ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

СУММА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ДЕЛИТЕЛЕЙ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ С РАЗНОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Магистерская диссертация

обучающегося по направлению подготовки 01.04.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001535
Халилова Шерали Ахмедовича

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, доц. Шевцова М. В.

Рецензент
к.т.н., доцент Маматов Е.М.

БЕЛГОРОД 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В теории чисел важную роль играют теоретико-числовые функции. Одной из таких функций является функция делителей $\tau k(n)$. Суммирующая функция делителей в теории чисел это функция, являющаяся суммой функции делителей. Функция часто используется для исследования асимптотического поведения дзета-функции Римана.

Функцией делителей называют арифметическую функцию, связанную с делителями целого числа. Функция делителей нулевого порядка числа показывает количество делителей данного числа, функция делителей первого порядка показывает сумму делителей данного числа,

Различные исследования асимптотического поведения функции делителей иногда называют проблемами делителей. Многие исследователи рассматривали получение асимптотической формул для суммы значений этой функции, как в арифметической прогрессии, так и без нее. Известна асимптотическая формула для значений $\tau k(n)$ без арифметической прогрессии (неравенство Марджанишвили К. К.), в арифметической прогрессии с разностью специального вида равной

В качестве объекта исследования в данной работе выступает теоретическое изучение суммы значений функции делителей в арифметической прогрессии с разностью специального вида. Предметом исследования данной работы является асимптотическая формула для суммы значений функции делителей.

Целью исследования в данной работе является изучение процесса суммирования значений функции делителей в арифметической прогрессии с разностью специального вида.

В соответствии с целью исследования были выдвинуты следующие задачи:

- Сформулировать основные и вспомогательные леммы.
- Сформулировать теорему о равномерной оценке остаточного члена асимптотической формулы.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЛЕММЫ

1.1 Определения понятия арифметическая прогрессия

Числовая последовательность — это множество чисел, в котором каждому числу можно присвоить уникальный номер (то есть поставить в соответствие единственное натуральное число) . Число с номером n называется n-м членом последовательности.

Очень удобна ситуация, когда n-й член последовательности можно задать некоторой формулой. Например, формула $a_n = 2n - 3$ задаёт последовательность: −1, 1, 3, 5, 7, . . . Формула $a_n = (-1)^n$ задаёт последовательность: −1, 1, −1, 1, . . . Не всякое множество чисел является последовательностью. Так, отрезок [0; 1] — не последовательность; в нём содержится «слишком много» чисел, чтобы их можно было перенумеровать. Множество R всех действительных чисел также не является последовательностью. Эти факты доказываются в курсе математического анализа.

Арифметическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа (называемого разностью арифметической прогрессии). Например, последовательность 2, 5, 8, 11, . . . является арифметической прогрессией с первым членом 2 и разностью 3. Последовательность 7, 2, −3, −8, . . является арифметической прогрессией с первым членом 7 и разностью −5. Последовательность 3, 3, 3, . . . является арифметической прогрессией с разностью, равной нулю. Эквивалентное определение: последовательность называется арифметической прогрессией, если разность a_{n+1} - a_n есть величина постоянная (не зависящая от n). Арифметическая прогрессия называется возрастающей, если её разность положительна, и убывающей, если её разность отрицательна.

1.2 История исследования простых чисел в арифметических прогрессиях

В 1955 г. А.Г. Постников обнаружил [2], что существует многочлен с целыми коэффициентами

$$f(u) = u + a_2 u^2 + \ldots + a_{m-1} u^{m-1}$$

степени m −1 такой, что для любого первообразного корня g по модулю p_0^m при любом целом u справедливо сравнение

$$\frac{ind_g(1+p_0)}{p_0-1} = \Lambda f(u) \left(mod\ p_0^{m-1}\right),$$

где (Λ, p_0) = 1 и Λ – корень сравнения $\frac{ind_g(1+p_0)}{p_0-1} = \Lambda f(u) \left(mod\ p_0^{m-1}\right)$

Данное наблюдение позволило представить сумму значений неглавного характера по модулю D , равному степени нечетного простого числа, как сумму Вейля специального вида. Это открытие замечательно тем, что суммы Вейля, даже очень короткие (а вместе с ними и очень короткие суммы значений характера), допускают нетривиальные оценки.

Идея Постникова А.Г. позволила решить некоторые проблемы теории чисел, к которым в общем случае не было никаких подходов. К таким задачам относится получение асимптотической формулы для $\pi\ (X, D, l)$ при возможно большем значении D.

В 1964 г. Линник Ю.В., Барбан М.Б. и Чудаков Н.Г. доказали следующий асимптотический закон, справедливый при D= $p_0^m \le X^{3/8-\varepsilon}$ (ε > 0 – произвольно малое число, M > 0 – произвольно большое число)

$$\pi\ (X, D, l) = \frac{LiX}{\varphi(D)}\ (1+O(\ln^{-M} X)). \qquad (1)$$

Доказательство этой теоремы основано на плотностной технике и поэтому требует информации о распределении нулей L-функции Дирихле в критической полосе.

Используя идею А.Г. Постникова, авторы получили оценку для суммы значений неглавного характера по модулю D= p_0^m :

$$\sum_{V\le a}\chi(v)\ll a^{1/2}D^{1/6}\ln D(2)$$

Эта оценка дала возможность Ю.В.Линнику, М.Б. Барбану и Н.Г. Чудакову вывести новую плотностную теорему:

$$N(\sigma,T,\chi) ¿ T^3D^{(8/3)(1-\sigma)}\ln^{13} D, \quad (3)$$

где *N(σ,T, χ)* – число нулей L(s,χ) в прямоугольнике σ ≤ β < 1 , γ ≤ T , ρ = β + it – нуль L(s, χ) в полосе 0 < β < 1.

В монографии А.А. Карацубы [1] приводится следующая формула, справедливая при D = $p_0^m \le X^{1/9}$:

$$\Psi(X,D,l)=\frac{X}{\varphi(D)}\left(1+O\left(\begin{matrix}X\\ lnln¿\\ ¿\\ -c¿\\ e^{¿}\end{matrix}\right)\right) \quad (4)$$

где c > 0 – константа.

Доказательство (4) осуществляется на основе плотностной техники. Отметим, что, хотя оценка остаточного члена точнее, чем в (1), граница изменения D гораздо меньше.

Другая задача, в которой исследования А.Г. Постникова нашли свое применение, – это проблема делителей Дирихле в арифметических прогрессиях. Пусть τ_k (n) – число решений в целых положительных числах $n_{1,\ldots,}n_k$ *уравнения* $n_{1,\ldots,}n_k=n$.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{n\le X}\tau_{k(n)}(5)$$

n=l(modD)

В работе А.Ф. Лаврика [4] получена асимптотическая формула для суммы (6) при k ≥ 4 с произвольной разностью D:

$$\sum_{n\le X}\tau_{k(n)}=\frac{X\,P_{k-1}(lnX)}{\varphi(D)}+R,$$

n=l(modD)

где R $¿\frac{1}{\varphi(D)}X^{1-1/c_1}D^{k/c_2}, c_1, c_2$ константы, P_{k-1} (z) – многочлен степени k −1 от переменной z . Эта формула нетривиальна при D $\le X^{c_{3/k}}$.

Если k < 4 , то последний результат существенно усилен.

Иванец Г.В. [5] на основе модулярной техники получил асимптотическую формулу в случае k = 2 , справедливую при $D \le X^{2/3-\varepsilon}$ (ε > 0 – произвольно мало), и совместно с Дж.Фридлендером [6] – для k = 3 , справедливую при D $\le X^{\frac{1}{2}+1/230}$.

В 1979 г. М.М. Петечук [7] усилил результат А.Ф. Лаврика и получил асимптотическую формулу для суммы (5) при фиксированном *k ≥ 2 и D* $¿ p_0^m \le X^{3/8-\varepsilon}$:

$$\sum_{n\le X}\tau_{k(n)} = \frac{X\,P_{k-1}(lnX)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X^{1-\varphi}}{\varphi(D)}\right), (6)$$

n=l(modD)

где *(l,D)*=1, $P_{k-1(\ln X)}$ – многочлен степени k-1 с коэффициентами, зависящими от k и p_0 , $\varphi = min\left\{\frac{\varepsilon}{16}\frac{\beta}{k^3}\right\}$, $\beta > 0 - константа, зависящая\ от\ p_0.$

Формула остаточного члена (6) получена с применением оценки «короткой» суммы значений характера по модулю D= p_0^m , основанной на работе А.Г. Постникова. Доказательство (6) проводится без применения средств комплексного анализа. Оно опирается на метод работы Карацубы А.А. [8], позволяющий оценивать остаточный член асимптотической формулы по схеме решения тернарной аддитивной задачи.

1.3 Постановка задачи

В теории чисел важную роль играет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть при (*l*, *D*) = 1π(X, *D*, *l*) означает число простых чисел, не превосходящих X и сравнимых с *l* по модулю *D*. Не доказанная к настоящему времени расширенная гипотеза Римана привела бы к следующему асимптотическому закону[1] и представлена формулой 7.

$$\pi\left(X,D,l\right)=\frac{LiX}{\varphi\left(D\right)}\left(1+O\left(e^{-¿^{0,1X}}\right)\right) \quad , \tag{7}$$

где $D\leq$ $X^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon>0-¿$ произвольное малое число.

Без допущения расширенной гипотезы Римана и наложения каких-либо ограничений на D, асимптотическая формула для π(X, *D*, *l*) получена при весьма «малых»D. Например, при D ≤ $\left(InX\right)^{A}$, где A $¿0-¿$ константа, c = c (A) $¿0$, справедлива формула 8 известная в литературе как формула Зигеля – Вальфиша[1]:

$$\pi\left(X,D,l\right)=\frac{LiX}{\varphi\left(D\right)}+O\left(Xe^{-c\sqrt{InX}}\right) \quad , \tag{8}$$

Но в случае, когда D = $p_0^m,p_0\geq3-¿$ фиксированное простое число, можно получить асимптотическую формулу для π(X, *D*, *l*) при гораздо больших D.

В 1955 году А.Г. Постников обнаружил [2], что существует многочлен с целыми коэффициентами *f*(u) = u+ $a_2u^2+\ldots+a_{m-1}u^{m-1}$ степени *m* – 1 такой, что для любого первообразного корня g по модулю p_0^m при любом целом u справедливо сравнение (формула 9):

$$\frac{ind_g\left(1+p_0u\right)}{p_0-1}=\wedge f\left(u\right)\left(mod\,p_0^{m-1}\right) \quad , \tag{9}$$

где ($\wedge$ $,p_0$) = 1 и $\wedge$ $-¿$ корень сравнения.

Данное наблюдение позволило представить сумму значений неглавного характера по модулю D, равному степени нечетного простого числа, как сумму Вейля специального вида. Это открытие замечательно тем, что суммы Вейля, даже очень короткие (а вместе с ними и очень короткие суммы значений характера), допускают нетривиальные оценки.

Идея А.Г. Постникова позволила решить некоторые проблемы теории чисел, к которым в общем случае не было никаких подходов.

1.4 Вспомогательные утверждения и леммы

Лемма 1. (неравенство Марджанишвили) при любых $n \geq 1$ и $k \geq 2$ выполняется неравенство (формула 10):

$$\begin{array}{l} k-1¿^{k-1} \\ ¿ \\ \ln X+¿ \\ \tau_k(m)<X¿ \\ \sum_{m=1}^{X} ¿ \end{array} \qquad (10)$$

Доказательство см. в [11].

Лемма 2. (оценка Виноградова – Пойа) пусть Х – примитивный характер по модулю D. Тогда справедлива оценка (формула 11):

$$\sum_{v \leq a} X(v) \ll \sqrt{D} \ln D \qquad (11)$$

Доказательство см. в [1,с. 123].

Лемма 3. При $P \geq 1$ выполняется неравенство (формула 12):

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i a x} \right| \leq min\left(P, \frac{1}{2\|a\|}\right) \qquad (12)$$

Доказательство см., например, в [1,с. 94].

Лемма 4. Пусть $a=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, (a,q)=1, q \geq 1, |\theta| \leq 1.$

Тогда при любом $\beta, U>0, P\geq 1$ имеем оценку (формула 13):

$$\sum_{x=1}^{P} min\left(U, \frac{1}{\|ax+\beta\|}\right) \leq 6\left(\frac{P}{q}+1\right)(U+q\ln q). \tag{13}$$

Доказательство см., например, в [1,с. 94].

Лемма 5. (неравенство Гельдера) Пусть $u_v, v_v \geq 0, a>0, \beta>0, a+\beta=1.$

Тогда выполняется неравенство (формула 14):

$$\sum_{v=1}^{P} u_v^{\frac{1}{a}}$$
¿
$$\sum_{v=1}^{P} v_v^{\frac{1}{\beta}} ¿^{\beta}.$$
$$u_v v_v \leq ¿$$
$$\sum_{v=1}^{P} ¿ \tag{14}$$

Доказательство см., например, в [1,с. 85].

Лемма 6. (неравенство Коши) представлено формулой 15.

$$u_v^2$$
$$v_v^2$$
$$\sum_{v=1}^{P} ¿$$
¿
$$\sum_{v=1}^{P} ¿¿$$
$$u_v v_v ¿^2 \leq ¿$$
$$\sum_{v=1}^{P} ¿$$
¿ (15)

Утверждение леммы является следствием леммы 7.

Лемма 7. (А. Г. Постников) Пусть $p_0 \geq 3$ –простое число, m – натуральное число, $m \neq a\, p_0^f - v, f=1,2,\ldots, 0\leq v\leq f-1, (a, p_0)=1.$

Существует многочлен с целыми коэффициентами $f(u)=u+a_2u^2+¿$ $\cdots+a_{m-1}u^{m-1}$ степени $m-1$ такой, что для любого первообразного корня qпо модулю p_0^m при любом и целом справедливо сравнение (формула 16).

$$\frac{ind_q+(1+p_0u)}{p_0-1}\equiv\wedge f(u)\left(mod\ p_0^{m-1}\right).\tag{16}$$

Пусть $k=p_0^{\tau}k'$, где $(k',p_0)=1$, тогда a_k принимает значение по формуле 17.

$$a_k=(-1)^{k+1}p_0^{k-\tau-1}\aleph_k\tag{17}$$

(очевидно, a_k можно брать с точностью до кратных $p_0^{m-1}¿$, где $\aleph k$ есть решение сравнения (формула 18).

$$k'\aleph_k\equiv1\left(mod\ p_0^{m-k+\tau}\right),\tag{18}$$

и $\wedge$ $-¿$ корень сравнения.

Причем сравнения разрешимо и $(\wedge,p_0)=1.$ Доказательство см. в [2].

Лемма 8. Примитивный характер по модулю p_0^m для а =1 + $p_0^{8+1}x$ можно представить формулами 19-20:

$$X(a)=\exp\left\{2\pi i\frac{f(x)}{p_0^{m-8-1}}\right\},\tag{19}$$

где

$$f(x)\equiv x+p_0^{s+1}\frac{a_2}{2}x+\ldots+p_0^{(t-1)(s+1)}\frac{a_t}{t}x^t\left(mod\ p_0^{m-s-1}\right),\tag{20}$$

$$0$$
$$a_t, p¿$$
$$¿$$
$$(a_2, p_0) = (a_{3,} p_0) = \ldots = ¿$$

Утверждение леммы получается из леммы 9 при подстановке формул коэффициентов в выражение для многочлена f(u).

$$n$$
$$\alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^{¿}$$
$$¿$$
$$2k$$
$$\sum_{x \le P} e^{¿} \alpha_1 \ldots d$$
$$¿$$
$$¿$$
$$¿$$
$$\ldots \int_0^1 ¿$$
$$J = J_{k,n}(P) = \int_0^1 ¿$$

Лемма 9. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_2$ — целые числа, (формула выше) – среднее значение модуля тригонометрической суммы и λ_1 $J_{k,n}¿$, . . . , λ_2) – число решений системы уравнений представленных формулой 21.

$$k+1-\ldots-¿\, x_{2k} = \lambda_1,$$
$$\{x_1 + \ldots + x_k - x_¿\, x_1^n + \ldots + x_k^n - x_{k+1}^n - \ldots - x_{2k}^n = \lambda_n, \qquad (21)$$
$$1 \le x_1, \ldots x_{2k} \le P.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$n$$
$$\alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^{¿}$$
$$¿$$
$$2k$$
$$\sum_{x \le P} e^{¿} e^{-2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n;$$

a) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $J_{k,n}¿$)

$$¿$$
$$¿$$
$$¿$$
$$\ldots \int_0^1 ¿$$
$$¿ \int_0^1 ¿$$

b) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $J_{k,n}¿$) $\le$ $J_{k,n}(0, \ldots, 0) = J_{k,n}(P) = J;$

c) $J_{k,n}(¿\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=k P^k;$ $\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} ¿$

d) $|\lambda_1|<kP,\ldots,|\lambda_n|<kP^{2n}$;

e) $J=J_{k,n}(P)>(2k)^{-n}P^{2k-\frac{n^2+n}{2}}$.

Доказательство см., например, в [1, с. 85].

Лемма 10. (А. И. Виноградов) Количество чисел, не превосходящих х, все простые Делители которых не превосходят z≤ $\sqrt{x}$, имеет оценку (формула 22)

$$C_x \exp\left(\frac{-1}{\alpha}\left(¿\frac{1}{\alpha}+¿\in\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha}+\frac{\theta}{\alpha In\frac{1}{\alpha}}\right), \tag{22}$$

где $\alpha=¿$ z/ Inx, $|\theta|\le 1$, C – константа.

Доказательство см. в [13].

Лемма 11. (А. И. виноградов, Ю. В. Линник) Пусть X – большое число, D ≤ $X^{1-\alpha}$, где 0< α < 1, (l,D) = 1, $X_1<X$, X - $X_1>X^{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Тогда справедливо неравенство (формула 22)

$$\sum_{X_1\le Dn+l}\tau_\kappa(Dn+l)<C\frac{X-X_1}{D}\left(¿\frac{X}{D}\prod_{p\vee D}1-\frac{1}{p}\right)^{k-1}, \tag{23}$$

где С= k $\frac{4(k-1)}{\alpha}\exp\left\{\frac{2(k-1)}{\alpha}e^{4/\alpha}\right\}$.

Доказательство. Заметим, что утверждение леммы достаточно доказать для суммы аргументов $Dn+l$

Проведем доказательство леммы по индукции.

1. Докажем сначала лемму для k = 2.

Возьмем $\varepsilon=\frac{\alpha}{4}$ и разобьем число Dn + l на два множителя: Dn + l = $a_n b_{n,}$ где $b_{n,}$ включает все простые множители Dn + l, превосходящие X^ε и следовательно, каждый простой множитель ап меньше либо равен X^{ε}. В таком случае справедливо неравенство (формула 16).

$$\sum_{Dn+l} \tau(Dn+l) \leq \sum_{Dn+l} \tau(a_n)\tau(b_{n,}) \leq 2^{1/\varepsilon} \sum_{Dn+l \leq X} \tau(a_n). \tag{24}$$

Имеем:

$$\sum_{Dn+l \leq X} \tau(a_n) = \sum_{n<\frac{X}{D}} \sum_{a_{n=v_1 v_2}} 1.$$

$$\leq x^{1/2+5\delta}, D \leq X^{1/2-6\delta};$$

$$\sqrt{D}\, X^{5\delta} \sqrt{N_2 W'} \leq \sqrt{D}\, X^{1/3+5\delta}, D \leq X^{4/9-4\delta}.$$

Выберем $\delta = \varepsilon_2/4$. Выберем 6 = E2/4. Тогда из оценки последнего слагаемого следует утверждение теоремы: $D \leq$ $X^{\frac{4}{9}-e_2.}$.

2 . ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

2.1 Доказательство теоремы

Проведем доказательство в несколько этапов, доказательство представлено формулами 19-69:

1. Сначала вычислим главный член асимптотической формулы. Из ортогональности характеров имеем:

$$\sum_{\substack{n \le X \\ n \equiv l \,(mod\, D)}} \tau_\kappa(n) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{(mod\, D)} \acute{X}(l) \sum_{n_1 \ldots n_k \le X} x(n_1 \ldots n_k), \qquad (25)$$

В сумме по характерам X выделим слагаемое с X = X_0:

$$\sum_{\substack{n \le X \\ n \equiv l \,(mod\, D)}} \tau_\kappa(n) = W + R, \qquad (26)$$

где

$$n_1 \ldots . n_k \le X \qquad (27)$$

$$0$$

$$mod\, p ¿$$

$$¿$$

$$¿$$

$$¿$$

$$¿$$

$$n_1 \ldots . n_k \not\equiv 0 ¿$$

$$W = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{¿} ¿$$

Запишем W в виде:

$$0$$
$$mod\ p ¿$$
$$¿$$
$$¿1$$
$$n_k \not\equiv 0 ¿$$
$$\ldots \sum_{¿} ¿$$
$$n_1 \not\equiv 0 \left(mod\ p_0 \right)$$
$$n_1 \ldots . n_k \leq X \quad ¿$$
$$¿$$
$$W = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{¿} ¿ \tag{28}$$

Представим каждую сумму по переменным суммирования как разность суммы, где переменная суммирования пробегает все значения, и суммы, где переменная суммирования пробегает значения, сравнимые с нулем по модулю. Воспользуемся также асимптотической формулой [19]:

$$\sum_{n \leq X} \tau_\kappa(n) = X_1 P_{k-1}(¿ X_1) + O\left(X_1^{1-\frac{1}{2k}} \right), \tag{29}$$

где $P_{k-1}(z) - ¿$ многочлен степени $k-1$ от переменной z. Тогда

$$1 - ¿ \sum_{\substack{n_1 \equiv 0 (mod\ p_0) \\ n_1 \ldots . n_k \leq X}} 1$$
$$\sum_{n_1} ¿$$
$$¿$$
$$W = \frac{1}{\varphi(D)} ¿ \tag{30}$$

$$¿ \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum_{1 \leq s_1 < \ldots < s_j \leq k} \sum_{n_1 \ldots . n_k \leq X} \ldots \sum_{¿ n_{s_1} \equiv 0 (mod\ p_0), \ldots n_{s_j} \equiv 0 (mod\ p_0)} 1 = ¿$$

$$\sum_{n_{j+1}} \ldots \sum_{n_k} 1 = ¿$$
$$n_1 \equiv 0 \left(mod\ p_0 \right) ¿$$
$$¿$$
$$¿ \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{\substack{n_1 (mod\ p_0) \\ ¿ n_1 \ldots . n_k \leq X}} \ldots \sum_{¿} ¿$$

$$¿\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{p_0^j}\binom{k}{j}\sum_{n\le\frac{X}{p_0^j}}\tau_\kappa(n)=¿$$

$$¿\frac{X}{\varphi(D)}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{p_0^j}\binom{k}{j}P_{k-1}\left(¿\frac{X}{p_0^j}\right)+O\left(\frac{X^{1-\frac{1}{24}}}{\varphi(D)}\right)=¿$$

$$¿\frac{X}{\varphi(D)}P_{k-1}\ (\mathrm{In}\ X)+O\ \left(\frac{X^{1-\frac{1}{2k}}}{\varphi(D)}\right),$$

где $P_{k-1}(z)-¿$ многочлен степени $k-1$ с коэффициентами, зависящими от $p_0 u k$.

2. Перейдем к оценке остаточного члена асимптотической формулы.

Разобьем сумму R на O($¿^k$ X) сумм вида

$$1<¿n_1\le 2N_1$$
$$N_{k<¿n_k\le 2N_k}x(n_1\ldots.n_k).$$
$$S=\frac{X}{\varphi(D)}\sum_{x\ne x_0}\acute{x}(l)\sum_{N_¿n_1\ldots n_k\le X}\ldots\sum_{¿}¿ \qquad (31)$$

Будем пока считать, что $X^{\frac{1}{2}}\le N_1\ldots N_k<X.$ также без ограничения общности можно предполагать, что $N_1\ge N_2\ge N_{r+1}\ge N_3\ge N_{r+2}\ge\ldots,$ где r = $\left[\frac{k}{2}\right]+1.$

Положим $U=N_2\ldots N_r, V=N_{r+1}\ldots N_{k.}$ Тогда, так как $N_1\ge N_2, N_{r+1}\ge N_3\ldots u\,N_2\ge N_{r+1}, N_3\ge N_{r+2},\ldots,$ то $N_1V\ge U\ge V.$

Кроме того, $N_1\ge X^{\frac{1}{2k}}u\,0<\delta\le\frac{1}{2k}-¿$ действительное число.

Пусть $\tau'_{r-1}(u),\tau'_{k-1}(v),\tau'_{k-1}(y)$ означают количество решений в натуральных числах уравнений $n_2\ldots n_r=u, n_{r+1}\ldots n_k=v, n_2\ldots n_k=y,$ где $N_2<n_2\le 2N_2,\ldots,N_k<n_k\le 2N_k.$

3. Рассмотрим случай $U\le X^\delta.$ Имеем:

$$S|=\frac{1}{\varphi(D)}\left|\sum_{x\ne x_0}\acute{x}(l)\sum_{N_2<n_2\le 2N_2}x(n_2)\ldots\sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2\\ n_1n_2\ldots n_k\le X}}x(n_k)\sum_{N_2<n_2\le 2N_2}x(n_1)\right|\le \qquad (32)$$

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x\neq x_0}\sum_{N_2<n_2\le 2N_2} x(n_2)\dots\sum_{N_k<n_k\le 2N_k} x(n_k)\times$$

$$\max_{N_2<T'\le T''\le 2N_{1,}x\neq x_0}\left\{\left|\sum_{N_1<n_1\le 2N_1} x(n_1)\right|\right\}.$$

В силу леммы 4 справедлива оценка

$$\sum_{N_1<n_1\le 2N_1} x(t)\ll N_1^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{6}}\in D. \tag{33}$$

следовательно,

$$S\ll N_2\dots N_k\sqrt{N_1}\,D^{\frac{1}{6}}\in D.$$

Так как $N_1\dots N_k\le X, V\le U\le X^{\delta}, D\le X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}, \in X\ll X^{\frac{\delta}{2}}$, то для

Суммы S получим:

$$S\ll N_2\dots N_k\sqrt{N_1}\,D^{\frac{1}{6}}\in D=\sqrt{N_2\dots N_k}\sqrt{N_1N_2\dots N_k}\,D^{\frac{1}{6}}\in D<\text{¿}$$

$$\text{¿}\sqrt{UV}\sqrt{X}\,D^{\frac{1}{6}}\in D\le X^{\frac{1}{2}+\delta}D^{\frac{1}{6}}\in D\ll X^{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\delta}D^{\frac{-1}{3}}.$$

4. Пусть теперь $U>x^{\delta}$. Сумму S перепишем в виде

$$S=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x\neq x_0}\acute{x}(l)\sum_{\substack{N_1<n_1\le 2N_1\\ n_1y\le X}}\sum_{UV<y\le 2^{k-1}UV} x(n_1)x(y)\tau'_{k-1}(y) \tag{34}$$

Разобьем промежуток суммирования ($N_1, 2N_1\text{¿}$ на промежутки (H, H+ H'],

где $H'=\frac{N_1}{X^{\delta}}$. Получим:

$$\frac{1}{\varphi(D)}\left|\sum_{x\neq x_0}\acute{x}(l)\sum_{H<n_1\le H+H'} x(n_1)\sum_{\substack{X(H+H')^{-1}<y\le XH^{-1}\\ y\le Xn_1^{-1}}} x(y)\tau'_{k-1}(y)\right| \tag{35}$$

$$\text{¿}$$

$$S\ll\sum_{\square}^{x^{\delta}}\text{¿}$$

Заменим условия $y \le X n_1^{-1}$ на условие $y \le X H^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_1:

$$\sum_{H < n_1 \le H + H'} \sum_{\substack{X(H+H')^{-1} < y \le X H^{-1} \\ y \le X n_1^{-1} (mod\ D)}} \tau'_{k-1}(y) + ¿ \tag{36}$$

$$¿$$

$$R_1 \le \sum^{x^{\delta}} ¿$$

$$\tau'_{k-1}(y)$$

$$\frac{+1}{\varphi(D)} \sum_{H < n_1 \le H + H'} \sum_{X(H+H')^{-1} < y \le X H^{-1}} ¿¿$$

Для оценки внутренней суммы первого слагаемого в скобках применим лемму 16, а для оценки внутренней суммы второго слагаемого — ту же лемму, положив в ней $D = 1$:

$$R_1 \le c_1 \frac{X^{1+\delta}}{D} \left(\frac{H'}{H}\right)^2 \left(¿ \frac{X}{D} \left(1 - \frac{1}{p_0}\right)\right)^{k-2}, \tag{37}$$

где $c_1 = (k-1)^{7(k-2)} \exp\{4^7 (k-2)\} \left(¿ \frac{X}{D}\left(1 - \frac{1}{p_0}\right)\right)^{k-2}$.

Тогда:

$$R_1 \le c_1 \frac{X^{1-\delta}}{D} (k-1)^{7(k-2)} \exp\{4^7 (k-2)\} \left(¿ \frac{X}{D}\left(1 - \frac{1}{p_0}\right)\right)^{k-2} \tag{38}$$

Получим:

$$S \ll x^{\delta} \max_{x \ne x_0} \{|S_1|\} + R_1, \tag{39}$$

где

$$\acute{x}(l)\sum_{H<n_1\le H+H'} x(n_1)\times \qquad (40)$$

¿

$$s_1=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x\ne x_0} ¿$$

$$\times\sum_{U<u\le 2^{r-1}U}\tau'_{k-r}(v)x(v).$$

5. Пусть $V\le X^{\delta}$. Тогда

$$\left|S_1\right|\le \max_{x\ne x_0}\left\{\left|\sum_{H<n_1\le H+H'} x(n_1)\right|\right\}\sum_{N_{r+1}<n_{r+1}\le 2N_{r+1}}\dots\sum_{N_k<n_k\le 2N_k}\times \qquad (41)$$

$$\times\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x\ne x_0}\left|\sum_{U<u\le U_u} x(u)\tau'_{r-1}(u)\right|,$$

где $U_u=\min\left\{2^{r-1}U,\frac{U}{u}\right\}.$

Применив неравенство Коши, получим:

$$\sigma=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x\ne x_0}\left|\sum_{U<u\le U_u} x(u)\tau'_{r-1}(u)\right|\le(\sigma_1)^{\frac{1}{2}}, \qquad (42)$$

где

$$\sigma=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x\,(\mathrm{mod}\,D)}\left|\sum_{U<u\le U_u} x(u)\tau'_{r-1}(u)\right|^2. \qquad (43)$$

Заметим, что σ_1 равняется числу решений сравнения

$n_2\dots n_r\equiv n'_2\dots n'_r(\mathrm{mod}\,D);$

$N_2<n_2,n'_2\le 2N_2,\dots,N_r<n_r,n'_r\le 2N_2,$

$U<n_2\dots n_r,n'_2\dots n'_r\le U_u.$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U<u\le U_u}\tau'_{r-1}(u)\sum_{\frac{U-u}{D}<d\le\frac{U_{u-u}}{D}}\tau_{r-1}(u+dD). \qquad (44)$$

Для оценки второй суммы воспользуемся леммой 16, а для оценки первой — неравенством Марджанишвили (лемма 2). Имеем:

$$(r-1)^{7(k-2)}\exp[4^7(r-2)]\left(\frac{U}{D}+1\right)\left(¿\frac{U}{D}\left(1-\frac{1}{p_0}\right)\right)^{r-2}\times \qquad (45)$$

$$\times\frac{U(¿U+r-2)^{r-2}}{(r-2)!}\le$$

$$\le(r-1)^{6(r-2)}\exp\{c_2(r-2)\}\left(\frac{U^2}{D}+U\right)(¿U)^{2r-4},$$

$c_2-¿$ абсолютная константа.

Отсюда следует

$$\sigma\le(r-1)^{3(r-2)}e^{\frac{c_2(r-2)}{2}}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)(¿U)^{r-2}. \qquad (46)$$

Используя (30) и лемму 17, получим:

$$S_1\le\max_{x\ne x_0}\left\{\left|\sum_{H<n_1\le H+H'}x(n_1)\right|\right\}V(r-1)^{3(r-2)}e^{\frac{c_2(r-2)}{2}}\times \qquad (47)$$

$$\times\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)(¿U)^{r-2}\le$$

$$\le N_1^{1/2}D^{1/6}(¿D)V(r-1)^{3(r-2)}e^{\frac{c_2(r-2)}{2}}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)(¿U)^{r-2}.$$

Так как

$$N_1^{1/2}U=(N_1U)^{1/2}(U^2)^{1/4}\ll X^{1/2}(N_1UV)^{1/4}\le X^{3/4},$$

$$(N_1U)^{1/2}\ll X^{1/2},X^{1/2}D^{1/6}\ll X^{3/4}D^{-1/3},$$

то

$$S_1\le X^{\delta}(X^{3/4}D^{-1/3}+X^{1/2}D^{1/6})(r-1)^{3(r-2)}e^{\frac{c_2(r-2)}{2}}(¿X)^{r-1}.$$

Таким образом при $V \le X^{\delta}$ получаем:

$$S \le X^{3/4+2\delta} D^{-1/3} \left(\frac{k}{2}\right)^{3\left(\frac{k}{2}-1\right)} e^{\frac{e_2}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)} (¿X)^{k/2} + ¿ \quad (48)$$

$$+\frac{X^{1-\delta}}{D}(k-1)^{7(k-2)} \exp\{4^7(k-2)\} \left(¿\frac{X}{D}\left(1-\frac{1}{p_0}\right)\right)^{k-2}$$

6. Рассмотрим следующий случай: $V > X^{\delta}$.

Пусть сначала $U \le DX^{\delta}$

Разобьем промежуток суммирования $¿$ на промежутки (W, W+ W'], где

$W' = \frac{V}{X^{2\delta}}$. Получим:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{x \ne x_0} \acute{x}(l) \left| \sum_{H < n_1 \le H + H'} x(n_1) \right| \times \quad (49)$$

$$¿$$

$$S_1 \ll \sum_{\square}^{X^{2\delta}} ¿$$

$$\times \left| \sum_{W < v \le W + W'} \tau'_{k-r}(u) x(u) \sum_{\substack{U < u \le U_v \\ u \le X(H_v)^{-1}}} \tau'_{r-1}(u) x(u) \right|.$$

Заменим условие $u \le X(H_u)^{-1}$ на условие $u \le X(HW)^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_2:

$$\sum_{H < n_1 \le H + H'} \sum_{W < v \le W + W'} \tau'_{k-1}(u) \sum_{\substack{X(H(W+W'))^{-1} < u \le X(HW)^{-1} \\ u \equiv ¿_1^{-1} v^{-1} (mod\ D)}} \tau'_{k-1}(u) + ¿ \quad (50)$$

$$¿$$

$$R_2 \le \sum_{\square}^{X^{2\delta}} ¿$$

$$\tau'_{k-1}(u)$$

$$\frac{+1}{\varphi(D)} \sum_{H < n_1 \le H + H'} \sum_{W < v \le W + W'} \tau'_{k-1}(u) \sum_{X(H(W+W'))^{-1} < u \le X(HW)^{-1}} ¿ \ll ¿$$

$$\ll \frac{X^{3\delta}}{D}\left(\frac{H'}{H}\right)\left(\frac{W'}{W}\right)^2 \ll \frac{X^{1-2\delta}}{D}$$

Тогда

$$S_1 \ll x^{2\delta} \max_{x \neq x_0} \{|S_2|\} + \frac{X^{1-2\delta}}{D}, \tag{51}$$

где

$$S_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{x \neq x_0} \acute{x}(l) \sum_{H < n_1 \leq H + H'} x(n_1) \tag{52}$$

$$\times \sum_{W < v \leq W' + W} \tau'_{k-r}(v) x(v) \sum_{\substack{U < u \leq U_v \\ u \leq X(HW)^{-1}}} \tau'_{r-1}(u) x(u)$$

Учитывая (29), имеем:

$$S_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{x \neq x_0} \acute{x}(l) \sum_{H < n_1 \leq H + H'} x(n_1) \tag{53}$$

$$\times \sum_{W < v \leq W' + W} \tau'_{k-r}(v) x(v) \sum_{\substack{U < u \leq U_v \\ u \leq X(HW)^{-1}}} \tau'_{r-1}(u) x(u)$$

Для оценки суммы s_2 применим неравенство Коши:

$$_2 \ll \max_{x \neq x_0} \left| \sum_{H < n_1 \leq H + H'} x(n_1) \right| \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{x \,(mod\, D)} \left| \sum_{W < v \leq W + W'} \tau'_{k-r}(v) x(v) \right|^2 \right)^{1/2} \times \tag{54}$$

$$\times \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{x \,(mod\, D)} \left| \sum_{U < u \leq U_v} \tau'_{k-r}(u) x(u) \right|^2 \right)^{1/2}$$

Сумма $\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{x(mod\,D)} \left| \sum_{U<u\le U_v} \tau'_{k-r}(v)\,x(v) \right|^2$ равняется числу решений сравнения $n_2 \dots n_r \equiv n'_2 \dots n'_r (mod\,D)$;

$N_2 < n_{2,} n'_2 \le 2N_2, \dots, N_r < n_{r\,,} n'_r \le 2N_2,$

$U < n_2 \dots n_r, n'_2 \dots n'_r \le U_u.$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U<u\le U_v} \tau'_{k-r}(u) \sum_{\frac{U-u}{D}<d\le\frac{U_{v-u}}{D}} \tau_{r-1}(u+dD) \ll X^{\delta}\left(\frac{U^2}{D}+U\right) \qquad (55)$$

Аналогично оценивается сумма $\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{x(mod\,D)} \left| \sum_{W<u\le W+W'} \tau'_{k-r}(v)\,x(v) \right|^2$

Таким образом,

$$S_2 \ll X^{\delta}\sqrt{D} \in D\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{D}}+V\right) \ll \qquad (56)$$

$$\ll X^{1,5\delta}\sqrt{UVD} \ll X^{3\delta} D^{3/2}$$

Учитывая (31), получаем

$$S \ll \frac{X^{15/16+6\delta}}{D} + \frac{X^{1-\delta}}{D} \qquad (57)$$

7. Пусть теперь $U > DX^{\delta}$

Разобьем промежуток суммирования ¿ на промежутки ¿ , где $W' = \frac{V}{X^{\delta}}$

Получим:

$$S_1 \ll \sum_{\square}^{x^{\delta}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{x\ne x_0} \acute{x}(l) \left| \sum_{H<n_1\le H+H'} x(n_1) \right| \times \qquad (58)$$

$$\times\left|\sum_{W<v\le W+W'}\tau'_{k-r}(v)x(v)\sum_{\substack{U<u\le U_v\\ u\le X(H_v)^{-1}}}\tau'_{r-1}(u)x(u)\right|$$

Заменим условие $u\le X(H_u)^{-1}$ на условие $u\le X(HW)^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_2:

$$R_2\le\sum^{x^\delta}¿\sum_{H<n_1\le H+H'}\sum_{W<v\le W+W'}\tau'_{k-1}(v)\sum_{\substack{X(H(W+W'))^{-1}<u\le X(HW)^{-1}\\ u\equiv ¿_1^{-1}v^{-1}(mod\,D)}}\tau'_{k-1}(u)+¿ \tag{59}$$

$$+\sum^{x^\delta}¿\ \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{H<n_1\le H+H'}\sum_{W<v\le W+W'}\tau'_{k-1}(v)\sum_{X(H(W+W'))^{-1}<u\le X(HW)^{-1}}\tau'_{k-1}(u)\,¿$$

Для оценки внутренней суммы первого слагаемого применим лемму 16, а для оценки внутренней суммы второго слагаемого — ту же лемму, положив в ней D = 1. Воспользуемся также неравенством Марджанишвили (лемма 2). Тогда:

$$R_2\le\frac{X^{1+\delta}}{D}(r-1)^{7(k-2)}\exp\{4^7(k-2)\}\left(\frac{H'}{H}\right)\left(\frac{W'}{W}\right)^2\times \tag{60}$$

$$\times\left(¿\frac{X}{D}\left(1-\frac{1}{p_0}\right)\right)^{r-2}\frac{(¿W+k-r-1)^{k-r-1}}{(k-r-1)!}\le$$

$$\le\frac{X^{1-\delta}}{D}\left(\frac{H'}{H}\right)(r-1)^{6(r-2)}e^{c_3(r-2)}(¿X)^{k-3},$$

$c_3-¿$ абсолютная константа.

Получим:

$$s_1\ll x^\delta\max_{x\ne x_0}\{|S_2|\}+R_2, \tag{61}$$

где

$$s_2=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x\neq x_0}\acute{x}(l)\sum_{H<n_1\leq H+H'}x(n_1)\times \tag{62}$$

$$\times\sum_{W<v\leq W'+W}\tau'_{k-r}(v)x(v)\sum_{\substack{U<u\leq U_v\\ u\leq X(HW)^{-1}}}\tau'_{r-1}(u)x(u)$$

Учитывая (29) и (32), имеем:

$$S\ll x^{2\delta}\max_{x\neq x_0}\{|S_2|\}+\frac{X^{1-2\delta}}{D}(k-1)^{7(k-2)}e^{c_4(k-2)}(¿X)^{k-2}, \tag{63}$$

$c_4-¿$ абсолютная константа.

Оценим сумму s_2. применяя неравенство Коши, имеем:

$$_2\ll\max_{x\neq x_0}\left|\sum_{H<n_1\leq H+H'}x(n_1)\right|\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x(mod\,D)}\left|\sum_{W<v\leq W+W'}\tau'_{k-r}(v)x(v)\right|^2\right)^{1/2}\times \tag{64}$$

$$\times\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x(mod\,D)}\left|\sum_{U<u\leq U_v}\tau'_{k-r}(u)x(u)\right|^2\right)^{1/2}$$

Заметим, что сумма

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{x(mod\,D)}\left|\sum_{U<u\leq U_v}\tau'_{k-r}(u)x(u)\right|^2 \tag{65}$$

Равняется числу решений сравнения

$n_2\dots n_r\equiv n'_2\dots n'_r(mod\,D);$

$N_2<n_2,n'_2\leq 2N_2,\dots,N_r<n_r,n'_r\leq 2N_2,$

$U<n_2\dots n_r,n'_2\dots n'_r\leq U_u.$

Число решений этого сравнения оценивается так же, как и в пункте 5 доказательства:

$$\sum_{U<u\le U_v} \tau_{r-1}(u) \sum_{\frac{U-u}{D}<d\le \frac{U_{v-u}}{D}} \tau_{r-1}(u+dD) \le \tag{66}$$

$$\le (r-1)^{6(r-2)} \exp\{c_2(r-2)\}\left(\frac{U^2}{D}+U\right)(\text{¿}\,U)^{2r-4},$$

$c_2-\text{¿}$ абсолютная константа

Аналогично оценивается сумма

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{x\,(mod\,D)} \left|\sum_{W<v\le W+W'} \tau'_{k-r}(v)\,x(v)\right|^2 \tag{67}$$

Таким образом:

$$S_2 \le \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (\text{¿}\,X)^{k-3} \max_{x\ne x_0} \left|\sum_{H<n_1\le H+H'} x(n_1)\right| \times \tag{68}$$

$$\times \left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{D}}+V\right).$$

В силу неравенств $H \le 2N_{1,} V \le U \le N_{1,} V,\, N_{1,} UV < X,\, D \le X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$ и леммы 17 получим:

$$\left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (\text{¿}\,X)^{k-3} \max_{x\ne x_0} \left|\sum_{H<n_1\le H+H'} x(n_1)\right| \times \tag{69}$$

$$\times \frac{U\sqrt{V}+\sqrt{U}\,V}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV} \ll$$

$$\ll \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (\text{¿}\,X)^{k-3} N_1^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{6}} \in X \left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\,V\right) \ll$$

$$\ll \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (¿X)^{k-2} \left(\frac{\sqrt{U}\sqrt{N_1 UV}}{D^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{N_{1,} UV}\, D^{\frac{1}{6}} \ll \right)$$

$$X^{1/2} \frac{(\overset{N}{¿¿}1UV)^{1/4}}{D^{1/3}} + X^{1/2} D^{1/6} \ll$$

$$\ll \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (¿X)^{k-2} ¿$$

$$\ll \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (¿X)^{k-2} X^{3/4} D^{-1/3}$$

И так как $\frac{UV}{D} < \frac{X}{N_{1,} D}$ имеем:

$$\left|\sum_{H<n_1\le H+H'} x(n_1)\right| + ¿ \tag{70}$$

$$S_2 \ll \frac{X}{D} N_1^{-1} \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (¿X)^{k-3} \max_{x\ne x_0} ¿$$

$$+ \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (¿X)^{k-2} X^{3/4} D^{-1/3}$$

В силу (40) получам:

$$\left|\sum_{H<n_1\le H+H'} x(n_1)\right| \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (¿X)^{k-3} + ¿ \tag{71}$$

$$S \ll \frac{X^{1+2\delta}}{D} N_1^{-1} \max_{x\ne x_0} ¿$$

$$+ X^{\frac{3}{4}+2\delta} D^{-1/3} + \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (¿X)^{k-2} + ¿$$

$$\frac{+X^{1-\delta}}{D} (k-1)^{7(k-2)} e^{c_4(k-2)} (¿X)^{k-2}$$

Таким образом, мы получили окончательную оценку для суммы Sравномерную по *k*.

8. Теперь рассмотрим сумму

$$\sum_{H<n_1\le H+H'} x(n_1) \qquad (72)$$

Пусть $N=max\{N_i\}, A=N^{-1}\sum_{t\le T} x(t), N\le T\le 2N, D_1=p_0^{m_1}-¿$ модуль, по которому характер x примитивный.

Оценим величину А. Так как $N=max\{N_i\}\ge X^{\frac{1}{2k}}, D_1\le D\le X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$,

то

$\frac{¿D_1}{¿T}\le k.$

Возможны случаи:

- $\frac{m_1}{20}>k, \frac{¿D_1}{¿T}>1, m_1>81.$

В этом случае по лемме 18

$A\ll N^{\frac{-\gamma}{k^3}}\ll X^{\frac{-\gamma}{2k^3}},$

учитывая, что $N\ge X^{\frac{1}{2k}}$.

- $T\ge D_1.$

тогда

$A\ll\frac{\sqrt{D_1}\in D_1}{N}\le\frac{\sqrt{T}\in T}{N}\ll N^{\frac{-1}{2}}\in X\le X^{\frac{-1}{4k}}\in X.$

- $m_1\le max\{81, 20k\}\le 41k.$

В этом случае сумму характеров оценим модулем D_1. Имеем:

$$A\le\frac{p_0^{m^1}}{N}\le\frac{p_0^{41k}}{N}\ll X^{\frac{-1}{4k}} .$$

Так как $\frac{1}{2k^3}<\frac{1}{4k}$ и в лемме 18 константа $\gamma<1$, то во всех случаях

$A\ll X^{\frac{-\gamma}{2k^3}}.$

Таким образом, поскольку оценку (34), имеем:

$$S \ll \frac{X^{1+2\delta-\frac{\gamma}{2k^3}}}{D} + \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (InX)^{k-2} + ¿ \tag{73}$$

$$+ X^{\frac{3}{4}+2\delta} D^{-1/3} + \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (InX)^{k-2} + ¿$$

$$\frac{+X^{1-\delta}}{D} (k-1)^{7(k-2)} e^{c_4(k-2)} (InX)^{k-2}.$$

Поскольку $D \le X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$ то $X^{1/2} \le X^{3/4} D^{-1/3}$. Поэтому оценка (19) справедлива и в случае, когда $N_1 \dots N_k \le X^{1/2}$.

9. Займемся оценкой остаточного члена формулы (9).

Учитывая, что в *R* входит *O(* $¿^k X ¿$ слагаемых вида S, получаем, что

$$R \ll \frac{X^{1+\frac{35}{10}\delta-\frac{\gamma}{2k^3}}}{D} + \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (InX)^{2k-3} + ¿ \tag{74}$$

$$+ X^{\frac{3}{4}+\frac{11}{3}\delta} D^{-1/3} \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (InX)^{2k-3} + ¿$$

$$\frac{+X^{1-\delta}}{D} (k-1)^{7(k-2)} e^{c_4(k-2)} (¿ X)^{2k-2}.$$

Выберем параметр $\delta = min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\gamma}{5k^3}\right\}$.

Если $\frac{\varepsilon}{4} < \frac{\gamma}{5k^3}$ то $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда:

$$R \ll X^{\frac{3}{4}+\frac{11}{3}\delta} D^{-1/3} \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (InX)^{2k-3} + ¿ \tag{75}$$

$$\frac{+X^{1-\delta}}{D} (k-1)^{7(k-2)} e^{c_4(k-2)} (¿ X)^{2k-2} \ll$$

$$\ll \frac{X^{1-\frac{\varepsilon}{4}}}{D} \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)} (InX)^{2k-2} + ¿$$

$$+\frac{X^{1-\frac{\varepsilon}{4}}}{D}(k-1)^{7(k-2)}e^{c_4(k-2)}(¿X)^{2k-2} \ll$$

$$\ll \frac{X^{1-\frac{\varepsilon}{4}}}{D}(k-1)^{7(k-2)}e^{c_4(k-2)}(¿X)^{2k-2}.$$

Если $\frac{\varepsilon}{4} \geq \frac{\gamma}{5k^3}$ то $\delta = \frac{\gamma}{5k^3}$, поэтому

$$R \ll \frac{X^{1+\frac{35}{10}\delta-\frac{\gamma}{2k^3}}}{D} + \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)}(InX)^{2k-3} + ¿ \tag{76}$$

$$+\frac{X^{1-\delta}}{D}(k-1)^{7(k-2)}e^{c_4(k-2)}(¿X)^{2k-2} \ll$$

$$\ll \frac{X^1 - \frac{\gamma}{5k^3}}{D} + \left(\frac{k}{2}\right)^{3(k-3)} e^{c_5(k-3)}(InX)^{2k-3} + ¿$$

$$\frac{+X^1 - \frac{\gamma}{5k^3}}{D}(k-1)^{7(k-2)}e^{c_4(k-2)}(¿X)^{2k-2} \ll$$

$$\ll \frac{X^1 - \frac{\gamma}{5k^3}}{D}(k-1)^{7(k-2)}e^{c_4(k-2)}(¿X)^{2k-2}.$$

Следовательно,

$$R \ll \frac{X^{1-\aleph}}{\varphi(D)}(k-1)^{7(k-2)}e^{c(k-2)}(¿X)^{2k-2}, \tag{77}$$

где $\underset{\aleph = min¿}{\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\gamma}{5k^3}\right\}}, c - ¿$ абсолютная константа. Заметим, что остаток в (28) не

превосходит величины

$$\frac{X^{1-\frac{1}{2k}}}{\varphi(D)} \ll \frac{X^{1-\aleph}}{\varphi(D)}(k-1)^{7(k-2)}e^{c(k-2)}(¿X)^{2k-2}, \tag{78}$$

Поскольку $\frac{\gamma}{5k^3} < \frac{1}{5k^3} < \frac{1}{2k}$.

10. Определим при каких k полученная асимптотическая формула будет справедлива.

Так как главный член (9) является величиной порядка $\frac{X}{\varphi(D)}(¿X)^{k-1}$,

то

$$\frac{X^{1-\aleph}}{\varphi(D)}(k-1)^{7(k-2)} e^{c(k-2)} (¿X)^{2k-2} < \frac{X}{\varphi(D)}(¿X)^{k-1}, \tag{79}$$

$$(k-1)^{7(k-2)} e^{c(k-2)} (¿X)^{k} < X^{\aleph} \le X^{\frac{\gamma}{5k^3}}, k \in ¿X < \frac{¿X}{k^3}$$

$$k \le \left(\frac{¿X}{¿\in X}\right)^{1/4}.$$

Доказательство теоремы завершено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы был изучен процесс суммирования значений функции делителей в арифметической прогрессии с разностью специального вида.

В ходе выполнения данной работы были решены следующие задачи:

- Сформулированы и доказаны основные и вспомогательные леммы.

- Сформулирована и доказана теорема о равномерной оценке остаточного члена асимптотической формулы.

В результате работы была получена асимптотическая формула для числа значений функции делителей $\tau k(n)$ в арифметической прогрессии с разностью, равной степени фиксированного нечётного простого числа. При этом оценка остаточного члена равномерна по k. Также определена граница измерения k ≤(lnxln lnx)14⁄, для которой эта асимптотическая формула непрерывна.

В заключении проведенного исследования можно сделать следующие выводы: среди простых чисел существует тенденция, которая заключается в том, что они предпочитают избегать повторения последних цифр. То есть существует гораздо меньшая вероятность того, что после числа, которое заканчивается на 1, будет идти число, что также заканчивается на 1, чем это должно вытекать из случайного распределения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. —М.: Наука, 1983. - 239 с.
2. Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа//Изв. АН СССР, сер. Матем. —1955. —Т. 19, 1. —С. 11-16.
3. Линник Ю. В., Барбан М. Б., Чудаков Н. Г. О простых числах в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа // Actaarithm . J. —1964. — vol.9, №4. — P. 375-390.
4. Лаврик А. Ф. Функциональное уравнение для Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях/ / Изв. АНСССР, сер. Матем. —1966. — Т. 30. — С. 433-448.
5. IwaniecH.,KowalskyE. Analytic number theory. —American Mathematical Society, Colloquium Publications. Volume 53, 2004. — 615 c.
6. Friedlander J.,IwaniecH. Incomplete kloosterman sums and divisor problem//Ann. Math. —1985. —121. — P. 319-350.
7. Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого нечетного числа//Изв. АН СССР, сер. Матем. —1979. — Т. 43, 4. – С. 892-908.
8. Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях / / Докл. АН СССР. —1970. Т. 192, №4. — С. 724-727.
9. Рахмонов З. Х. Распределение чисел Харди — Литтлвуда в арифметических прогрессиях/ / Изв. АН СССР, сер. Матем. —1989. Т. 53, №1. — С. 211-224.
10. Виноградов А. И., Линник Ю. В. Оценка суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии // Успехи матем. наук. —1957. — Т. 12, вып. 4 (76). — С. 277-280.
11. Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы//Докл. АН СССР. - 1939. — Т 22, ул. — С. 391-393.

12. Чубариков В. Н. Уточнение границы нулей L- рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа/ / Вестник Московского университета. — 1973. — Уд 2. — С. 46-52.

13. Виноградов А. И. О числах с малыми простыми делителями//Докл. АН СССР. — 1956. —Т. 19, У24. — С. 683-686.

14. Титчмарш Е. К. Теория дзета — функции Римана. —М.: ИЛ, 1953. — 408 с.

15. Линник Ю. В. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод. — Ленинград: Наука, 1980. — 373 с.

16. Прахар К. Распределение простых чисел. —М.: Мир, 1967. —511 с.

17. Карацуба А. А. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения//Изв. АН СССР, сер. Матем. —1964. — 28. – С. 237-248.

18. Едгоров Ж. Задача делителей в специальных арифметических прогрессиях/ / Изв. АН УзССР. —1977. — Уд 2. — С. 9—13.

19. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их применения/ /Труды МИАН СССР. 1971. — т. 112. — С. 241-255.

20. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле! [Изв. АН СССР, сер. Матем. —1972. — 36. С. 475-483.

21. Розин С. М. О нулях Дирихле//Изв. АН СССР, сер. Матем. —1959. — 23. — С. 503-508.

22. Чудаков Н. Г. О нулях Дирихле для модулей, равных степеням нечетного простого//Вестник ЛГУ, сер. Матем. 1966. — 1. — С. 93-98.

23. Хооли К. Применение методов решета в теории чисел. —М.: Наука, 1987. — 135 с.

24. Виноградов И.М. Основы теории чисел. —СПб-М: Лань, 2004. 167 с.

25. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. —М.: Наука, 1971. — 109 с.

26. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. —Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. 208 с.