S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 49–74 (2016) УДК 517.958

DOI 10.17377/semi.2016.13.005 MSC 35B27

УСРЕДНЕННЫЕ МОДЕЛИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ В КОНФИГУРАЦИИ «ЖИДКОСТЬ–ПОРОУПРУГАЯ СРЕДА»

А.М. МЕЙЕРМАНОВ, С.А. ГРИЦЕНКО, А.А. ГЕРУС

Abstract. We consider a mathematical model of the isothermal acoustics in composite medium with two different components: liquid region and the elastic body perforated by a system of pores, filled the same liquid. The model is based on the classical axioms of continuum mechanics and contains rapidly oscillating coefficients that depend on a small parameter. Such a model, although precise enough, cannot, however, be used for numerical calculations. The problem is solved by using homogenization, i. e. the derivation of the equations not containing rapidly oscillating coefficients. Separately for the fluid and separately for poroelastic medium results already obtained previously. In this configuration of the two-component medium the main problem is the conditions of continuity at the common boundary between the liquid region and poroelastic region. In the present work are displayed six homogenized models of different complexity with the various coefficients characterizing the medium.

Keywords: composite medium, periodic structure, isothermal Stokes equations, acoustic equation, poro-elasticity, homogenization of periodic structures, two-scale convergence.

1. Введение

В работе рассматриваются изотермические процессы акустики в гетерогенной среде, состоящей из двух компонент – жидкой $\Omega^{(f)}$ и упругой Ω. Упругая компонента представляет собой упругое тело, пронизанное системой пор, заполненных жидкостью (поэтому мы называем её пороупругой). Систему заполненных жидкостью пор мы называем поровым пространством и обозначаем Ω_f^ε,

---

Meirmanov, A.M., Gritsenko, S.A., Gerus, A.A. The homogenized models of the isothermal acoustics in the configuration «fluid - poroelastic medium».

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (№ 14-17-00556).

Поступила 26 июня 2015, опубликована 11 февраля 2016.

твердый скелет обозначаем Ω_s^ε. Рассматриваемая ограниченная область $Q \in R^3$ представляет собой единичный куб: $Q=(0,1)\times(0,1)\times(0,1)$, в котором пороупругая среда занимает область $\Omega=(0,1)\times(0,1)\times(0,a),\ 0<a<1$, а область $\Omega^{(f)}$, занятая жидкостью, есть открытое дополнение области Ω:

$$Q=\Omega\cup\Omega^{(f)}\cup S^{(0)},\quad S^{(0)}=\partial\Omega\cap\partial\Omega^{(f)}.$$

В пороупругой области Ω для неизвестных функций $p(\mathbf{x},t)$ – давления и $\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ – перемещения система уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$\Big(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\Big)\,p+\nabla\cdot\mathbf{w}=0, \tag{1}$$

$$\big(\varrho_f\chi^\varepsilon+(1-\chi^\varepsilon)\varrho_s\big)\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\mathbb{P}+\varrho^\varepsilon\mathbf{F}, \tag{2}$$

$$\mathbb{P}=\chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\big)+(1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda\mathbb{D}(x,\mathbf{w})-p\,\mathbb{I}. \tag{3}$$

В области $\Omega^{(f)}$ движение жидкости описывается системой уравнений Стокса

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2}\,p+\nabla\cdot\mathbf{w}=0, \tag{4}$$

$$\varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\,\mathbb{P}^{(f)}+\varrho_f\mathbf{F}, \tag{5}$$

$$\mathbb{P}^{(f)}=\bar{\alpha}_\mu\mathbb{D}(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t})-p\,\mathbb{I}. \tag{6}$$

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются условия непрерывности для перемещений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}}\mathbf{w}(\mathbf{x},t)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\mathbf{w}(\mathbf{x},t) \tag{7}$$

и для нормальных компонент моментов

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}}\mathbb{P}^{(f)}(\mathbf{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\mathbf{x}^0)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\mathbb{P}(\mathbf{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\mathbf{x}^0). \tag{8}$$

Завершают задачу однородные граничные условия

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},t)=0,\ (\mathbf{x},t)\in S_T=S\times(0,T) \tag{9}$$

на границе $S=\partial Q$, и однородные начальные условия

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},0)=\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},0)=0,\ \mathbf{x}\in Q. \tag{10}$$

В уравнениях модели $\bar{c}_s$ и $\bar{c}_f$ – скорость звука в твердой и жидкой части соответственно, ϱ_f и ϱ_s – безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета, соотнесенные со средней плотностью воды ρ^0,

$$\varrho^\varepsilon=\varrho_f\,\chi^\varepsilon+\varrho_s\,(1-\chi^\varepsilon),$$

$\mathbb{I}$ – единичная матрица, $\mathbf{F}$ – заданный вектор распределенных массовых сил, $\mathbb{D}(x,\mathbf{u})=\dfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^*)$ – симметрическая часть $\nabla\mathbf{u}$.

Параметры

$$\bar{\alpha}_\mu = \frac{\alpha_\mu}{\alpha_\tau}, \quad \bar{\alpha}_\lambda = \frac{\alpha_\lambda}{\alpha_\tau},$$

$$\alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{Lg\,\rho^0}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau Lg\,\rho^0}, \quad \alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2},$$

возникают при переходе к безразмерным переменным:

$$\mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}}{L},\ \mathbf{w} \to \frac{\mathbf{w}}{L},\ t \to \frac{t}{\tau},\ \mathbf{F} \to \frac{\mathbf{F}}{g},\ \rho \to \frac{\rho}{\rho^0}.$$

Здесь L есть характерный размер рассматриваемой физической области, τ — время физического процесса, ρ^0 — плотность воды, g — ускорение силы тяжести, μ – динамическая вязкость жидкости, λ — коэффициент упругости твердого скелета.

Мы должны позволить всем безразмерным параметрам α_τ, α_μ, α_λ быть переменными функциями, зависящими от малого параметра ε, и найти все предельные режимы системы при $\varepsilon \to 0$. Малый параметр ε мы полагаем равным отношению среднего размера пор к размеру рассматриваемой области:

$$\varepsilon = \frac{l}{L}.$$

Для того, чтобы воспользоваться теорией усреднения и известными результатами по усреднению [1] – [6] мы должны ввести еще дополнительные упрощающие геометрические предположения о периодичности порового пространства и твердого скелета, о связности твердого скелета, о связности порового пространства.

Предположение 1. *1) Пусть $\chi(\mathbf{y})$ есть 1-периодическая функция, $Y_s = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}) = 0\}$ есть твердая часть единичного куба $Y = (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$, и пусть жидкая часть $Y_f = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}) = 1\}$ есть открытое дополнение твердой части. Пусть $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ и γ есть непрерывная липшицева поверхность.*

2) Область E^ε_f есть периодическое повторение в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки $Y^\varepsilon_f = \varepsilon Y_f$ и область E^ε_s есть периодическое повторение в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки $Y^\varepsilon_s = \varepsilon Y_s$.

3) Поровое пространство $\Omega^\varepsilon_f \subset \Omega = \Omega \cap E^\varepsilon_f$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f, и твердый скелет $\Omega^\varepsilon_s \subset \Omega = \Omega \cap E^\varepsilon_s$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s. Липшицева граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon_s \cap \partial\Omega^\varepsilon_f$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

4) Y_s и Y_f связные множества.

Предположение 2. *Твердый скелет Ω^ε_s есть связная область.*

Предположение 3. *Поровое пространство Ω^ε_f есть связная область.*

При выполнении предположения 1

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}),$$

где $\zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция пороупругой области области Ω в Q, а $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ – характеристическая функция порового пространства Ω^ε_f в Ω.

Мы предполагаем существование конечных или бесконечных пределов

$$\mu_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \bar{\alpha}_\mu(\varepsilon), \quad \lambda_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \bar{\alpha}_\lambda(\varepsilon),$$

$$\mu_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{\alpha}_\mu}{\varepsilon^2}, \quad \lambda_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{\alpha}_\lambda}{\varepsilon^2}$$

и выполнение неравенства:

$$\int_{Q_T}\Big(|\mathbf{F}(\mathbf{x},t)|^2 + |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x},t)|^2\Big)dxdt = F^2 < \infty.$$

В нашей модели $\mu_0 = 0$ (слабосжимаемая жидкость) и $0 < \lambda_0 < \infty$ (упругий скелет). Случай $\lambda_0 = \infty$ (абсолютно твердое тело) здесь не рассматриваем.

Модель (1) – (10) адекватно описывает физические процессы, но использовать для расчетов её невозможно из-за быстро осциллирующих коэффициентов. Поэтому мы выводим усредненные модели, уравнения которых не содержат быстро осциллирующих коэффициентов. В теореме 1 доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи (1) – (10). В теоремах 2 и 3 выводятся усредненные модели для односкоростного континуума: $\mu_1 = \lambda_1 = \infty$ и $0 \leqslant \mu_1, \lambda_1 < \infty$; в теоремах 4 и 5 – для двухскоростного континуума: $\mu_1 = \infty$, $0 \leqslant \lambda_1 < \infty$ и $\lambda_1 = \infty$, $0 \leqslant \mu_1 < \infty$. В теореме 6 рассматривается случай $\mu_1 = \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$, и в теореме 7 – случай $0 < \lambda_0 < \infty$, $0 < \mu_1 < \infty$. При выводе усредненных уравнений применяется метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга [4]–[6] и результаты А. М. Мейрманова [8]–[12]. Мы используем обозначения функциональных пространств, принятые в книге [7].

Пусть

$$\varrho^\varepsilon_{(f)} = (1-\zeta)\varrho_f + \zeta\big(\varrho_f\chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s\big).$$

Определение 1. *Пара функций* $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ *таких, что*

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1,1}_2(Q_T),\ p^\varepsilon \in L_2(Q_T),$$

называется обобщенным решением задачи (1) – (10), если эти функции удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\Big((1-\zeta)\frac{1}{\bar{c}_f^2} + \zeta\,\big(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\big)\Big)\,p^\varepsilon + \nabla\cdot\mathbf{w}^\varepsilon = 0 \tag{11}$$

почти всюду в Q_T, *и интегральному тождеству*

$$\int_{Q_T}\varrho^\varepsilon_{(f)}\big(\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)dxdt = \int_{Q_T}\big(\zeta\mathbb{P} + (1-\zeta)\mathbb{P}^{(f)}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})dxdt \tag{12}$$

для всех функций $\boldsymbol{\varphi}$ *таких, что* $\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1,0}_2(Q_T)$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$ *и* $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},T) = 0$ *для* $\mathbf{x} \in Q$.

Здесь и далее в работе используется обозначение:

$$B : C = tr(BC^T),$$

где B, C – матрицы.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Для всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0,T]$ существует единственное обобщенное решение $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\, p^\varepsilon\}$ задачи (1) – (10) и для него справедлива оценка*

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega \Big(|p^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2+|\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)|^2+(1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2\Big)dx \tag{13}$$
$$+\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(f)}}\Big(|p^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2+|\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)|^2\Big)dx+\int_0^T\int_{\Omega^{(f)}}\chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2dxdt$$
$$+\max_{0<t<T}\int_\Omega\Big(|\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)|^2+|\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x},t)|^2+(1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2\Big)dx$$
$$+\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(f)}}\Big(|\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)|^2+|\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x},t)|^2\Big)dx+\int_0^T\int_{\Omega^{(f)}}\chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu|\mathbb{D}(x,\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2})|^2dxdt$$
$$+\int_{\Omega_T}\chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\Big(|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2+|\mathbb{D}(x,\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2})|^2\Big)dxdt\leqslant C_0F^2,$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε и коэффициентов $\bar{\alpha}_\lambda$, $\bar{\alpha}_\mu$.

Доказательство теоремы стандартно (см., например [7]).

Теорема 2. *Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\, p^\varepsilon\}$ – обобщенное решение задачи (1) – (10) и*

$$\mu_1=\lambda_1=\infty.$$

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ (скорость жидкости) и p (давление) последовательностей $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ удовлетворяют системе уравнений акустики

$$\varrho_f\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\nabla\, p=\varrho_f\mathbf{F}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2}\frac{\partial\, p}{\partial t}+\nabla\cdot\,\mathbf{v}=0 \tag{15}$$

в области $\Omega^{(f)}$ при $t>0$, и системе уравнений акустики в области Ω при $t>0$:

$$\hat{\varrho}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\nabla\, p=\hat{\varrho}\mathbf{F}, \tag{16}$$

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial\, p}{\partial t}+\nabla\cdot\,\mathbf{v}=0, \tag{17}$$

где величина m характеризует пористость среды:

$$m=\int_Y\chi(y)dy.$$

Соотношения (14) – (17) замыкаются однородным граничным условием

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})=0, \tag{18}$$

на границе S_T, однородными начальными условиями

$$p(\mathbf{x},0)=0,\ \mathbf{v}(\mathbf{x},0)=0,\ \mathbf{x}\in Q \tag{19}$$

и условиями непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \tag{20}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} p(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} p(\mathbf{x},t) \tag{21}$$

на общей границе $S^{(0)}_T$.

Здесь

$$\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s,$$

$\mathbf{n}(\mathbf{x})$ *есть нормальный вектор к* S *в точке* $\mathbf{x}\in S$, *и* $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ *– нормальный вектор к* $S^{(0)}$ *в точке* $\mathbf{x}^0\in S^{(0)}$.

Теорема 3. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\,p^\varepsilon\}$ *– обобщенное решение задачи (1) – (10) и*

$$0\leqslant\mu_1,\ \lambda_1<\infty.$$

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ *и* $\{p^\varepsilon\}$ *удовлетворяют в области* $\Omega^{(f)}_T$ *системе уравнений акустики (14), (15) и системе уравнений акустики в области* Ω_T, *состоящей из уравнения баланса моментов в форме*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t-\tau)\cdot\nabla p\,(\mathbf{x},\tau)d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x},t), \tag{22}$$

и уравнения неразрывности (17).

Задача замыкается граничным и начальным условиями (18), (19), и условиями непрерывности (20), (21).

Матрица $\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t)$ *и функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ *задаются формулами (54), (55).*

Теорема 4. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\,p^\varepsilon\}$ *– обобщенное решение задачи (1) – (10),*

$$\mu_1=\infty,\ 0\leqslant\lambda_1<\infty,$$

и $\mathbf{w}^\varepsilon_f=\mathbb{E}_{\Omega^\varepsilon_f}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$ *– продолжение из* Ω^ε_f *в* Ω.

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ *и* $\{p^\varepsilon\}$, *где*

$$\mathbf{v} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,m\frac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t} + \zeta\,\frac{\partial\mathbf{w}^{(s)}}{\partial t} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,m\,\mathbf{v}_f + \zeta\,\mathbf{v}^{(s)}, \tag{23}$$

и $\mathbf{w}^{(s)}$ *и* $\mathbf{w}_f$ *– пределы последовательностей* $\{(1-\chi^\varepsilon)\mathbf{w}^\varepsilon\}$ *и* $\{\mathbf{w}^\varepsilon_f\}$, *удовлетворяют в области* $\Omega^{(f)}_T$ *системе уравнений акустики (14), (15) и системе уравнений акустики в области* Ω_T, *состоящей из уравнения баланса моментов*

$$m\varrho_f\,\mathbf{v}_f + \varrho_s\,\mathbf{v}^{(s)} + \int_0^t \big(-\hat{\varrho}\mathbf{F}+\nabla p\big)(\mathbf{x},\tau)d\tau = 0 \tag{24}$$

для жидкой компоненты, уравнения баланса моментов

$$\mathbf{v}^{(s)} - (1-m)\mathbf{v}_f = -\int_0^t \mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\Big(\nabla p + \varrho_s\big(\frac{\partial\mathbf{v}_f}{\partial\tau}-\mathbf{F}\big)\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau \tag{25}$$

для твердой компоненты и уравнения неразрывности

$$(26)\qquad \Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{(1-m)}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\big(m\,\mathbf{v}_f+\mathbf{v}^{(s)}\big)=0.$$

Задача замыкается граничным и начальными условиями (18), (19) и условиями непрерывности (20), (21).

В (24) – (25) матрица $\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t)$ задается формулой (66).

В теореме используется обозначение:

$$\boldsymbol{w}_f^\varepsilon=\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big),$$

где

$$\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}:\mathbf{W}_2^1(\Omega_f^\varepsilon)\to\mathbf{W}_2^1(\Omega)$$

– оператор продолжения из Ω_f^ε в Ω, такой, что $\mathbf{w}_f^\varepsilon=\mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_f^\varepsilon\times(0,T)$, и

$$\int_\Omega|\mathbf{w}_f^\varepsilon|^2dx\ \leqslant\ C_0\int_{\Omega_f^\varepsilon}|\mathbf{w}^\varepsilon|^2dx,\qquad \int_\Omega|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_f^\varepsilon)|^2dx\ \leqslant\ C_0\int_{\Omega_f^\varepsilon}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2dx.$$

Корректность такого продолжения обоснована в работе C.Conca [13].

Теорема 5. *Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\,p^\varepsilon\}$ – обобщенное решение задачи (1) – (10),*

$$\lambda_1=\infty,\ 0\leqslant\mu_1<\infty,$$

и $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon=\mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$ – продолжение из Ω_s^ε в Ω.

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ (скорость жидкости) и p (давление) последовательностей $\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ и $\{p^\varepsilon\}$, где

$$(27)\qquad \mathbf{v}=(1-\zeta)\mathbf{v}+\zeta\,\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}+\zeta\,(1-m)\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t}=(1-\zeta)\mathbf{v}+\zeta\,\mathbf{v}^{(f)}+\zeta\,\mathbf{v}_s,$$

а $\mathbf{w}^{(f)}$ и $\mathbf{w}_s$ являются пределами последовательностей $\{\chi^\varepsilon\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$, удовлетворяют в области $\Omega_T^{(f)}$ системе уравнений акустики (14), (15) и системе уравнений акустики в области Ω_T, состоящей из уравнения неразрывности

$$(28)\qquad \Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{(1-m)}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial\,p}{\partial t}+\nabla\cdot\big(\mathbf{v}^{(f)}+\mathbf{v}_s\big)=0,$$

уравнения баланса моментов

$$(29)\qquad \varrho_f\,\mathbf{v}^{(f)}+(1-m)\varrho_s\,\mathbf{v}_s=\int_0^t\Big(\hat{\varrho}\mathbf{F}-\nabla\,p\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau$$

для твердой компоненты и уравнения баланса моментов

$$(30)\qquad \mathbf{v}^{(f)}-m\,\mathbf{v}_s=-\int_0^t\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)\cdot\Big(\nabla\,p+\varrho_f\big(\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\tau}-\mathbf{F}\big)\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau$$

для жидкой компоненты.

Задача замыкается граничным и начальными условиями (18), (19) и условиями непрерывности (20), (21).

В (29) – (30) матрица $\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t)$ задается формулой (75).

Здесь, как и в предыдущей теореме, $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$, где

$$\mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon} : \mathbf{W}_2^1(\Omega_s^\varepsilon) \to \mathbf{W}_2^1(\Omega)$$

– оператор продолжения из Ω_s^ε в Ω, такой что $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_s^\varepsilon \times (0,T)$, и

$$\int_\Omega |\mathbf{w}_s^\varepsilon|^2 dx \ \leqslant \ C_0 \int_{\Omega_s^\varepsilon} |\mathbf{w}^\varepsilon|^2 dx, \quad \int_\Omega |\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s^\varepsilon)|^2 dx \ \leqslant \ C_0 \int_{\Omega_s^\varepsilon} |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx.$$

Теорема 6. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\, p^{\,\varepsilon}\}$ *– обобщенное решение задачи (1) – (10),*

$$\mu_1 = \infty,\ 0 < \lambda_0 < \infty,$$

и $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$.

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости),* p *(давление), и* $\mathbf{w}_s$ *(перемещение твердой части) последовательностей* $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$, $\{p^{\,\varepsilon}\}$, *и* $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$, *где*

$$\mathbf{v} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\, \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\, \mathbf{v}_s, \tag{31}$$

удовлетворяют в области $\Omega_T^{(f)}$ *системе уравнений акустики (14), (15) и уравнению Ламе*

$$\hat{\varrho}\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot \big(\lambda_0\, \mathfrak{N}_3^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s)\big) + \hat{\rho}\mathbf{F} \tag{32}$$

в области Ω_T *с однородным граничным условием*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \tag{33}$$

на границе $\partial\Omega^{(f)} \backslash S^{(0)}$ *при* $t > 0$, *с однородными начальными условиями*

$$p(\mathbf{x},0) = 0,\ \mathbf{v}(\mathbf{x},0) = 0 \tag{34}$$

для скорости жидкости и давления в области $\Omega^{(f)}$, *с однородным граничным условием*

$$\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t) = 0, \tag{35}$$

на границе $\partial\Omega \backslash S^{(0)}$ *при* $t > 0$, *и однородными начальными условиями*

$$\mathbf{w}_s(\mathbf{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0 \tag{36}$$

для перемещения твердой части в Ω.

На общей границе $S_T^{(0)}$ *выполняются условия непрерывности*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \tag{37}$$

и

$$-\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} p\,(\mathbf{x},t)\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \Big(\lambda_0\, \mathfrak{N}_3^s : \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}_s(\mathbf{x},t)\big)\Big)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0). \tag{38}$$

Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ *– нормаль к* $S^{(0)}$ *в точке* $\mathbf{x}^0 \in S^{(0)}$.

В (32) симметричный положительно определенный постоянный тензор 4 ранга $\mathfrak{N}_3^s$ *задается формулой (92).*

Теорема 7. *Пусть* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}\}$ *– обобщенное решение задачи (1) – (10),*

$$0 < \mu_1 < \infty, \ 0 < \lambda_0 < \infty,$$

и $\mathbf{w}_s^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\Omega_s^{\varepsilon}}\big(\mathbf{w}^{\varepsilon}\big)$.

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\}$ *и* $\{p^{\varepsilon}\}$, *где*

$$\mathbf{v} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} + \zeta\,(1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\mathbf{v}^{(f)} + \zeta\,\mathbf{v}_s, \tag{39}$$

удовлетворяют системе уравнений акустики (14), (15) в области $\Omega_T^{(f)}$, *граничному и начальным условиям(33) – (34).*

В области Ω_T *предельные функции* p_f *(давление жидкости),* $\mathbf{w}^f$ *(перемещение жидкости), и* $\mathbf{w}_s$ *(перемещение твердой части) последовательностей* $\{\zeta\,\chi^{\varepsilon}\,p^{\varepsilon}\}$, $\{\zeta\,\chi^{\varepsilon}\,\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$, *и* $\{\zeta\,\mathbf{w}_s^{\varepsilon}\}$ *удовлетворяют системе усредненных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности*

$$\frac{1}{c_f^2}p_f + \nabla\cdot\,\mathbf{w}^{(f)} = \mathbb{C}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \frac{c_0^s}{\lambda_0}p_f, \tag{40}$$

уравнения баланса моментов

$$\varrho_f\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t^2} + \varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} = \nabla\cdot\,\big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_2^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) - p_f\,\mathbb{C}_1^s\big) + \hat{\varrho}\mathbf{F} \tag{41}$$

для твердой компоненты и уравнения баланса моментов

$$-\int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t-\tau)\cdot\Big(\nabla\,p_f + \varrho_f(\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial \tau^2} - \mathbf{F})\Big)(\mathbf{x}, \tau)d\tau = \frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} - m\,\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} \tag{42}$$

для жидкой компоненты.

Полученные уравнения замыкаются условиями непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega^{(f)}}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega}} \big(\mathbf{v}^{(f)}(\mathbf{x}, t) + (1-m)\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\big)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \tag{43}$$

и

$$-\lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega^{(f)}}} p\,(\mathbf{x}, t)\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega}} \Big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_2^s : \mathbb{D}\big(x, \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t) - p_f\,\mathbb{C}_1^s\big)\Big)\cdot\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \tag{44}$$

на общей границе $S_T^{(0)}$, *однородными граничными и начальными условиями (35) и (36) для перемещения твердой части, однородными граничными и начальными условиями*

$$\mathbf{w}^{(f)}(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \ \mathbf{x}\in\partial\Omega\backslash S^{(0)}, \ t\in(0, T), \tag{45}$$

$$\mathbf{w}^{(f)}(\mathbf{x}, 0) = 0, \ \mathbf{x}\in\Omega \tag{46}$$

для перемещения жидкости.

В (40) – (45) $\mathbf{n}(\boldsymbol{x}^0)$ *– нормальный вектор к* $S^{(0)}$ *в точке* $\mathbf{x}^0 \in S^{(0)}$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ *– нормальный вектор к* $\partial\Omega$ *в точке* $\mathbf{x}\in\partial\Omega$, *симметричный положительно определенный постоянный тензор 4 ранга* $\mathfrak{N}_2^s$, *матрицы* $\mathbb{C}_0^s$ *и* $\mathbb{C}_1^s$, *постоянная* c_0^s *заданы формулами (84), (85) и (86), а матрица* $\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t)$ *описана формулой (75).*

3. Предварительные сведения. Двухмасштабная сходимость

Метод двухмасштабной сходимости был предложен Г. Нгуетсенгом (см. [4], [5]) и нашел широкое применение в задачах усреднения (см., например, обзор [6]).

Последовательность $\{w^\varepsilon\} \subset L_2(\Omega_T)$ называется *двухмасштабно сходящейся* к функции $W(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \in L_2(\Omega_T \times Y)$, 1-периодической по переменной $\mathbf{y} \in Y$, если для любой функции $\sigma = \sigma(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, 1-периодической по $\mathbf{y}$ справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T} w^\varepsilon(\mathbf{x},t)\sigma(\mathbf{x},t,\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dx\,dt = \int_{\Omega_T}\Big(\int_Y W(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\sigma(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy\Big)dx\,dt,$$

где $Y = [0,1)^3$ – ячейка периодичности.

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей установлены в следующих теоремах.

Теорема 8 (**Теорема Нгуетсенга** для скалярных функций)**.** ***1.*** *Любая ограниченная в $L_2(\Omega_T)$ последовательность $\{w^\varepsilon\}$ содержит подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторой функции $W \in L_2(\Omega_T \times Y)$, 1-периодической по $\mathbf{y}$.*

2. *Пусть последовательности $\{w^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla w^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L_2(\Omega_T)$.*

Тогда существует функция $W = W(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ 1-периодическая по $\mathbf{y}$, и подпоследовательность $\{w^\varepsilon\}$ такая что W, $\nabla_y W \in L_2(\Omega_T \times Y)$, и подпоследовательности $\{w^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla w^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходятся к W и $\nabla_y W$ соответственно.

3. *Пусть последовательности $\{w^\varepsilon\}$ и $\{\nabla w^\varepsilon\}$ ограничены в $L_2(\Omega_T)$.*

Тогда существуют функции $w \in L_2(\Omega_T)$ и $W \in L_2(\Omega_T \times Y)$ и подпоследовательность из $\{\nabla w^\varepsilon\}$ такая, что функция W является 1-периодической по $\mathbf{y}$, $\nabla w \in L_2(\Omega_T)$, $\nabla_y W \in L_2(\Omega_T \times Y)$, и подпоследовательность $\{\nabla w^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится к функции $\nabla w(\mathbf{x},t) + \nabla_y W(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$.

4. *Пусть $\sigma \in L_2(Y)$ и $\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sigma(\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$. Пусть последовательность $\{w^\varepsilon\} \subset L_2(\Omega_T)$ двухмасштабно сходится к $W \in L_2(\Omega_T \times Y)$. Тогда последовательность $\{\sigma^\varepsilon w^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится к функции σW.*

Теорема 9 (**Теорема Нгуетсенга** для вектор-функций)**.** ***1.*** *Любая ограниченная в $\mathbf{L}_2(\Omega_T)$ последовательность $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ содержит подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторой функции $\mathbf{W} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T \times Y)$, 1-периодической по $\mathbf{y}$.*

2. *Пусть последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\}$ равномерно ограничены в $\mathbf{L}_2(\Omega_T)$.*

Тогда существует функция $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, 1-периодическая по $\mathbf{y}$, и подпоследовательность $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ такая, что $\mathbf{W}$, $\nabla_y \mathbf{W} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T \times Y)$, и подпоследовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\}$ двухмасштабно сходятся в $\mathbf{L}_2(\Omega_T)$ к $\mathbf{W}$ и $\mathbb{D}(y,\mathbf{W})$ соответственно.

3. *Пусть последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{D(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\}$ ограничены в $\mathbf{L}_2(\Omega_T$.*

Тогда существуют функции $\mathbf{w} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$ и $\mathbf{W} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T \times Y)$ и подпоследовательность из $\{\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\}$ такие, что функция $\mathbf{W}$ является 1-периодической по $\mathbf{y}$, $\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$, $D(y,\mathbf{W}) \in \mathbf{L}_2(\Omega_T \times Y)$, и подпоследовательность $\{\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\}$ двухмасштабно сходится к функции $\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) + D(y,\mathbf{W})$.

Заметим, что слабая сходимость и двухмасштабная сходимость связаны соотношением:

$$\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rightharpoonup \int_Y \mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

Нам также будет необходима следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\{w^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\}$ *слабо сходится в* $L_2(\Omega_T)$ *к* $w(\mathbf{x},t)$ *и двухмасштабно сходится к* $W(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$,

$$\alpha(\varepsilon)\|\nabla w^{\varepsilon}\|_{2,\Omega_T} \leqslant C,$$

где C *не зависит от* ε, *и*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty,$$

Тогда $W(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = w(\mathbf{x},t)$.

Доказательство. Пусть $\Psi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ – произвольная гладкая скалярная функция, периодическая по $\mathbf{y}$. Последовательность $\{\sigma_j^{\varepsilon}\}$, где

$$\sigma_j^{\varepsilon} = \int_{\Omega_T}\alpha(\varepsilon)\frac{\partial w^{\varepsilon}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\Psi(\mathbf{x},t,\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dx\,dt,$$

равномерно по ε ограничена. Поэтому

$$\int_{\Omega_T}\varepsilon\frac{\partial w^{\varepsilon}}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\Psi(\mathbf{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})dx\,dt = \frac{\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)}\sigma_j^{\varepsilon} \to 0$$

при $\varepsilon\to 0$, что эквивалентно равенству

$$\int_{\Omega_T}\int_Y W(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\frac{\partial\Psi}{\partial y_j}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy\,dx\,dt = 0, \quad j=1,...,n,$$

или

$$W(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = w(\mathbf{x},t).$$

□

4. Доказательство теорем 2 – 5

Главная проблема в доказательстве этих теорем состоит в условиях непрерывности на общей границе $S^{(0)}$ между областями $\Omega^{(f)}$ и Ω. Эти условия следуют из предельного интегрального тождества

(47)
$$-\int_{Q_T} p(\mathbf{x},t)\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\,dxdt = \int_{Q_T}\int_Y \varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big(\mathbf{F}-\frac{\partial^2\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t^2}\big)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)dy\,dx\,dt$$

для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}\in\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$, и интегрального тождества

$$\int_{Q_T}\Big(\big((1-\zeta)\frac{1}{\bar{c}_f^2}+\zeta(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^2})\big)\frac{\partial\,p(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,\psi - \nabla\,\psi\cdot\frac{\partial\mathbf{w}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\Big)dxdt = 0 \tag{48}$$

для любой гладкой функции $\psi\in W_2^{1,0}(Q_T)$.

Здесь $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ – двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$, и

$$\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \big(1-\zeta(\mathbf{x})\big)\varrho_f + \zeta(\mathbf{x})\big(\varrho_f\,\chi(\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\,\varrho_s\big).$$

Для всех случаев (47) и (48) влекут систему уравнений акустики (14) и (15) в области $\Omega_T^{(f)}$, условия непрерывности (20) и (21) на общей границе $S^{(0)}$ и уравнение неразрывности

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial\, p}{\partial t}+\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}=0$$

в области Ω_T.

Все различия сконцентрированы в уравнении динамики в области Ω_T и в представлении скорости смеси $\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$.

4.1. **Доказательство теоремы 2.**

4.1.1. *Предельный переход.* Из теоремы 1 следует ограниченность последовательностей $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\dfrac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\}$ и $\{\alpha(\varepsilon)\nabla \mathbf{w}^\varepsilon\}$, где $\alpha^2(\varepsilon)=\min\{\bar{\alpha}_\mu,\,\bar{\alpha}_\lambda\}$, в норме $L_2(Q_T)$ и $\mathbf{L}_2(Q_T)$. Следовательно, из них можно выделить слабо сходящиеся в $L_2(Q_T)$ и $\mathbf{L}_2(Q_T)$ при $\varepsilon\to 0$ подпоследовательности (для которых мы сохраняем те же обозначения):

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p,\quad \mathbf{w}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{w},\quad \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\rightharpoonup \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}.$$

Заметим также, что

$$\bar{\alpha}_\lambda(1-\zeta)\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\to 0,\quad \bar{\alpha}_\mu\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\to 0$$

сильно в норме $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon\to 0$.

Согласно теореме Нгуетсенга, существуют 1-периодические по $\mathbf{y}$ функции $P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ и $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ такие, что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ сходятся двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ и $\mathbf{L}_2(Q_T)$ к $P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, $\dfrac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}$ соответственно.

Из условий теоремы следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}=\infty.$$

Применяя лемму 1, мы заключаем, что

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\mathbf{w}(\mathbf{x},t).$$

Лемма 2. *При условии $\mu_0=0$, $0\leqslant\lambda_0<\infty$ двухмасштабный предел последовательности $\{p^\varepsilon\}$ совпадает со слабым пределом:*

$$P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=p(\mathbf{x},t).$$

Доказательство. Действительно, переходя к двухмасштабным пределам в интегральном тождестве (12) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi}=\varepsilon h(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$, получаем:

$$\int_{Q_T} h(\mathbf{x},t)\Big(\int_Y P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\nabla_y\cdot\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{y})dy\Big)dxdt=0.$$

Это означает, что

$$\nabla_y P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=0,\ \ \mathbf{y}\in Y,$$

что эквивалентно равенству $P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=p(\mathbf{x},t)$. □

4.1.2. *Усредненные уравнения.* В этом случае из предельного интегрального тождества (47) следует уравнение динамики

$$\hat{\varrho}\,\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\nabla\, p + \hat{\varrho}\,\mathbf{F}$$

в области Ω_T, совпадающее с уравнением (16), так при $\mu_1 = \lambda_1 = \infty$ мы имеем представление $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ для скорости смеси.

4.2. **Доказательство теоремы 3.**

4.2.1. *Предельный переход.* Из ограниченности последовательностей $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\dfrac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\}$, $\{\varepsilon\nabla \mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla(\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})\}$ следует существование слабых пределов

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p, \quad \mathbf{w}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{w}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}$$

в $L_2(Q_T)$ и $\mathbf{L}_2(Q_T)$ при $\varepsilon \to 0$.

Согласно теореме Нгуетсенга, существует 1-периодическая по $\mathbf{y}$ функция $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ такая, что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\dfrac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\}$, $\{\varepsilon\nabla \mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla(\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})\}$ сходятся двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ и $\mathbf{L}_2(Q_T)$ к

$$p(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t^2}, \quad \nabla_y \mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}), \quad \nabla_y(\frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t})$$

соответственно. (Здесь, как и в предыдущей теореме, $P(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = p(\mathbf{x},t)$). Теорема Нгуетсенга гарантирует также, что

$$\mathbf{W},\ \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2},\ \nabla_y \mathbf{W},\ \nabla_y(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) \in \mathbf{L}_2(Q_T \times Y).$$

4.2.2. *Микроскопические и макроскопические уравнения.* Для вывода микроскопического уравнения баланса моментов выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (12), выбрав пробную функцию $\boldsymbol{\varphi}$ в форме $\boldsymbol{\varphi} = h(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$, где $\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{y})$ – 1-периодическая по $\mathbf{y}$ функция, соленоидальная в Y. В результате получим равенство

$$\int_{Q_T} \big(\mathbf{a}(\mathbf{x},t)h + p(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\, h\big)dxdt = 0,$$

где

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \int_Y \Big(\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2}\cdot\boldsymbol{\varphi}_0 + \big(\mu_1\chi(\mathbf{y})\mathbb{D}(y,\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t})$$
$$+ \lambda_1\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbb{D}(y,\mathbf{W}) - \Pi\,\mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(y,\boldsymbol{\varphi}_0)\Big)dy \in L_2(Q_T).$$

Из полученных соотношений следует микроскопическое уравнение баланса моментов:

$$\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = \nabla_y\cdot\Big(\mu_1\chi(\mathbf{y})\mathbb{D}\big(y,\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}\big) + \lambda_1\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbb{D}(y,\mathbf{W}) - \Pi\,\mathbb{I}\Big)$$
$$-\nabla\, p + \varrho(\mathbf{y})\mathbf{F},\ \mathbf{y}\in Y,\ t>0, \tag{49}$$

где

$$\varrho(\mathbf{y}) = \varrho_f\,\chi(\mathbf{y}) + \varrho_s\,\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)$$

и $\nabla\, p \in \mathbf{L}_2(Q_T)$. Предельный переход в уравнении неразрывности дает микроскопическое уравнение неразрывности

$$\nabla_y \cdot\, \mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y.$$

Эти уравнения замыкаются однородными начальными условиями

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y},0) = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},\mathbf{y},0) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y.$$

Периодическое решение задачи ищем в виде

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau,$$

$$\Pi(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_F^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau,$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \big(F_1(\mathbf{x},t), F_2(\mathbf{x},t), F_3(\mathbf{x},t)\big).$$

В свою очередь, пары $\{\mathbf{W}^{(i)}, \Pi^{(i)}\}$, и $\{\mathbf{W}_F^{(i)}, \Pi_F^{(i)}\}$ для $i = 1,2,3$ есть решения периодических начально-краевых задач в области Y для $t > 0$

$$\begin{aligned}(50)\quad \varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t^2} &= \nabla_y \cdot \Big(\mu_1\chi(\mathbf{y})\nabla_y\big(\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\big) \\ &+ \lambda_1\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\nabla_y \mathbf{W}^{(i)} - \Pi^{(i)}\,\mathbb{I}\Big),\ \nabla_y \cdot\, \mathbf{W}^{(i)} = 0,\end{aligned}$$

$$(51)\qquad \mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y},0) = 0,\ \varrho(\mathbf{y})\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = -\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y,$$

и

$$\begin{aligned}(52)\quad \varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2 \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t^2} &= \nabla_y \cdot \Big(\mu_1\chi(\mathbf{y})\nabla_y\big(\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\big) \\ &+ \lambda_1\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\nabla_y \mathbf{W}_F^{(i)} - \Pi_F^{(i)}\,\mathbb{I}\Big),\ \nabla_y \cdot\, \mathbf{W}_F^{(i)} = 0,\end{aligned}$$

$$(53)\qquad \mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y},0) = 0,\ \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y$$

соответственно.

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial\, p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau,$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \langle\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\rangle_Y(t-\tau)\frac{\partial\, p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \langle\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\rangle_Y(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t-\tau)\cdot\nabla\, p\,(\mathbf{x},\tau)d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x},t),\end{aligned}$$

где

$$\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t)=\sum_{i=1}^{3}\langle\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\rangle_Y(t)\otimes\mathbf{e}_i, \tag{54}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\langle\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\rangle_Y(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau. \tag{55}$$

Здесь матрица $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ определяется как

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}),$$

для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

4.3. **Доказательство теоремы 4.**

4.3.1. *Предельный переход.* Из ограниченности последовательностей $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}_f^\varepsilon\}$, $\{\frac{\partial^2\mathbf{w}_f^\varepsilon}{\partial t^2}\}$, $\{\alpha_\lambda\nabla\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\}$ в $L_2(Q_T)$ и $\mathbf{L}_2(Q_T)$ следует существование подпоследовательностей и функций p, $\mathbf{w}_f$, $\mathbf{w}^{(s)}$ таких, что

$$p^\varepsilon\rightharpoonup p,\ \mathbf{w}_f^\varepsilon\rightharpoonup\mathbf{w}_f,\ \frac{\partial^2\mathbf{w}_f^\varepsilon}{\partial t^2}\rightharpoonup\frac{\partial^2\mathbf{w}_f}{\partial t^2}, \tag{56}$$
$$(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\mathbf{w}^\varepsilon\rightharpoonup\mathbf{w}^{(s)},\ (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\rightharpoonup\frac{\partial^2\mathbf{w}^{(s)}}{\partial t^2}$$

слабо в $L_2(Q_T)$ и $\mathbf{L}_2(Q_T)$ при $\varepsilon\to 0$.

Согласно теореме Нгуетсенга и лемме 2 существует 1-периодическая по $\mathbf{y}$ функция $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ такая, что последовательности

$\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}_f^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{(1-\chi^\varepsilon)\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\}$, $\{\varepsilon\nabla\mathbf{w}^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ и $\mathbf{L}_2(Q_T)$ к

$p(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{w}_f(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, $\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, $\frac{\partial^2\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t^2}$, $\nabla_y\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ соответственно.

Теорема Нгуетсенга также гарантирует, что

$$\mathbf{W},\ \frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2},\ \nabla_y\mathbf{W}\in\mathbf{L}_2(Q_T\times Y) \tag{57}$$

и

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\chi(\mathbf{y})\mathbf{w}_f(\mathbf{x},t)+\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}). \tag{58}$$

4.3.2. *Микроскопические и макроскопические уравнения.* Для этого случая скорость смеси задана формулами:

$$\frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\chi(\mathbf{y})\frac{\partial\mathbf{w}_f(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{w}}{\partial t}=m\frac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{w}^{(s)}}{\partial t},\quad \mathbf{w}^{(s)}(\mathbf{x},t)=\int_Y\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy.$$

Как и в предыдущих теоремах, интегральное тождество (47) влечет уравнение динамики (24) для жидкой компоненты.

Получим представление (25) для твердой компоненты. Чтобы вывести уравнение баланса моментов для твердой компоненты, выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (12) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = h(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)$, где $h(\mathbf{x},t)$ гладкая и финитная в Ω_T, а 1-периодическая по $\mathbf{y}$ гладкая функция $\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{y})$ соленоидальна и финитна в Y_s.

Если $\mathbf{W}^{(s)} = \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{W}$, то пара $\{\mathbf{W}^{(s)},\,\Pi^{(s)}\}$ удовлетворяет микроскопическому уравнению динамики для твердой компоненты

$$\varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\lambda_1}{2}\triangle_y \mathbf{W}^{(s)} - \nabla_y \Pi^{(s)} - \nabla\, p, \tag{59}$$

микроскопическому уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{W}^{(s)} = 0$$

в области Y_s, и начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x},0,\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x},0,\mathbf{y}) = 0,\ \mathbf{y} \in Y_s. \tag{60}$$

В силу теоремы Нгуетсенга $\mathbf{W}^{(s)}, \partial^2\mathbf{W}^{(s)}/\partial t^2, \nabla_y \mathbf{W}^{(s)} \in L_2(Q_T \times Y_s)$. Эти условия вместе с формулой (58) обеспечивают граничное условие

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \mathbf{w}_f(\mathbf{x},t),\ (\mathbf{y},t) \in \gamma \times (0,T) \tag{61}$$

Решения $\{\mathbf{W}^{(s)},\,\Pi^{(s)}\}$ периодических начально-краевых задач (59) – (61) имеют вид

$$\mathbf{W}^{(s)} = \mathbf{w}_f(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t-\tau)\big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x},\tau)\big)d\tau,$$

$$\Pi^{(s)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_i^{(s)}(\mathbf{y},t-\tau)\big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x},\tau)\big)d\tau,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(s)},\,\Pi_i^{(s)}\}$, $i = 1,2,3$, в свою очередь, являются решениями периодических начально-краевых задач

$$\varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\lambda_1}{2}\triangle_y \mathbf{W}_i^{(s)} - \nabla_y \Pi_i^{(s)},\ (\mathbf{y},t) \in Y_s \times (0,T), \tag{62}$$

$$\nabla_y \cdot \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t) = 0,\ (\mathbf{y},t) \in Y_s \times (0,T), \tag{63}$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},0) = 0,\ \varrho_s \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = \mathbf{e}_i,\ \mathbf{y} \in Y_s, \tag{64}$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t) = 0,\ (\mathbf{y},t) \in \gamma \times (0,T). \tag{65}$$

Однозначная разрешимость задач (62) – (65) следует из энергетического тождества

$$\int_{Y_s}\Big(\varrho_s \big|\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},t)\big|^2 + \frac{\lambda_1}{2}|\nabla \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t)|^2\Big)dy = \frac{(1-m)}{\varrho_s}.$$

Задача (62) – (65) для соленоидальных функций $\mathbf{W}_s^{(i)}$, равных нулю на γ и при $t=0$, понимается как интегральное тождество

$$\int_0^T\int_{Y_s}\Big(\varrho_s\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}-\lambda_1\nabla\mathbf{W}_i^{(s)}:\nabla\boldsymbol{\varphi}\Big)dydt=\int_{Y_s}\mathbf{e}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y},0)dy$$

для любой соленоидальной 1-периодической гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, равной нулю на γ и при $t=T$. По определению

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x},t)&=\int_{Y_s}\frac{\partial\mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy\\&=(1-m)\frac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t}-\int_0^t\Big(\sum_{i=1}^3\big(\int_{Y_s}\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},t-\tau)dy\big)\otimes\mathbf{e}_i\Big)\cdot\big(\nabla\,p\,(\mathbf{x},\tau)\\&\qquad+\varrho_s\frac{\partial^2\mathbf{w}_f}{\partial\tau^2}(\mathbf{x},\tau)\big)d\tau=(1-m)\frac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t}\\&\qquad-\int_0^t\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\big(\nabla\,p\,(\mathbf{x},\tau)+\varrho_s\frac{\partial^2\mathbf{w}_f}{\partial\tau^2}(\mathbf{x},\tau)\big)d\tau,\end{aligned}$$

где

$$\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t)=\sum_{i=1}^3\big(\int_{Y_s}\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},t)dy\big)\otimes\mathbf{e}_i. \tag{66}$$

4.4. **Доказательство теоремы 5.** Здесь скорость смеси задана формулами

$$\frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\chi(\mathbf{y})\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})+\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x},t),$$
$$\frac{\partial\,\mathbf{w}}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}+(1-m)\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t},\quad \mathbf{w}^{(f)}(\mathbf{x},t)=\int_Y\chi(\mathbf{y})\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy.$$

Интегральное тождество (47) влечет уравнение динамики (29) для твердой компоненты. Докажем представление (30) для жидкой компоненты.

Если мы положим $\mathbf{W}^{(f)}=\chi(\mathbf{y})\mathbf{W}$, то предельное интегральное тождество для пары $\{\mathbf{W}^{(f)},\,\Pi^{(f)}\}$ эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{W}^{(f)}}{\partial t^2}=\frac{\mu_1}{2}\triangle_y\big(\frac{\partial\mathbf{W}^{(f)}}{\partial t}\big)-\nabla_y\Pi^{(f)}-\nabla\,p(\mathbf{x},t) \tag{67}$$

в области $Y_f\times(0,T)$, начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(f)}(\mathbf{x},0,\mathbf{y})=\frac{\partial\mathbf{W}^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{x},0,\mathbf{y})=0,\ \mathbf{y}\in Y_f \tag{68}$$

и граничному условию

$$\mathbf{W}^{(f)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\boldsymbol{w}_s(\mathbf{x},t),\ (\mathbf{y},t)\in\gamma\times(0,T). \tag{69}$$

Таким образом, решение $\{\mathbf{W}^{(f)},\,\Pi^{(f)}\}$ периодической начально-краевой задачи (67) – (69) имеет вид

$$\mathbf{W}^{(f)}=\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)+\sum_{i=1}^3\int_0^t\mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y},t-\tau)\big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)+\varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s}{\partial\tau^2}(\mathbf{x},\tau)\big)d\tau,$$

$$\Pi^{(f)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\sum_{i=1}^3\int_0^t\Pi_i^{(f)}(\mathbf{y},t-\tau)\big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)+\varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s}{\partial\tau^2}(\mathbf{x},\tau)\big)d\tau,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(f)}, \Pi_i^{(f)}\}$, $i = 1, 2, 3$, в свою очередь, есть решения следующих периодических начально-краевых задач:

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t^2} = \frac{\mu_1}{2} \triangle_y \Big(\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}\Big) - \nabla_y \Pi_i^{(f)},\ (\mathbf{y}, t) \in Y_f \times (0, T), \tag{70}$$

$$\nabla_y \cdot \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, t) = 0,\ (\mathbf{y}, t) \in Y_f \times (0, T), \tag{71}$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, 0) = 0,\ \varrho_f \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{e}_i,\ \mathbf{y} \in Y_f, \tag{72}$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, t) = 0,\ (\mathbf{y}, t) \in \gamma \times (0, T). \tag{73}$$

По определению,

$$\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy \tag{74}$$

$$= m \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} - \int_0^t \Big(\sum_{i=1}^3 \big(\int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t-\tau) dy\big) \otimes \mathbf{e}_i \Big) \cdot \big(\nabla p\,(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau)\big) d\tau$$

$$= m \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} - \int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t - \tau) \cdot \big(\nabla p\,(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau)\big) d\tau,$$

где

$$\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t) = \sum_{i=1}^3 \big(\int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) dy\big) \otimes \mathbf{e}_i. \tag{75}$$

5. Доказательство теорем 6 и 7

5.0.1. *Предельный переход.* Для этих случаев двухмасштабный предел $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ последовательности $\{p^\varepsilon\}$ задается формулой

$$(1 - \zeta)\, p + \frac{\zeta}{m} \chi(\mathbf{y})\, p_f(\mathbf{x}, t) + \zeta\, \big(1 - \chi(\mathbf{y})\big)\, P_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}).$$

Для $\mu_1 = \infty$ (в теореме 6) двухмасштабный предел $\mathbf{W}$ последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ есть

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t),$$

и для $\mu_1 < \infty$ (в теореме 7)

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y}) \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \big(1 - \chi(\mathbf{y})\big) \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t).$$

Двухмасштабный предел $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$ равен $\{\mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t)\}$, и двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s^\varepsilon)\}$ есть

$$\mathbb{D}\big(x, \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t)\big) + \mathbb{D}\big(y, \mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})\big)$$

5.0.2. *Микроскопические и макроскопические уравнения.* Интегральное тождество (47) заменяется на

$$(76)\quad \int_{Q_T} \big(\zeta\, \lambda_0 \big(m\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) + \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}\big) - p(\mathbf{x},t)\,\mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) dxdt$$
$$= \int_{Q_T}\int_Y \varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t^2}\big)\cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t) dy\, dx\, dt$$

с любыми гладкими функциями $\boldsymbol{\varphi}$, равными нулю на границе ∂Q, а интегральное тождество (48) заменяется на

$$(77)\quad \int_{Q_T} \Big(\eta \int_Y \big(\frac{1-\zeta}{\bar{c}_f^2} + \big(\frac{\chi}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi}{\bar{c}_s^2}\big)\,\zeta\,\big)\frac{\partial P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t} dy - \nabla \eta \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\Big) dx\, dt = 0$$

с любыми гладкими функциями $\eta(\mathbf{x},t)$.

В (76)

$$\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \big(1-\zeta(\mathbf{x})\big)\varrho_f + \zeta(\mathbf{x})\big(\varrho_f \chi(\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\varrho_s\big).$$

Соотношения (76) и (77) дают систему уравнений акустики (14), (15) в $\Omega_T^{(f)}$, усредненные уравнения баланса моментов (32) и (40), уравнение неразрывности (41) в Ω_T, условия непрерывности (37), (38), (43), и (44) на общей границе $S_T^{(0)}$, и граничные условия (33) и (45).

Предельные функции $\mathbf{w}_s$ и p_f удовлетворяют в области Ω_T макроскопическому уравнению неразрывности для жидкой компоненты

$$(78)\quad \frac{m}{c_f^2} p_f + m\nabla\cdot \mathbf{w}_s = \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}\rangle_{Y_s}.$$

Действительно, мы можем записать уравнение неразрывности в виде

$$\int_{\Omega_T} \big(\frac{1}{c_f^2}\chi^\varepsilon p^{\,\varepsilon} \xi(\mathbf{x},t) - \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \nabla \xi(\mathbf{x},t)\big) dxdt = \int_{\Omega_T} (1-\chi^\varepsilon)\xi(\mathbf{x},t)\nabla\cdot \mathbf{w}_s^\varepsilon dxdt.$$

Переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ дает

$$\int_{\Omega_T} \big(\frac{1}{c_f^2}\chi^\varepsilon p^{\,\varepsilon} \xi(\mathbf{x},t) - \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \nabla \xi(\mathbf{x},t)\big) dxdt$$
$$\to \int_{\Omega_T} \big(\xi \frac{m}{c_f^2} p_f - \mathbf{w}_s \cdot \nabla \xi\big) dxdt = \int_{\Omega_T} \xi\big(\frac{m}{c_f^2} p_f + \nabla\cdot \mathbf{w}_s\big) dxdt,$$

$$\int_{\Omega_T} (1-\chi^\varepsilon)\nabla\cdot \mathbf{w}_s^\varepsilon \xi(\mathbf{x},t) dxdt \to \int_{\Omega_T} \xi\big((1-m)\nabla\cdot\mathbf{w}_s + \langle \nabla_y\cdot \mathbf{U}\rangle_{Y_s}\big) dxdt.$$

Используя теорему Нгуетсенга, получаем требуемое уравнение (78).

Запишем теперь уравнение неразрывности в области Ω_s^ε в следующей форме

$$(1-\chi^\varepsilon)p^{\,\varepsilon} = -c_s^2 (1-\chi^\varepsilon)\nabla\cdot \mathbf{w}_s^\varepsilon,$$

и интегральное тождество в следующей форме

$$(79)\quad I_f^\varepsilon + I_s^\varepsilon = \int_{\Omega_T} \varrho^\varepsilon \mathbf{F}\cdot\varphi\, dxdt,$$

где

$$I_f^\varepsilon = \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x,\mathbf{v}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\varphi) dxdt + \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon\, p^\varepsilon \nabla\cdot\varphi dxdt,$$

$$I_s^\varepsilon = \int_{\Omega_T} (1-\chi^\varepsilon)\big(\lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\varphi) + c_s^2 (\nabla \cdot \mathbf{w}_s^\varepsilon)(\nabla\cdot\varphi)\big) dxdt$$
$$= \lambda_0 \int_{\Omega_T} (1-\chi^\varepsilon)\big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s^\varepsilon)\big) : \mathbb{D}(x,\varphi) dxdt,$$

и

$$\mathfrak{N}^{(0)} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij} + \frac{c_s^2}{\lambda_0} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}.$$

Здесь использовано обозначение:

$$\mathbb{J}^{ij} = 1/2(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i),$$

тензор четвертого ранга $A \otimes B$ определяется следующим образом:

$$(A \otimes B) : C = A(B : C)$$

для любого тензора второго ранга C.

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (79) с двумя различными типами пробных функций. Вначале используем пробную функцию $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ а затем пробную функцию $\varphi = \varepsilon h(\mathbf{x}, t)\varphi_0(\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$. Получим макроскопическое уравнение баланса моментов

$$\nabla \cdot \Big(\lambda_0 \, \mathfrak{N}^{(0)} : \big((1-m)\, \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U})\rangle_{Y_s}\big)\Big) - m\, \nabla p + \hat{\varrho}\mathbf{F} = 0 \tag{80}$$

и микроскопическое уравнение баланса моментов

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\big(\mathfrak{N}^{(0)} : \big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \mathbb{D}(y, \mathbf{U})\big) + \frac{1}{\lambda_0}\, p\, \mathbb{I}\big)\Big) = 0. \tag{81}$$

Чтобы вычислить $\mathfrak{N}_2^s$ и $\mathbb{C}_1^s$ мы должны решить (81) и найти $\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U})\rangle_{Y_s}$ как оператор от $\mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s)$ и p.

Пусть $\mathbf{U}_2^{(ij)}(\mathbf{y})$ и $\mathbf{U}_2^{(0)}(\mathbf{y})$ есть решения периодических задач

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\Big(\mathfrak{N}^{(0)} : \big(\mathbb{J}^{(ij)} + \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_2^{(ij)})\big)\Big)\Big) = 0, \tag{82}$$

и

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_2^{(0)}) + \mathbb{I}\big)\Big) = 0 \tag{83}$$

в Y.

Разрешимость задач (82) и (83) следует из энергетических тождеств

$$\int_{Y_s} \Big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_2^{(ij)})\Big) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_2^{(ij)}) dy = -\int_{Y_s} \Big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_2^{(ij)}) dy,$$
$$\int_{Y_s} \Big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_2^{(0)})\Big) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_2^{(0)}) dy = -\int_{Y_s} \mathbb{I} : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_2^{(0)}) dy (= -\langle \nabla \cdot \mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s})$$

и соответствующих энергетических оценок.

Таким образом, решение $\mathbf{U}$ задачи (81) имеет вид

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}_2^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\lambda_0}\, p(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{U}_2^{(0)}(\mathbf{y}).$$

Поэтому

$$\langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s} = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\rangle_{Y_s} D_{ij} + \frac{1}{\lambda_0}\, p\, \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\rangle_{Y_s}$$

$$= \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) + \frac{1}{\lambda_0}\, p\, \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\rangle_{Y_s},$$

и

$$\mathfrak{N}_2^s = \mathfrak{N}^{(0)} : \Big((1-m)\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{(ij)}\Big) \tag{84}$$

$$\mathbb{C}_1^s = m\,\mathbb{I} - \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\rangle_{Y_s}. \tag{85}$$

Выразим правую часть (78), используя (84):

$$\langle \nabla_y\cdot \mathbf{U}\rangle_{Y_s} = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \nabla_y\cdot \mathbf{U}_2^{(ij)}\rangle_{Y_s} D_{ij} + \frac{1}{\lambda_0}\, p \langle \nabla_y\cdot \mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s}$$

$$= \big(\sum_{i,j=1}^{3} \langle \nabla_y\cdot \mathbf{U}_2^{(ij)}\rangle_{Y_s} \mathbb{J}^{ij}\big) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) + \big(\frac{1}{\lambda_0}\langle \nabla_y\cdot \mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s}\big)\, p.$$

Таким образом,

$$\mathbb{C}_0^s = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \nabla_y\cdot \mathbf{U}_2^{(ij)}\rangle_{Y_s} \mathbb{J}^{ij},\ c_0^s = \langle \nabla_y\cdot \mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s}. \tag{86}$$

Очевидно, $c_0^s < 0$.

Если $\mu_1 = \infty$, то $\mathbf{w}_s = \mathbf{w}$, и

$$p_f = \frac{1}{\beta}\big(\mathbb{I} + \mathbb{C}_0^s\big) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) = \widetilde{\mathbb{C}} : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s),$$

$$\nabla\cdot\,\big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_2^s : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) - p_f\,\mathbb{C}_1^s\big) + \hat{\varrho}\mathbf{F} = 0,$$

где

$$\beta = \frac{m}{c_f^2} - \frac{c_0^s}{\lambda_0} > 0.$$

Два последних уравнения можно привести к виду

$$\nabla\cdot\,\Big(\big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_2^s + \mathbb{C}_1^s\otimes\widetilde{\mathbb{C}}\big) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s)\Big) + \hat{\varrho}\mathbf{F} = 0. \tag{87}$$

5.0.3. *Симметричность и положительная определенность тензора* $\mathfrak{N}_3^s$. Покажем, что тензор $\mathfrak{N}_3^s$, записанный в форме

$$\mathfrak{N}_3^s = \lambda_0\,\mathfrak{N}_2^s + \mathbb{C}_1^s\otimes\widetilde{\mathbb{C}},$$

является симметричным и положительно определенным.

Используя макроскопическое уравнение неразрывности (78) для жидкой компоненты, перепишем микро- и макроскопические уравнения баланса моментов (80) и (81) как

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}) + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\,(\nabla_y \cdot \mathbf{U})\mathbb{I} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}\rangle_{Y_s}\mathbb{I} + \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) + (\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0})(\nabla\cdot\,\mathbf{w}_s)\,\mathbb{I}\big)\Big) = 0, \tag{88}$$

$$\nabla\,\cdot\Big(\big((1-m)\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) + \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}\rangle_{Y_s})\big) + (\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0})\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}\rangle_{Y_s}\mathbb{I} + \big((1-m)\,\frac{c_s^2}{\lambda_0} + m\,\frac{c_f^2}{\lambda_0})\big)(\nabla\cdot\,\mathbf{w}_s)\,\mathbb{I}\Big) + \frac{1}{\lambda_0}\hat{\rho}\mathbf{F} = 0. \tag{89}$$

Подставляя в (88)

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}_3^{(ij)}(\mathbf{y})D_{ij} + \mathbf{U}_3^{(0)}(\mathbf{y})(\nabla\cdot\mathbf{w}_s),$$

мы приходим к следующим периодическим краевым задачам в Y_s:

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\nabla_y\cdot\mathbf{U}_3^{(ij)}\mathbb{I} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\big)\Big) = 0, \tag{90}$$

$$\nabla_y\cdot\Big((1-\chi)\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(0)}) + (\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0})\mathbb{I} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\nabla_y\cdot\mathbf{U}_3^{(0)}\mathbb{I} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\big)\Big) = 0. \tag{91}$$

Однозначная разрешимость этих задач при условиях

$$\langle\mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s} = \langle\mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} = 0$$

следует из энергетических тождеств

$$\int_{Y_s}\Big(\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij}\big) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \frac{c_s^2}{\lambda_0}(\nabla_y\cdot\mathbf{U}_3^{(ij)})^2\Big)dy + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big(\int_{Y_s}\nabla_y\cdot\mathbf{U}_3^{(ij)}dy\Big)^2 = 0,$$

$$\int_{Y_s}\Big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(0)}) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \frac{c_s^2}{\lambda_0}(\nabla_y\cdot\mathbf{U}_3^{(0)})^2\Big)dy + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big(\int_{Y_s}\nabla_y\cdot\mathbf{U}_3^{(0)}dy\Big)^2 + (\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0})\int_{Y_s}\nabla_y\cdot\widetilde{\mathbf{U}}^0 dy = 0.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{N}_3^s = (1-m)\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \big((1-m)\,\frac{c_s^2}{\lambda_0} + m\,\frac{c_f^2}{\lambda_0}\big)\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + \sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{ij} + (\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0})\sum_{i,j=1}^{3}\langle\nabla\cdot\,\mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{I} + (\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0})\langle\nabla\cdot\,\mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}. \tag{92}$$

Пусть $\zeta = (\zeta_{ij})$ и $\eta = (\eta_{ij})$ – произвольные симметричные матрицы,

$$\boldsymbol{Y}_\zeta = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}_3^{(ij)}\zeta_{ij}, \quad \boldsymbol{Y}_\eta = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}_3^{(ij)}\eta_{ij}, \quad \boldsymbol{Y}_\zeta^0 = \mathbf{U}_3^{(0)} \operatorname{tr}\zeta, \quad \boldsymbol{Y}_\eta^0 = \mathbf{U}_3^{(0)} \operatorname{tr}\eta.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(93)\quad \big(\mathfrak{N}_3^s : \zeta\big) : \eta = (1-m)\zeta : \eta + \big((1-m)\,\frac{c_s^2}{\lambda_0} + m\,\frac{c_f^2}{\lambda_0}\big)\operatorname{tr}\zeta \operatorname{tr}\eta \\ + (\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0})\langle\nabla\cdot\, \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\eta + \langle\mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s} : \eta \\ + \langle\mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta^0)\rangle_{Y_s} : \eta + (\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0})\langle\nabla\cdot\, \boldsymbol{Y}_\eta^0\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\zeta.\end{aligned}$$

Симметричность тензора $\mathfrak{N}_3^s$ в форме

$$\big(\mathfrak{N}_3^s : \zeta\big) : \eta = \big(\mathfrak{N}_3^s : \eta\big) : \zeta$$

следует из равенств

$$\begin{aligned}(94)\quad \big(\langle\mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(ij)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(kl)})\rangle_{Y_s} + \langle\mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(kl)})\rangle_{Y_s} : \mathbb{J}^{ij}\big) \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\, \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} \\ + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\, \langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(95)\quad \langle\mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle(\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)})^2\rangle_{Y_s} \\ + (\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0})\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\big(\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\big)^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(96)\quad \big(\langle\mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(ij)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s} + \langle\mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s} : \mathbb{J}^{ij}\big) \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\, \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\, \langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(97)\quad \langle\mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(kl)})\rangle_{Y_s} + (\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0})\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\, \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\, \langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s},\end{aligned}$$

которые получаются умножением (90) и (91) на $\mathbf{U}_3^{(kl)}$ и $\mathbf{U}^{(0)}$ и интегрированием по частям.

Действительно, перепишем эти соотношения в форме

$$\begin{aligned}(98)\quad \langle\mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} + \langle\mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} : \zeta \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\, \langle\nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} = 0,\end{aligned}$$

$$(99)\quad \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}$$
$$+\,(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0})\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\eta+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}=0,$$

$$(100)\quad \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}+\langle\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}:\zeta$$
$$+\,\frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}=0,$$

$$(101)\quad \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}+(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0})\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\zeta$$
$$+\,\frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}$$

и просуммируем равенства (93) и (98) – (101):

$$\begin{aligned}
\big(\mathfrak{N}^s_3:\zeta\big):\eta&=(1-m)\zeta:\eta+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s}:\eta+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}:\zeta\\
&+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}:\zeta\\
&+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\zeta)\rangle_{Y_s}:\eta+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}\\
&+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\Big((1-m)\mathrm{tr}\,\zeta\,\mathrm{tr}\,\eta+\langle\nabla\cdot\,\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\eta+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\zeta\\
&+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\eta\\
&+\langle\nabla\cdot\,\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\zeta+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\Big)+\\
&+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big(m^2\,\mathrm{tr}\,\zeta\,\mathrm{tr}\,\eta-m\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\eta-m\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\zeta\\
&+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}-m\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\eta\\
&-m\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}\,\mathrm{tr}\,\zeta+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\,\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\Big).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\big(\mathfrak{N}^s_3:\zeta\big):\eta&=\langle\big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z_\zeta})+\zeta\big):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z_\eta})+\eta\big)\rangle_{Y_s}\\
&+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle(\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z_\zeta}+\mathrm{tr}\,\zeta)(\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z_\eta}+\mathrm{tr}\,\eta)\rangle_{Y_s}\\
&+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\big(\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z_\zeta}\rangle_{Y_s}-m\,\mathrm{tr}\,\zeta\big)\big(\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z_\eta}\rangle_{Y_s}-m\,\mathrm{tr}\,\eta\big),
\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{Z_\zeta}=\boldsymbol{Y}_\zeta+\boldsymbol{Y}^0_\zeta$.

Последнее соотношение показывает симметричность тензора $\mathfrak{N}^s_3$ и положительную определенность. В частности, для $\zeta=\eta$

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{N}^s_3:\zeta):\zeta&=\langle\big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z_\zeta})+\zeta\big):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z_\zeta})+\zeta\big)\rangle_{Y_s}\\
&+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle(\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z_\zeta}+\mathrm{tr}\,\zeta)^2\rangle_{Y_s}+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\big(\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z_\zeta}\rangle_{Y_s}-m\,\mathrm{tr}\,\zeta\big)^2.
\end{aligned}$$

Поэтому,

$$\big(\mathfrak{N}_3^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s)\big) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) \geqslant a_0\, \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s), \ a_0 = const > 0.$$

6. Обозначения

с.2 $\nabla \mathbf{u}$, $\nabla \cdot \mathbf{w}$ – операции вычисления градиента и дивергенции производятся по переменной $\mathbf{x}$ всюду в работе, кроме тех случаев, когда эти операции снабжены нижним индексом y. В этих случаях дифференцирование выполняется по переменной $\mathbf{y}$.

с.2 $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ – характеристическая функция порового пространства $\Omega_f^\varepsilon \in \Omega$,

с.4 $\zeta(\mathbf{x})$ – характеристическая функция пороупругой области $\Omega \in Q$,

с.2 ϱ_f – безразмерная плотность жидкости в порах, соотнесенная со средней плотностью воды ρ^0,

с.2 ϱ_s – безразмерная плотность твердого скелета, соотнесенная со средней плотностью воды ρ^0,

с.2 $\varrho^\varepsilon = \varrho_f\, \chi^\varepsilon + \varrho_s\, (1-\chi^\varepsilon)$,

с.4 $\varrho^\varepsilon_{(f)} = (1-\zeta)\varrho_f + \zeta\big(\varrho_f \chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s\big)$,

с.6 $\hat{\varrho} = m\, \varrho_f + (1-m)\, \varrho_s$,

с.9 $\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \big(1-\zeta(\mathbf{x})\big)\varrho_f + \zeta(\mathbf{x})\big(\varrho_f\, \chi(\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\, \varrho_s)\big)$,

с.12 $\varrho(\mathbf{y}) = \varrho_f\, \chi(\mathbf{y}) + \varrho_s\, \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)$,

с.5 $B : C = tr(BC^T)$, где B, C – тензоры второго ранга,

с.13 матрица $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ определяется как $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,

с.14

$$\langle \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t} \rangle_Y = \int_Y \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y},t)}{\partial t} dy$$

с.17 $\mathbb{J}^{ij} = 1/2(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$, тензор четвертого ранга $A \otimes B$ определяется следующим образом:

$$(A \otimes B) : C = A(B : C)$$

для любого тензора второго ранга С.

References

[1] E. Sanchez-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory,* Lecture Notes in Physics,**129**, Springer, Berlin, 1980. Zbl 0432.70002

[2] N.S. Bakhvalov, G. Panasenko, *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media,* Spinger, New York (1989). Zbl 0692.73012

[3] V.V. Jikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, New York, (1994). Zbl 0838.35001

[4] G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., **20** (1989), 608–623. Zbl 0688.35007

[5] G. Nguetseng, *Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics.* SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), 1394–1414. Zbl 0723.73011

[6] D. Lukkassen, G. Nguetseng, P. Wall, *Two-scale convergence*, Int. J. Pure and Appl. Math. **2**:1 (2002), 35–86. Zbl 1061.35015

[7] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs 23, American Mathematical Society Providence, Rhode Island (1968). Zbl 0174.15403

[8] A. Meirmanov, *Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media*, Siberian Mathematical Journal, **48** (2007), 519–538. Zbl 1164.74393

[9] A. Meirmanov, *Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media*, Euro. Jnl. of Applied Mathematics, **19** (2008), 259–284. Zbl 1141.74019

[10] A. Meirmanov, *A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization*, SIAM J. Math. Anal., **40**:3 (2008), 1272–1289. Zbl 1180.35079

[11] A. Meirmanov, Acoustics Equations in Elastic Porous Media, Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki, **13**:2 (2010), 98–110. Zbl 1228.76168

[12] A. Meirmanov, *Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures*, Journal of Mathematical Sciences. **163**:2 (2009), 111–172. Zbl 1185.35195

[13] C. Conca, *On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics*, Math. Pures et Appl. **64** (1985), 31–75. Zbl 0566.35080

Anvarbek Mukatovich Meirmanov
Belgorod state national research University,
Pobedy, 85,
308015, Belgorod, Russia
E-mail address: anvarbek@list.ru

Svetlana Aleksandrovna Gritsenko
Belgorod state national research University,
Pobedy, 85,
308015, Belgorod, Russia
E-mail address: sv.a.gritsenko@gmail.com

Artur Andreevich Gerus
Belgorod state national research University,
Pobedy, 85,
308015, Belgorod, Russia
E-mail address: artur_gerus@mail.ru