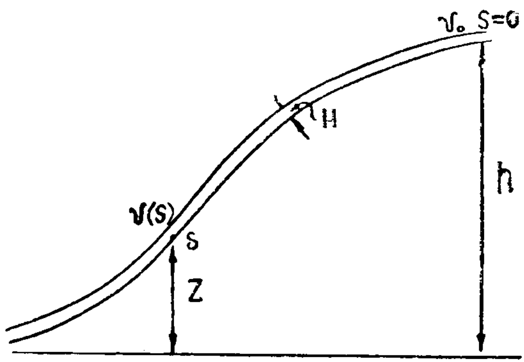

Рис. 1. К составлению уравнения движения по поверхности выпукло-вогнутого склона (обозначения объяснены в тексте).

ному склону (рис. 1). Считаем, что в точке s 0 скорость течения воды равна V_0 (она может равняться и нулю, когда $s=0$ точка, с которой начинает формироваться сток). Уравнение Бернулли запишем в виде

$$Z+\frac{V^2(s)}{2g}+h_s=h+\frac{V_0^2}{2g}. \tag{10}$$

Потерю напора по длине в случае неравномерного турбулентного течения запишем в виде

$$h_s=\frac{1}{C^2R}\int\limits_0^s V^2(s)\,ds. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), получим

$$Z+\frac{V^2(s)}{2g}+\frac{1}{C^2R}\int\limits_0^s V^2(s)\,ds=h+\frac{V_0^2}{2g}. \tag{12}$$

Учитывая выражения (4) и принимая за мощность (толщину) стекающей воды некоторую постоянную, осредненную по длине потока мощность, получим, продифференцировав (12) по s

$$\frac{dZ}{ds}+\frac{V}{g}\,\frac{dV}{ds}+\frac{V^2}{C^2H}=0. \tag{13}$$

Подставляя в уравнение (13) $\frac{dz}{ds}=-\sin\alpha$, запишем его в виде

$$V\frac{dV}{ds}=g\sin\alpha-\frac{g}{C^2H}\,V^2. \tag{14}$$

Записывая C по формуле (5), перепишем (14) в виде

$$V\frac{dV}{ds}=g\sin\alpha-\frac{gn^2}{H^{4/3}}\,V^2. \tag{15}$$

Получим окончательный вид уравнения движения водного слоя по криволинейному склону в натуральных координатах. Обозначая коэффициент перед V^2 через K

$$\frac{gn^2}{H^{4/3}} = K, \tag{16}$$

запишем (15) в удобном для решения виде

$$\frac{d(V^2)}{ds} + 2KV^2 = 2g\sin\alpha. \tag{17}$$

Зная профиль склона, который характеризуется изменением $\sin\alpha$ по склону, запишем (17) в виде

$$\frac{d(V^2)}{ds} + 2KV^2 = 2gf(s), \tag{18}$$

где

$$\sin\alpha = f(s). \tag{19}$$

Решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (18) с граничным условием $V(s=0) = V_0$ получим в виде

$$V^2 = e^{-2Ks}\left[2g\int\limits_0^s f(s)\,e^{2Ks}\,ds + V_0^2\right]. \tag{20}$$

Выпукло-вогнутый профиль склона можно аппроксимировать функцией

$$\sin\alpha = f(s) = pse^{-rs}, \tag{21}$$

где p, r — постоянные величины, причем $|pse^{-rs}| < 1$. Подставляя (21) в (20) и интегрируя, получим решение (при $2K - r \neq 0$)

$$V^2 = \frac{2gp}{(2K-r)^2}\{e^{-rs}[s(2K-r)-1] + e^{-2Ks}\} + + V_0^2e^{-2Ks} \tag{22}$$

Здесь $\lim\limits_{s\to\infty} V^2(s)=0$, т. е. где-то на склоне существует точка, в которой скорость достигает максимального значения. Ее найдем, приравняв к нулю первую производную от $V(s)$. Обозначая $2K-r=A$, из (22) получим трансцендентное уравнение для нахождения точки, в которой скорость максимальна

$$2K-Ars=2K\left[1+\left(\frac{V_0^2A^2}{2gp}\right)\right]e^{-As}. \qquad (23)$$

Можно показать, что при $A\neq 0$ уравнение (23) имеет единственное решение. При $A=0$ из (20) и (21) находим для квадрата скорости

$$V^2=e^{-2Ks}(gps^2+V_0^2). \qquad (24)$$

Таким образом, в гидравлической постановке решена задача расчета склонного стока по криволинейному склону (20) и в качестве примера приведено решение (22, 24) для конкретного набора выпукло-вогнутых профилей (21).

ЛИТЕРАТУРА

Чугаев Р. Р. Гидравлика. М., „Энергия", 1975.

Пыжов В. Г. Скорости стекания воды по склону при ливневом стоке. — „Метеорология и гидрология", 1969, № 13.