ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ И ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Л.Н. Куртова

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебно-методическое пособие

Белгород, 2019

УДК
ББК

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
НИУ «БелГУ»

Рецензенты:

Доцент кафедры математики НИУ БелГУ, кандидат физико-математических наук Мотькина Н.Н.;

Доцент кафедры естественнонаучных дисциплин Белгородского университета кооперации, экономики и права, кандидат физико-математических наук Москаленко Н.И.

Куртова, Л.Н.

Основы математической логики: Учебное пособие / Л.Н. Куртова.– Белгород: Изд-во НИУ «БелГУ», 2018. – с. 85.

Учебное пособие по курсу «Основы математической логики» для бакалавров направления подготовки 45.03.03 Фундаментальная и прикладная лингвистика представляет собой краткие теоретические сведения и примеры задач по математической логике и теории алгоритмов, практические задания и задания для контроля.

УДК
ББК

Содержание

Введение	4
Тема 1. Логика высказываний	5
Основные определения и понятия	5
Примеры решения типовых задач	23
Задачи для самостоятельной работы	29
Тема 2. Логика предикатов	39
Основные определения и понятия	39
Примеры решения типовых задач	51
Задачи для самостоятельной работы	55
Тема 3. Теория алгоритмов	61
Основные определения и понятия	61
Примеры решения типовых задач	68
Задачи для самостоятельной работы	71
Тема 4. Варианты контрольной работы	73
Список литературы	84

Введение

Формирование математической логики началось более двух тысяч лет назад в работах Аристотеля, Евклида, Архимеда.

Современная математическая логика – раздел математики, занимающийся изучением математических доказательств и вопросов основания математики.

Не менее важным является и прикладное значение математической логики. В настоящее время математическая логика оказалась тесно связана с лингвистическими вопросами, касающимися анализа и синтеза естественных языков, выяснения существования механических процедур для построения слов и других.

В пособии представлены основные определения и понятия дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов». Учебное пособие предназначено для студентов направления подготовки «Фундаментальная и прикладная лингвистика», но может быть полезно также студентам других направлений подготовки, изучающих соответствующую дисциплину.

Пособие состоит из четырех глав, в которых рассматриваются следующие вопросы: логика высказываний, логика предикатов, теория алгоритмов.

В первых трех главах приводятся краткие теоретические сведения по изучаемым темам, разбираются основные виды задач и даются задания для самостоятельной работы с целью обобщения и углубления знаний.

Четвертая глава содержит варианты контрольной работы, которая может использоваться на зачетном занятии для оценивания знаний обучающихся по всему курсу.

Тема 1. Логика высказываний

Высказывание – один из важнейших объектов математической логики. Алгебра высказываний занимается изучением способов построения высказываний, закономерностями таких способов построения. Алгебра высказываний является одним их основных разделов математической логики.

Основные определения и понятия

Высказывание – предложение, которое либо истинно, либо ложно. Высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным.

Обозначаются высказывания заглавными буквами латинского алфавита А, В, С, Д.

Истинное высказывание будем обозначать символом 1, а ложное – 0. Рассмотрим функцию λ, определенную на множестве всех высказываний и принимающую значения 0 или 1, по следующему закону:

λ(Р)=l, если высказывание Р истинно,

λ(Р)=0, если высказывание Р ложно.

Функция λ, называется *функцией истинности*, а значение λ(Р) – *логическим значением* или *значением истинности* высказывания Р.

Логические операции над высказываниями.

1. *Отрицанием* высказывания Р называется новое высказывание, обозначаемое $\neg$Р (читается: «не Р» или «неверно, что Р»), которое истинно, если высказывание Р ложно, и ложно, если высказывание Р истинно.

Таблица истинности для операции отрицания:

Р	$\neg$Р
0	1
1	0

2. *Конъюнкцией* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \wedge Q$ (читается: «P и Q»), которое истинно лишь в единственном случае, когда истинны оба исходных высказывания P и Q, и ложно во всех остальных случаях.

Таблица истинности для конъюнкции:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. *Дизъюнкцией* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \vee Q$ (читается «P или Q»), которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний P или Q истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания P и Q ложны.

Таблица истинности для конъюнкции:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4. *Импликацией* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \to Q$ (читается: «если P, то Q»), которое ложно в единственном случае, когда высказывание P истинно, а Q – ложно, а во всех остальных случаях – истинно. Высказывание P называют условием или посылкой, высказывание Q – следствием или заключением, высказывание $P \to Q$ – следованием или импликацией.

Таблица истинности для импликации:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1

0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация важна в математических доказательствах, так как многие теоремы формулируются в условной форме «Если P, то Q». Если при этом известно, что P истинно и доказана истинность импликации $P\rightarrow Q$, то можем сделать вывод, что высказывание Q истинно.

5. *Эквивалентностью* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P\leftrightarrow Q$ (читается: «P эквивалентно Q»), которое истинно в том и только в том случае, когда одновременно оба высказывания P и Q либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях – ложно.

Таблица истинности для эквивалентности:

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность также важна в математических доказательствах, так как связана с формулировками теорем, содержащих необходимые и достаточные условия.

Связь языка и логических операций.

Каждая логическая операция – математическая модель логического союза языка. Логические операции отражают на языке нулей и единиц соответствующие союзы при процессах мышления.

Отрицание, конъюнкция и эквивалентность передают логические союзы «не», «и», «тогда и только тогда, когда» соответственно. Дизъюнкция призвана отразить языковой союз «или», но следует разделять дизъюнкция и строгую дизъюнкцию, которая истинна тогда и только тогда, когда истинен только один ее член.

Импликация передает логический союз «если …, то …». На этом союзе основан процесс построения выводов, умозаключений.

С помощью логических операций над высказываниями можно из различных высказываний строить сложные высказывания. Например, в формулу $(X \wedge Y) \to Z$ вместо переменных X, Y, Z можно подставлять высказывания. Тогда формула будет являться составным высказыванием. Переменные, вместо которых подставляются высказывания, называют *пропозициональными переменными*. Обозначение: P, Q, R, S, X, Y, Z или с индексами.

Дадим индуктивное определение *формулы алгебры высказываний*:

1. Любая пропозициональная переменная является формулой алгебры высказываний.
2. Если F1 и F2 – формулы алгебры высказываний, то выражения $\neg$F1, (F1$\wedge$F2), (F1$\vee$F2), (F1$\to$F2), (F1$\leftrightarrow$F2) также являются формулами алгебры высказываний.
3. Никаких других формул алгебры высказываний, кроме полученных в 1. и 2., нет.

Если формула F составлена из пропозициональных переменных X1, ,X2, …, Xn, то ее иногда обозначают F(X1, ,X2, …, Xn).

Подформулой формулы называется любая ее часть, сама являющаяся формулой.

Число скобок в формулах можно уменьшить, если считать, что конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция выполняется раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

Если в формулу F(X1, X2, ..., Xn) вместо пропозициональных переменных X1, X2, ..., Xn подставить конкретные высказывания A1, A2, ..., An соответственно, то получится некоторое новое составное высказывание F(A1, A2, ..., An). Оно называется *конкретизацией* формулы F(X1, X2, ..., Xn) на наборе высказываний A1, A2, ..., An.

Для нахождения значений формулы на всех возможных наборах значений пропозициональных переменных используют таблицы истинности.

Если в формуле содержится n пропозициональных переменных, то тогда возможны 2^n различных конкретизаций, и таблица истинности для формулы содержит 2^n строк.

Классификация формул алгебры высказываний.

Формула алгебры высказываний называется *выполнимой*, если хотя бы одна из ее конкретизаций является истинным высказыванием.

Формула называется *тавтологией*, или тождественно истинной (законом логики), если она превращается в истинное высказывание при любом наборе пропозициональных переменных.

Обозначение тавтологий: $\models F$.

Формула называется *опровержимой*, если существуют хотя бы один набор пропозициональных переменных, на котором формула превращается в ложное высказывание.

Формула называется *тождественно ложной* (*противоречием)*, если она не является выполнимой.

Основные тавтологии:

I. Законы логики

а) закон исключенного третьего: $P\vee\neg P$;

б) закон отрицания противоречия: $\neg(P\wedge\neg P)$;

в) закон двойного отрицания: $\neg\neg P\leftrightarrow P$;

г) закон контрапозиции: $(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$;

д) закон силлогизма: $((P\to Q)\wedge(Q\to R))\to(P\to R)$;

е) правило модус поненс (modus ponens) $(P\wedge(P\to Q))\to Q$;

ж) правило приведения к абсурду:

$((\neg P\to Q)\wedge(\neg P\to\neg Q))\to P$, $(\neg P\to(Q\wedge\neg Q))\to P$;

II. Свойства конъюнкции и дизъюнкции

а) законы идемпотентности (поглощения): $P\wedge P\leftrightarrow P$, $P\vee P\leftrightarrow P$;

б) законы коммутативности: $P\wedge Q\leftrightarrow Q\wedge P$, $P\vee Q\leftrightarrow Q\vee P$;

в) законы ассоциативности:

$P\wedge(Q\wedge R)\leftrightarrow(P\wedge Q)\wedge R$, $P\vee(Q\vee R)\leftrightarrow(P\vee Q)\vee R$,

г) законы дистрибутивности:

$P\wedge(Q\vee R)\leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$, $P\vee(Q\wedge R)\leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$,

д) законы де Моргана: $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$, $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$;

III. Выражение одних логических операций через другие

а) $P\to Q\leftrightarrow\neg P\vee Q$;

б) $P\to Q\leftrightarrow\neg(P\wedge\neg Q)$;

в) $P\leftrightarrow Q\leftrightarrow(P\to Q)\wedge(Q\to P)$.

Правила для получения новых тавтологий:

1. Правило заключения: Если $|=F$ и $|=F\to H$, то $|=H$.

2. Правило подстановки: Если $|=F$, и F содержит пропозициональную переменную X, то подстановка вместо X любой формулы H дает $|=F$.

Формулы F и H называются *равносильными* (эквивалентными), если при одинаковых наборах значений пропозициональных переменных значения формул F и H совпадают. Обозначение: $F\cong H$, $F\Leftrightarrow H$.

В таблице истинности столбцы, отвечающие значениям формулы F и H, совпадают на одинаковых наборах пропозициональных переменных.

Признак равносильности формул: Две формулы F и H равносильны тогда и только тогда, когда $|=F\leftrightarrow H$.

Примеры равносильных формул:

1) $\neg\neg P \cong P$;
2) $(P \to Q) \cong (\neg Q \to \neg P)$;
3) $P \wedge P \cong P$;
4) $P \vee P \cong P$;
5) $P \wedge Q \cong Q \wedge P$;
6) $P \vee Q \cong Q \vee P$;
7) $P \wedge (Q \wedge R) \cong (P \wedge Q) \wedge R$;
8) $P \vee (Q \vee R) \cong (P \vee Q) \vee R$;
9) $P \wedge (Q \vee R) \cong (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
10) $P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;
11) $P \vee (P \vee Q) \cong P$;
12) $P \wedge (P \vee Q) \cong P$;
13) $\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$;
14) $\neg(P \vee Q) \cong \neg P \wedge \neg Q$;
15) $P \to Q \cong \neg P \vee Q$;
16) $P \to Q \cong \neg(P \wedge \neg Q)$;
17) $P \leftrightarrow Q \cong (P \to Q) \wedge (Q \to P)$;
18) $P \wedge \neg P \cong 0$, $P \vee \neg P \cong 1$;
19) $P \wedge 1 \cong P$, $P \vee 1 \cong 1$;
20) $P \wedge 0 \cong 0$, $P \vee 0 \cong P$.

С помощью приведенных выше равносильных формул можно преобразовывать формулы алгебры высказываний, так как при замене подформулы в формуле на равносильную ей, полученная формула будет равносильна исходной.

Для каждой формулы алгебры высказываний можно указать равносильную ей формулу, содержащую из логических связок лишь $\neg$, $\wedge$, $\vee$..

Элементарной конъюнкцией (конъюнктивным одночленом) от пропозициональных переменных называется произвольная конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Элементарной дизъюнкцией (дизъюнктивным одночленом) от переменных называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Элементарная конъюнкция тождественно ложна тогда и только тогда, когда в ней содержится хотя бы одна пара переменной и ее отрицания.

Элементарная дизъюнкция тождественно истинна тогда и только тогда, когда в ней содержится хотя бы одна пара переменной и ее отрицания.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) формулы F называется равносильная ей формула, являющаяся дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы F называется равносильная ей формула, являющаяся конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

КНФ и ДНФ применяется для определения тавтологий и противоречий формул соответственно.

Для того чтобы формула была тавтологией необходимо и достаточно, чтобы каждая элементарная дизъюнкция ее КНФ содержала хотя бы одну пропозициональную переменную и ее отрицание.

Для того чтобы формула была притиворечием необходимо и достаточно, чтобы каждая элементарная конъюнкция ее ДНФ содержала хотя бы одну пропозициональную переменную и ее отрицание.

Среди дизъюнктивных (конъюнктивных) нормальных форм, существует единственна для данной формулы. Это совершенная дизъюнктивная нормальная форма (среди конъюнктивных форм – совершенная конъюнктивная нормальная форма).

Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) называется *совершенным*, если в него от каждой пары переменная и ее отрицание входит только один представитель. Нормальная форма (дизъюнктивная или конъюнктивная) называется *совершенной*, если в нее входят лишь совершенные одночлены (конъюнктивные или дизъюнктивные соответственно).

Приведение формулы алгебры высказываний к совершенной нормальной форме можно осуществлять двумя способами: с помощью равносильных преобразований и таблиц истинности.

Первый способ основан на равносильных преобразованиях данной формулы. Для приведения формулы к СНФ нужно сначала привести ее к ДНФ или КНФ.

Переход к ДНФ:

1) избавиться от операций импликации и эквивалентности с помощью законов: $P \rightarrow Q \cong \neg P \vee Q$ и $P \leftrightarrow Q \cong (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$;

2) знаки отрицания поставить к переменным, используя законы де Моргана: $\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$; $\neg(P \vee Q) \cong \neg P \wedge \neg Q$;

3) применяя законы дистрибутивности $P \wedge (Q \vee R) \cong (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, преобразовать формулу к дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Переход к СДНФ:

1) получить ДНФ;

2) убрать члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием, а из одинаковых членов дизъюнкции удалить все, кроме одного;

3) если элементарные конъюнкции в ДНФ содержат не все переменные, входящие в исходную формулу, то его умножают на дизъюнкции $P \vee \neg P$, где P – недостающая переменная;

4) раскрывают скобки внутри элементарных конъюнкций, где добавляли переменные, применяя закон дистрибутивности. Из полученных элементарных конъюнкций оставляем по одному из одинаковых.

Переход к КНФ:

1) избавиться от операций импликации и эквивалентности с помощью законов: $P\to Q\cong\neg P\vee Q$ и $P\leftrightarrow Q\cong(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$;

2) знаки отрицания поставить к переменным, используя законы де Моргана: $\neg(P\wedge Q)\cong\neg P\vee\neg Q$; $\neg(P\vee Q)\cong\neg P\wedge\neg Q$;

3) применяя законы дистрибутивности $P\vee(Q\wedge R)\leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$, преобразовать формулу к конъюнкции элементарных дизъюнкций.

Переход к СКНФ:

1) получить КНФ;

2) если элементарные дизъюнкции в КНФ содержат не все переменные, входящие в исходную формулу, то к ним добавляют через дизъюнкции конъюнкции $P\wedge\neg P$, где P – недостающая переменная;

3) раскрывают скобки внутри элементарных дизъюнкций, где добавляли переменные, применяя закон дистрибутивности. Из полученных элементарных дизъюнкций оставляем по одному из одинаковых.

Построение совершенных форм по таблицам истинности.

Переход к СДНФ:

1) выбираем наборы значений переменных, на которых формула принимает значение 1;

2) для каждого такого набора выписываем элементарную конъюнкцию. Причем если переменная принимает значение 0, то записываем в элементарную конъюнкцию отрицание этой переменной. Если переменная принимает значение 1, то в конъюнкцию входит сама эта переменная;

3) полученные совершенные конъюнктивные одночлены соединяем знаками дизъюнкции.

Переход к СКНФ:

1) выбираем наборы значений переменных, на которых формула принимает значение 0;
2) для каждого такого набора выписываем элементарную дизъюнкцию. Причем если переменная принимает значение 0, то записываем в элементарную дизъюнкцию переменную. Если переменная принимает значение 1, то в дизъюнкцию входит ее отрицание;
3) полученные совершенные дизъюнктивные одночлены соединяем знаками конъюнкции.

Логическое следование формул.

Основная задача математической логики связана с нахождением способов установления связи между значениями одних высказываний и значениями других высказываний при изучении формул алгебры высказываний. Такие методы позволяют проводить доказательства теорем.

Формула H называется *логическим следствием формул* F1, ..., Fm, если формула H превращается в истинное высказывание на наборах пропозициональных переменных, при которых в истинное высказывание превращаются все формулы F1,..., Fm. Обозначение: F1, ..., Fm|=H.

Формулы F1, ..., Fm называются посылками для логического следствия H.

Если F1, ..., Fm|=H, то в таблице истинности для формул F1, ..., Fm, H, формула H имеет значение 1 в тех строках, в которых каждая из формул F1, ..., Fm имеет значение 1.

Признак логического следствия. Формула H будет логическим следствием формулы F тогда и только тогда, когда формула $F \rightarrow H$ является тавтологией: $F|=H \Leftrightarrow |=F \rightarrow H$.

Для любых формул F1, F2, ..., Fm, H (m > 2) следующие утверждения равносильны:

а) F1, F2, ..., Fm |=H;

$$б)\ F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fm \models H;$$

$$в)\ \models (F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fm) \to H.$$

Свойства логического следования.

а) $F1, \ldots, Fm \models Fi$, для $i=1, 2, \ldots, m$;

б) если $F1, \ldots, Fm \models Gj$ для $j=1, 2, \ldots, p$ и $G1, \ldots, Gp \models H$, то $F1, \ldots, Fm \models H$.

Связь равносильности и логического следования: Две формулы алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда каждая из них является логическим следствием другой: $F \cong H \Leftrightarrow F \models H$ и $H \models F$.

Нахождение следствий из данных посылок. Формула H, не являющаяся тавтологией, тогда и только тогда будет логическим следствием формул $F1, \ldots, Fm$, не все из которых являются тавтологиями, когда все совершенные дизъюнктивные одночлены из разложения формулы H в СКНФ входят в СКНФ формулы $F1 \wedge \ldots \wedge Fm$.

Правило нахождения следствий:

1) составить конъюнкцию $F1 \wedge \ldots \wedge Fm$;
2) найти СКНФ для формулы $F1 \wedge \ldots \wedge Fm$;
3) выписать все совершенные дизъюнктивные одночлены найденной формы и всевозможные конъюнкции этих одночленов. Полученное множество формул и является искомым множеством следствий из посылок.

Нахождение посылок из данного следствия. Чтобы найти все формулы, логическим следствием каждой из которых будет данная формула H необходимо:

1) найти СКНФ для формулы H;
2) выявить все совершенные дизъюнктивные одночлены, которые в ней отсутствуют;
3) составить всевозможные конъюнкции формулы H с недостающими дизъюнктивными одночленами. Получившаяся совокупность формул

вместе с формулой H будет образовывать множество посылок, из которых следует формула H.

Приложения алгебры высказываний.

1. Определение структуры математических теорем (прямая и обратная теоремы, необходимые и достаточные условия, противоположная и обратная противоположная теоремы).
2. Решение логических задач. Алгебра высказываний часто применяется к решению так называемых «логических» задач или задач на рассуждение. В таких задачах имеется ряд высказываний, относительно которых известно, что несколько из них истинны, а несколько ложны. Причем неизвестно какие именно высказывания истинны, а какие ложны. При решении таких задач составляются высказывание, точно описывающее условие задачи, которое является конъюнкцией дизъюнкций и устанавливаются значения переменных, для которых оно истинно.

Булевы функции.

Каждая формула алгебры высказываний F от n пропозициональных переменных можно рассматривать как функцию от n аргументов, ставящую в соответствие любому набору длины n, составленному из элементов 0 и 1, единственный элемент 0 или 1. Это значение является логическим значением высказывания, в которое превращается данная формула. Здесь уже не важны содержания высказываний. Функция определяется только структурой формулы.

Поэтому можно рассматривать функции, заданные на двухэлементном множестве $\{0,\ 1\}$ и принимающие значения в нем же. Они называются *функциями алгебры логики* или *булевыми функциями*.

Булевой функцией от одного аргумента называется функция f, которая задана на множестве из двух элементов и принимающая значения в том же множестве, т.е. $f:\{0,1\}\to\{0,1\}$. Их 4: тождественный ноль, тождественная, отрицание, тождественная единица.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Булевой функцией от двух аргументов называется функция g, заданная на множестве $\{0,\ 1\}\times\{0,\ 1\}$ и принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0,\ 1\}$. Булева функция от двух переменных сопоставляет любой упорядоченной паре, составленной из элементов 0 и 1 (таких пар – четыре), либо 0, либо 1.

В таблице представлены все возможные булевы функции от двух переменных:

		0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
x	y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Номер функции, записанный в двоичной системе счисления, дает последовательность значений соответствующей функции.

Названия функций:

g0: тождественный ноль, g15: тождественная единица,

g1: конъюнкция, g14: штрих Шеффера,

g7: дизъюнкция, g8: стрелка Пирса (функция Вебба),

g13: импликация, g2: отрицание импликации,

g11: обратная импликация, g4: отрицание обратной импликации,

g9: эквивалентность, g6: сложение по модулю два (сумма Жегалкина),

g3: тождественный x, g12: отрицание x,

g5: тождественный y, g10: отрицание y.

Равенства, которые выражают одни булевы функции через другие:

а) $x \cdot y = (x' \vee y')'$;

б) $x \vee y = (x' \cdot y')'$;

в) $x \vee y = (x \to y) \to y$;

г) $x \vee y = x' \to y$;

д) $x \to y = x' \vee y$;

е) $x \leftrightarrow y = (x \to y) \cdot (y \to x)$;

ж) $x' = x \mid x$;

з) $x \mid y = (x \cdot y)'$;

и) $x \vee y = x' \mid y' = (x \mid x) \mid (y \mid y)$;

к) $x' = x \downarrow x$;

л) $x \downarrow y = (x \vee y)'$;

м) $x \cdot y = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$.

Булевой функцией от n аргументов называется функция f, заданная на множестве $\{0,\ 1\}^n$ и принимающая значение 0 или 1. Булева функция от n переменных ставит в соответствие каждому упорядоченному набору длины n, составленному из элементов 0 и 1, или 0, или 1. Обозначение: $f(x_1,...,x_n)$.

Каждая функция от n переменных может быть построены с помощью суперпозиций (или последовательного применения) более простых функций.

Суперпозицией булевых функций g1, …, gn в булеву функцию $f(x_1,...,x_n)$ называется новая булева функция, получающаяся из функции $f(x_1,...,x_n)$ подстановкой вместо (всех или некоторых) аргументов $x_1,...,x_n$ функций g1, …, gn соответственно $f(g_1,...,g_n)$. Суперпозиция функций будет зависить от того числа новых переменных, которые входят в подставляемые функции.

Если зафиксировать одну переменную в булевой функции, то получим две новые функции от n-1 переменной.

Число булевых функций. Число различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2^n}.

Выражение булевых функций через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание:

$$f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = (x_1 \cdot f(1,\ x_2,\ ...,\ x_n)) \vee (x_1' \cdot f(0,\ x_2,\ ...,\ x_n));$$
$$f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = (x_1 \vee f(0,\ x_2,\ ...,\ x_n)) \cdot (x_1' \vee f(1,\ x_2,\ ...,\ x_n)).$$

Всякая булева функция $f(x_1,...,x_n)$ может быть представлена в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Причем знак отрицания стоит только около переменной и не стоит ни перед одной из внутренних скобок.

Булевы функции и формулы алгебры высказываний. Любой булевой функции можно поставить в соответствие некоторую формулу алгебры высказываний. Для этого необходимо определить взаимно-однозначное соответствие между пропозициональными переменными и булевыми переменными; между логическими операциями и булевыми функциями; между скобками.

Таким образом, каждой формуле алгебры высказываний соответствует единственная определяемая этой формулой булева функция.

Система булевых функций называется *полной*, если всякая булева функция является суперпозицией функций из этой системы.

Следующие системы булевых функций являются полными:

1) $\{\vee, \cdot, '\}$; 2) $\{+, \cdot, '\}$; 3) $\{\vee, '\}$; 4) $\{\cdot, '\}$; 5) $\{\to, '\}$; 6) $\{\,|\,\}$; 7) $\{\downarrow\}$.

Формализованное исчисление высказываний.

Первоначальные понятия, система аксиом, правило вывода. К *первоначальным, неопределяемым понятиям* аксиоматической теории высказываний относятся следующие: $X_1,\dots X_n$ – пропозициональные переменные; $\neg, \to$ – логические связки; (,) – технические знаки. Первоначальным понятием является также понятие *формулы*, которое определяется индуктивным образом:

1) каждая пропозициональная переменная есть формула;

2) если F_1 и F_2 – формулы, то выражения $\neg F_1, F_1 \to F_2$ также являются формулами;

3) никаких других формул нет.

Следующий шаг в построении аксиоматической теории высказываний состоит в выборе системы аксиом. В качестве аксиом выбираются формулы следующих видов:

(A1): $F \to (G \to F)$;

(A2): $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$;

(A3): $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$,

где F, G, H – произвольные формулы. Таким образом, каждое из выражений (Al), (A2), (A3) задает лишь форму аксиомы. Они превращаются в аксиомы, если вместо F, G и H подставить конкретные формулы (в частности, пропозициональные переменные). Следовательно, каждое из этих выражений задает бесконечное множество формул. Все они называются аксиомами. Каждое из выражений (Al), (A2), (A3) называют *схемой аксиом*.

Заключительный шаг, закладывающий основу аксиоматической теории высказываний, состоит в выборе *правил вывода*. Единственным правилом вывода будет служить правило заключения (или отделения, или modus ponens, или сокращенно MP): из формул F и $F \to G$ непосредственно следует формула G.

Так как в аксиомах не участвуют логические связки ∨, ∧, ↔, то их определим следующим образом: $F \wedge G$ означает $\neg(F \to \neg G)$; $F \vee G$ означает $\neg F \to G$, $F \leftrightarrow G$ означает $(F \to G) \wedge (G \to F)$.

Понятие вывода и его свойства. Теперь можно переходить к доказательству теорем.

Доказательством или выводом формулы F из множества формул Γ называется такая конечная последовательность $B_1,...B_s$ формул, каждая формула которой является либо аксиомой, либо формулой из Γ, либо получена из двух предыдущих формул этой последовательности по правилу MP, а последняя формула B_s совпадает с F. Если имеется вывод формулы F из множества Γ, то говорят, что F *выводима* из Γ или что Γ *выводит* F, и пишут Γ $\mapsto$ F. Элементы из Γ называются *гипотезами* или *посылками вывода*. Если же имеется вывод формулы F из пустого множества гипотез, то говорят, что F выводима из аксиом (или что F *доказуема*), а последовательность $B_1,...B_s$ называется *доказательством* этой формулы. Саму F называют теоремой, и пишут |– F.

Если множество Г конечно: Г = $\{F_1,...F_m\}$, то вместо $\{F_1,...F_m\}$|– F будем писать $F_1,...F_m$ |– F.

Совокупность аксиом, правил вывода и всех теорем, выводимых из аксиом, и представляет собой *формализованное исчисление высказываний*.

Свойства выводимости.

а) Если Г|–F и $\Gamma \subseteq \Delta$, то Δ|–F;

б) Г|–F тогда и только тогда, когда в Г существует такое конечное подмножество Δ, что Δ|–F;

в) Если Г|–G для любой формулы G из множества Δ и Δ|–F, то Г|–F.

Теорема (о дедукции). Если $F_1,...F_m$|–G, то $F_1,...F_{m-1} \vdash F_m \to G$. В частности, если F|–G, то |–F→G.

Следствие. $F_1,...F_m$|–G тогда и только тогда, когда $F_1,...F_{m-1} \vdash F_m \to G$.

Следствие. $F_1,...F_m$|–G тогда и только тогда, когда $\vdash F_1 \to (F_2 \to ... \to (F_{m-1} \to (F_m \to G))...)$.

Лемма. Для любых формул F, G, H справедливы следующие выводимости:

а) $F \to G, G \to H$ |– F→H;

б) $F \to (G \to H), G$ |– F→H.

Тогда для любых формул F, G следующие формулы являются теоремами формализованного исчисления высказываний:

а) $\neg\neg F \to F$;
б) $F \to \neg\neg F$;
в) $\neg F \to (F \to G)$;
г) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$;
д) $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$;
е) $F \to (\neg G \to \neg(F \to G))$;
ж) $(F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$.

Кроме теоремы о дедукции существуют и другие правила вывода. Получаемые вторичные правила вывода носят название *производных правил* *вывода*. Их можно разделить на две группы – производные правила введения логических связок, производные правила удаления таких связок.

Примеры решения типовых задач

Пример 1.

Составить таблицу истинности для формулы: $F = (x \vee y) \to (x \wedge \neg y \vee \neg x \to \neg y)$.

Решение.

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x \wedge \neg y$	$x \wedge \neg y \vee \neg x$	$x \wedge \neg y \vee \neg x \to \neg y$	$x \vee y$	F
1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1

Пример 2.

Доказать, что формула $F = ((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$ является тавтологией.

Решение.

1 способ. Составим таблицу истинности для формулы. Если в последнем столбце будут стоять только одни единицы, то формула будет тавтологией.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$(A \to B) \wedge \neg B$	F
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

2 способ. Проведем равносильные преобразования формулы.

$$F = ((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A \cong ((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \to \neg A \cong$$
$$\cong ((\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B)) \to \neg A \cong ((\neg A \wedge \neg B) \vee 0) \to \neg A \cong$$
$$\cong (\neg A \wedge \neg B) \to \neg A \cong \neg(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg A \cong A \vee B \vee \neg A \cong 1 \vee B \cong 1$$

Пример 3.

Используя равносильные преобразования, доказать, что формула $(A \wedge B) \to A$ является тавтологией.

Решение.

$$(A \wedge B) \to A \cong \neg(A \wedge B) \vee A \cong (\neg A \vee \neg B) \vee A \cong$$
$$\cong (\neg A \vee A) \vee \neg B \cong 1 \vee \neg B \cong 1$$

Пример 4.

Составить КНФ для формулы: $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \to \neg B)$.

Решение.

Сначала избавимся от знаков импликации:

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \to \neg B) \cong (\neg A \vee B) \leftrightarrow (\neg(\neg A) \vee \neg B).$$

Теперь избавимся от эквивалентности:

$$(\neg A \vee B) \leftrightarrow (\neg(\neg A) \vee \neg B) \cong$$
$$\cong (\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(\neg A) \vee \neg B)) \wedge (\neg(\neg(\neg A) \vee \neg B) \vee (\neg A \vee B))$$

Доведем знаки отрицания до переменных:

$$(\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(\neg A) \vee \neg B)) \wedge (\neg(\neg(\neg A) \vee \neg B) \vee (\neg A \vee B)) \cong$$
$$\cong ((A \wedge \neg B) \vee (A \vee \neg B)) \wedge ((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \vee B))$$

Применим законы дистрибутивности:

$$((A \wedge \neg B) \vee (A \vee \neg B)) \wedge ((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \vee B)) \cong$$
$$\cong (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$$

В итоге получили КНФ для исходной формулы.

Пример 5.

По КНФ формулы $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$ построить СКНФ.

Решение.

Так как $(A \vee B \vee B) \cong A \vee B$, $(A \vee B) \wedge (A \vee B) \cong (A \vee B)$ и $(A \vee \neg A \vee B \vee C) \cong 1$, то данная формула равносильна формуле: $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$.

В первой скобке отсутствует пропозициональная переменная C. Добавим ее: $A \vee B \cong A \vee B \vee 0 \cong A \vee B \vee (C \wedge \neg C) \cong (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$.

Следовательно, получаем следующую СКНФ:

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C).$$

Пример 6.

По заданной ДНФ формулы $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg B) \vee (A \wedge C \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B)$ построить СДНФ.

Решение.

Так как $(A \wedge C \wedge C) \cong A \wedge C$, $\neg A \wedge B \wedge \neg B \cong 0$, то данная формула равносильна формуле: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$.

В первой скобке отсутствует пропозициональная переменная C. Добавим ее: $A \wedge B \cong A \wedge B \wedge 1 \cong A \wedge B \wedge (C \vee \neg C) \cong (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$.

Во второй скобке отсутствует пропозициональная переменная B. Добавим ее: $A \wedge C \cong A \wedge C \wedge 1 \cong A \wedge C \wedge (B \vee \neg B) \cong (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$.

Следовательно, получаем следующую СКНФ:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C).$$

Пример 7.

По таблице истинности для формулы F составить СКНФ и СДНФ:

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Решение.

Для получения СКНФ выберем те наборы значений переменных A, B и C, на которых формула принимает значение 0. Таких наборов пять. Для каждого из них составим элементарную дизъюнкцию, записывая переменную, если в наборе она принимает значение 0, и ее отрицание, если она принимает значение 1. В итоге будем иметь:

$$\begin{aligned}&(A\vee\neg B\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C)\wedge\\&\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)\end{aligned}.$$

Для получения СДНФ выберем те наборы значений переменных A, B и C, на которых формула принимает значение 1. Таких наборов три. Для каждого из них составим элементарную конъюнкцию, записывая переменную, если в наборе она принимает значение 1, и ее отрицание, если она принимает значение 0. В итоге будем иметь:

$$(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C).$$

Пример 8.

Следующие высказывания могут быть интерпретированы как составные. Указать элементарные высказывания их составляющие, написать формулы данных высказываний и построить истинностные таблицы. Указать, какие из высказываний равносильны.

1-ое высказывание: X неверно сделал расчет или если Y считал задачу правильно, то и Z сделал это без ошибок.

2-ое высказывание: Если X правильно просчитал задачу, то либо Y ошибся, либо Z сделал ее верно.

3-е высказывание: Либо X неверно просчитал задачу, либо Y решил ее верно в том и только в том случае, если Z решил ее верно.

Решение.

Данные сложные высказывания составлены из следующих элементарных:

A: X правильно просчитал задачу,

B: Y правильно просчитал задачу,

C: Z правильно просчитал задачу.

Используя основные логические связки, запишем формулы данных высказываний: $\neg A \vee (B \to C)$, $A \to (\neg B \vee C)$, $\neg A \vee (B \leftrightarrow C)$.

Составим истинностные таблицы данных высказываний:

A	B	C	$\neg A \vee (B \to C)$	$A \to (\neg B \vee C)$	$\neg A \vee (B \leftrightarrow C)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Из таблицы видно, что первое и второе высказывания равносильны.

Пример 9. При составлении расписания на понедельник преподаватели просили, чтобы уроки проходили в следующем порядке:

1) математика первым или третьим уроком;

2) история – первым или вторым;

3) литература – вторым или третьим.

Можно ли удовлетворить просьбы всех трех преподавателей, и каким образом, если это возможно?

Решение:

Введем следующие элементарные высказывания:

A - математика – первым уроком,

B - математика – третьим уроком,

C - история – вторым уроком,

D - история – первым уроком,

E - литература – вторым уроком,

F - литература – третьим уроком.

Просьбы всех преподавателей выражены высказываниями $A \vee B$, $C \vee D$, $E \vee F$.

Высказывание, удовлетворяющее просьбы всех трех преподавателей, является конъюнкцией данных высказываний, т.е. $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (E \vee F)$ и оно должно быть истинным. Применим дистрибутивный закон к полученной формуле. В итоге получим:

$$\begin{gathered}(A \wedge C \wedge E) \vee (B \wedge C \wedge E) \vee (B \wedge D \wedge E) \vee \\ \vee (A \wedge C \wedge F) \vee (B \wedge C \wedge F) \vee (B \wedge D \wedge F)\end{gathered}.$$

В данном случае конъюнкция $A \wedge D=0$, т.к. первым уроком математика и история одновременно быть не могут.

Очевидно, $A \wedge C \wedge E=0$, т.к. $C \wedge E=0$: второй урок не может быть одновременно уроком истории и литературы. Аналогично: $B \wedge C \wedge E=0$, $B \wedge C \wedge F=0$, $B \wedge D \wedge F=0$, т.е. $((B \wedge D \wedge E) \vee (A \wedge C \wedge F) \cong 1$.

Дизъюнкция истинна, если одно из слагаемых истинно: $B \wedge D \wedge E=1$; $A \wedge C \wedge F=1$.

Конъюнкция высказываний истинна, если истинны все входящие в нее сомножители. В результате получаем два возможных варианта ответа:

1) $B \wedge D \wedge E=1$, т.е. история – первым уроком, литература – вторым и математика – третьим.

2) $A \wedge C \wedge F=1$, т.е. математика – первым уроком, история – вторым и литература – третьим.

Пример 10.

Доказать, что $\vdash (\neg A \to A) \to A$.

Решение.

Пусть в (А3) вместо G будет стоять A, и вместо F также A. Тогда

1. $(\neg A \to \neg A) \to ((\neg A \to A) \to A)$.

2. $\neg A \to \neg A$ (по тереме формального исчисления высказываний).

3. $(\neg A \to A) \to A$ (из 1 и 2 По правилу вывода).

Задачи для самостоятельной работы

1. Разбейте на простые высказывания следующий совет Г. Остера:

Если в кухне тараканы
Маршируют по столу,
И устраивают мыши
На полу учебный бой,
Значит, вам пора на время
Прекратить борьбу за мир
И все силы ваши бросить
На борьбу за чистоту.

Обозначьте эти высказывания буквами А, В, … и запишите совет в виде формулы.

2. Запишите отрицания к следующим утверждениям:

а) Сегодня хорошая погода;

б) $\sqrt{\pi^4 + 1} > 10$;

в) Если завтра будет хорошая погода, то я пойду гулять;

г) Африка – остров;

д) Некоторые грибы несъедобные.

3. Установите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие нет (объясните почему):

а) «Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле», «На Земле существует вид животных, неизвестный человеку»;

б) «Существуют иррациональные числа», «Все числа – рациональные»;

в) «Если n делится на 3, то n делится на 9», «Если n не делится на 3, то n не делится на 9».

4. Определите значения истинности следующих высказываний:

а) Санкт-Петербург расположен на Неве и 2 + 3 = 5;

б) 2-2 = 4 или белые медведи живут В Африке;

в) 2-2 = 4, и 2-2<5, и 2-2>4;

г) 2 – рациональное число или 5 – иррациональное число;

д) Фобос и Луна – спутники Марса.

5. Следующие составные высказывания расчлените на простые и запишите символически, введя буквенные обозначения для простых их составляющих:

а) Произведение трех чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю.

б) Если производная функции в точке равна нулю и вторая производная этой функции в той же точке отрицательна, то данная точка есть точка локального максимума функции.

в) Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения.

г) Логарифм некоторого положительного числа будет положительным, если основание логарифма и логарифмируемое число будут больше 1 или если основание логарифма и логарифмируемое число будут заключены между 0 и 1.

д) Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб.

6. Составьте таблицы истинности для следующих формул и укажите, какие из формул являются выполнимыми, какие – тождественно истинными (тавтологиями), какие – тождественно ложными (противоречиями):

а) $(P\to Q)\to((P\to\neg Q)\to\neg P)$; б) $((P\to Q)\to P)\to Q$;

в) $(P\wedge(Q\vee\neg P))\wedge((\neg Q\to P)\vee Q)$; г) $((P\to Q)\to Q)\to Q$;

д) $P\wedge(Q\wedge(\neg P\vee\neg Q))$; е) $((P\wedge\neg Q)\to Q)\to(P\to Q)$.

7. Составив соответствующие таблицы истинности, докажите, что все следующие формулы являются тавтологиями:

а) $P\to(Q\to P)$; б) $(P\to Q)\to((P\to(Q\to R))\to(P\to R))$;

в) $P\to(P\vee Q)$; г) $P\to(Q\to(P\wedge Q))$; д) $(P\wedge Q)\to P$.

8. С помощью равносильных преобразований привести следующие формулы к более простому виду

а) $(P\wedge R)\vee(P\wedge\neg R)\vee(Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$;

б) $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$;

в) $\neg((A\leftrightarrow\neg B)\vee C)\wedge B$;

г) $\neg((A\to B)\wedge A)\wedge(\neg A\vee\neg B)$;

д) $(A\leftrightarrow B)\wedge(A\vee B)$.

9. С помощью равносильных преобразований приведите формулы к виду, содержащему только логические связки $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

а) $((A\to B)\to B)\to B$;

б) $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to(A\wedge B))$;

в) $(A\to C)\to((A\vee B)\to(\neg C\vee B))$;

г) $(A\to(B\leftrightarrow C))\leftrightarrow((A\to B)\leftrightarrow C)$.

10. С помощью равносильных преобразований каждую из следующих формул привести к дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме и к совершенной дизъюнктивной (конъктивной) нормальной форме:

а) $(A\leftrightarrow B)\wedge\neg(C\to D)$;

б) $((A\to B)\to(C\to\neg A))\to(B\to\neg C)$;

в) $(A\to(B\to C))\to((A\to\neg C)\to(A\to\neg B))$;

г) $((A\to B)\vee\neg C)\to(A\vee(A\leftrightarrow C))$;

д) $(A\to B)\to C$.

11. Используя СДН-форму, найти формулу, принимающую значение 1 только на следующих наборах значений переменых

а) F(0, 0) = F(l, 1) = 1;

б) F(l, 0)=1;

в) F(0, 1, 0) = F(l, 0, l) = F(l, 1, 1) = 1.

12. Используя СКН-форму, найти формулу, принимающую значение 0 только на следующих наборах значений переменых

а) F(0, l) = F(l, 1) = 0;

б) F(0, 1) = 0;

в) F(0, 1, l) = F(l, 1, 1) = 0.

13. С помощью таблиц истинности найти СДНФ и СКНФ для следующих формул:

а) $(A \to B) \to C$;

б) $(A \leftrightarrow B) \wedge \neg(C \to D)$;

в) $(A \leftrightarrow B) \to (A \wedge C)$;

г) $((A \to B) \to (C \to \neg A)) \to (B \to \neg C))$.

14. Докажите, что:

а) если $\models F \vee G$ и $\models \neg F \vee H$, то $\models G \vee H$;

б) если $\models F \vee G$, $\models F \to H$, $\models G \to K$, то $\models H \vee K$.

15. Докажите, что справедливы следующие логические следования, руководствуясь определением этого понятия; выясните, будут ли верны обратные следования, т.е. будет ли формула, стоящая слева, логическим следствием формулы справа:

а) $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \models P \to R$;

б) $P \to Q \models (Q \to R) \to (P \to R)$;

в) $(P \wedge Q) \to R \models P \to (Q \to R)$.

16. Расположите формулы так, чтобы из каждой логически следовали все стоящие после нее:

а) $A \vee B,\ \neg(A \to (B \to A)),\ \neg(\neg A \wedge \neg B),\ \neg A \leftrightarrow B,\ \neg A \wedge B$;

б) $A \to B,\ \neg A \wedge \neg B,\ A \to (B \to (A \wedge B)),\ A \vee \neg B,\ A \leftrightarrow B$;

в) $(A \to B) \vee B,\ \neg(A \to B) \wedge \neg(B \to A),\ \neg(A \leftrightarrow B),\ \neg(A \wedge B),\ \neg A \wedge B$;

г) $A \leftrightarrow B,\ \neg(A \vee B),\ \neg(A \to (\neg A \to B),\ \neg A \to (A \to B),\ B \to (A \vee \neg B)$.

17. Упростите систему истинных высказываний:

а) $C \to (A \vee B),\ (B \wedge C) \to A,\ (A \wedge B) \to C$;

б) $A \to (C \vee B),\ B \to (A \vee C),\ (A \wedge B) \to C$;

в) $A \to B,\ A \to (B \vee C),\ B \to C$.

18. Найдите все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями следующих формул (посылок):

а) $A \to B,\ B \vee C,\ (A \wedge B) \leftrightarrow C$; б) $(A \wedge B) \to \neg C,\ B,\ C$;

в) $A \to (B \vee C),\ C \to B$.

19. Найдите все не равносильные между собой и не тождественно ложные формулы алгебры высказываний, зависящие от переменных P и Q, для которых формула является логическим следствием:

а) $A \vee \neg B$; б) $(A \vee B) \to \neg A$;

в) $\neg(A \vee B)$; г) $\neg A \to B$.

20. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции:

а) $f = ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y)(x \vee z)),\ g = x \vee (y \leftrightarrow z)$;

б) $f = (x' \vee y)(y \vee z),\ g = (x \vee y \vee z)(x' \vee y \vee z)(x' \vee y \vee z')$;

в) $f = (x \to y) \to z,\ g = x \to (y \to z)$.

21. В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

22. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденном бульоне. На суде Мартовский Заяц заявил, что бульон украл Болванщик. Соня и Болванщик тоже дали показания, но что они сказали, никто не запомнил, а запись смыло Алисиными слезами. В ходе судебного заседания выяснилось,

что бульон украл лишь один из подсудимых и что только он дал правдивые показания. Так кто украл бульон?

23. Составьте таблицы истинности для следующих формул. Установите, являются ли данные формулы тождественно истинными или тождественно ложными:

а) $A \wedge \neg A$; б) $A \vee \neg A$; в) $\neg(\neg A)$;

г) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$; д) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$;

е) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$; ж) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$;

з) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$; и) $(A \wedge B) \vee (\neg C)$.

24. Придумайте логическую формулу F, таблица истинности которой имеет вид:

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

25. Постройте отрицания к высказываниям:

а) Арбуз – это овощ или фрукт;

б) В кафе не привезли ни печенья, ни конфет;

в) Ни один бегемот не умеет летать;

г) Есть березы, на которых растут бананы;

26. В Трансильвании живут беспартийные (которые всегда говорят правду) и члены одной единственной партии (которые всегда лгут). Кроме того, половина трансильванцев не в своем уме, и считает все истинные утверждения ложными и наоборот. Как с помощью одного вопроса (допускающего ответ "да-нет") выяснить:

а) в своем ли уме ваш собеседник из Трансильвании;

б) является ли он членом партии?

27. Мастер спорта Седов, кандидат в мастера Чернов и перворазрядник

Рыжов встретились в клубе перед тренировкой.

– Обратите внимание, – заметил черноволосый, – один из нас седой, другой – рыжий, третий – черноволосый. Но ни у одного из нас цвет волос не совпадает с фамилией. Забавно, не правда ли?

– Ты прав, – подтвердил мастер спорта.

Какого цвета волосы у кандидата в мастера?

28. В магазине «Женская доля» вывешено четыре рекламных слогана:

а) Все дешевое некрасиво!

б) Все некрасивое дешево!

в) Все красивое недешево!

г) Не все красивое дешево!

Лариса Борисовна заметила, что два лозунга утверждают одно и то же. Какие и почему?

29. Однажды прекрасная царевна сказала: «Хочу, чтобы мой муж был красивый, не был глупым или некрасивым, или чтобы был некрасивым, но не был глупым». Можно ли упростить данное утверждение?

30. Равносильны ли утверждения «кто не с нами, тот против нас» и «кто не против нас, тот с нами»?

31. Как-то раз Александр Сергеевич, Федор Михайлович и Антон Павлович поспорили о результатах скачек, в которых участвовали три лошади: Тоби, граф Нулин и Великан. Александр Сергеевич утверждал, что Тоби первым не придет, а первым придет граф Нулин. Федор Михайлович настаивал на том, что победит, как и в прошлый раз, Тоби, и, что Великану не быть первым. На это Антон Павлович возражал: он считал, что графу Нулину первого места не видать, зато Великан породы орловский рысак. После завершения скачек оказалось, что каждое из двух предположений двоих друзей подтвердилось, а оба предположения третьего из друзей оказались неверны. Какая лошадь выиграла скачки?

32. Егор Иванович каждое лето проводит у бабушки в деревне, в которой каждый человек либо всегда говорит правду (правдец), либо всегда лжет

(лжец). Однажды Егор Иванович встретил пятерых жителей деревни. На его вопрос: «Сколько среди вас правдецов?» первый ответил: «Ни одного!», а двое других ответили: «Один». Что остальные ответили Е.И.?

33. Если будет холодно (А), то Валентина Ильинична наденет каракулевую шубу (В), если пуговица будет пришита (С). Завтра будет холодно, а пуговица не будет пришита. Следует ли отсюда, что Валентина Ильинична не наденет каракулевую шубу?

34. На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается хорошим, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и нехорошим в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется нехорошим.

35. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: "Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ – скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут – если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним. Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

36. Среди следующих формул укажите те, которые являются аксиомами:

а) $(A \to B) \to (C \to (B \to A))$;

б) $(B \to (\neg A \to A)) \to ((B \to \neg A) \to (B \to A))$;

в) $((\neg A \to B) \to (A \to B)) \to (\neg A \to B)$;

г) $(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to ((\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A)$.

37. Укажите недостающую формулу W так, что третья из данных формул получалось из первой и второй формул по правилу вывода MP:

а) $W,\ (\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A),\ (\neg A \to B) \to A$;

б) $B \to A,\ W,\ (B \to \neg A) \to (B \to A)$;

в) $W,\ (B \to (\neg A \to A)) \to ((B \to \neg A) \to (B \to A)),\ (B \to \neg A) \to (B \to A)$;

г) $\neg B \to (A \to \neg B),\ (\neg B \to (A \to \neg B)) \to B,\ W$.

38. Докажите, что следующие формулы являются теоремами формализованного исчисления высказываний, построив последовательность формул, являющихся выводами данных формул из аксиом:

а) $A \to (B \to (C \to A))$;

б) $A \to ((B \to B) \to (C \to A))$;

в) $B \to (A \vee B)$;

г) $(\neg A \to A) \to A$;

д) $\neg A \to ((\neg B \to A) \to B)$.

39. Докажите, что имеют место следующие выводимости, построив соответствующие выводы из гипотез:

а) $F \leftrightarrow G \vdash G \to F$;

б) $\neg G \to \neg F \vdash F \to G$;

в) $\neg F \vdash (\neg G \to F) \to G$;

г) $\neg F,\ \neg G \to F \vdash G$.

40. Н.Н. Константинов сказал участникам своего семинара: «В январе занятия проходят 13, 17, 20, 24, 27 и 31 числа. В один из этих дней вам будет предложена контрольная работа на логическую тему, но в какой именно день, вы накануне знать еще не будете.»

а) Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 31 января.

б) Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 27 января.

в) Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 20 января.

г) Однако 20 января эта контрольная состоялась (кстати говоря, единственную задачу этой контрольной вы сейчас читаете). Ясное дело, накануне ни один участник семинара об этом не знал. Как это совместить с решением предыдущих пунктов задачи?

Тема 2. Логика предикатов

Основные определения и понятия

Определенным на множествах $M1$, $M2$, ..., Mn *n-местным предикатом* называется предложение, содержащее n переменных $x1$, $x2$, ..., xn, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M1$, $M2$, ..., Mn соответственно. Обозначение: $P(x1, x2, ..., xn)$.

Переменные $x1$, $x2$, ..., xn называют *предметными*.

Всякий n-местный предикат $P(x1, x2, ..., xn)$, определенный на множествах $M1$, $M2$, ..., Mn представляет собой функцию n аргументов, заданную на указанных множествах и принимающую значения в множестве всех высказываний. Поэтому предикат является *функцией-высказыванием* от n аргументов, заданную на множествах $M1$, $M2$, ..., Mn и принимающую значение в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$.

Классификация предикатов.

Предикат $P(x1, x2, ..., xn)$, заданный на множествах $M1$, $M2$, ..., Mn, называется:

а) *тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных $x1$, $x2$, ..., xn любых конкретных предметов $a1$, $a2$, ..., an из множеств $M1$, $M2$, ..., Mn соответственно он превращается в истинное высказывание $P(a1, a2, ..., an)$;

б) *тождественно ложным*, если при любой подстановке вместо переменных $x1$, $x2$, ..., xn любых конкретных предметов из множеств $M1$, $M2$, ..., Mn соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) *выполнимым (опровержимым)*, если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов $a1$, $a2$, ..., an из множеств $M1$, $M2$, ..., Mn соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат последний превратится в истинное (ложное) высказывание P(a1, a2, ..., an).

Множеством истинности предиката P(x1, x2, ..., xn), заданного на множествах M1, M2, ..., Mn называется совокупность всех упорядоченных n-систем (a1, a2, ..., an), в которых $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$, таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание. Обозначение P^+. Таким образом, $P^+ = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1\}$.

Множество P^+ истинности n-местного предиката P(x1, x2, ..., xn) представляет собой n-арное отношение между элементами множеств M1, M2, ..., Mn. Если предикат P(x) – одноместный, заданный над множеством M, то его множество истинности P^+ является подмножеством множества M.

Классификация предикатов с использованием множества истинности:

а) тождественно истинным тогда и только тогда, когда

$$P^+ = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$$

б) тождественно ложным тогда и только тогда, когда $P^+ = \varnothing$;

в) выполнимым тогда и только тогда, когда $P^+ \neq \varnothing$;

г) опровержимым тогда и только тогда, когда $P^+ \neq M_1 \times M_2 \times ...$

Равносильность и следование предикатов.

Два n-местных предиката P(x1, x2, ..., xn) и Q(x1, x2, ..., xn), заданных над одними и теми же множествами M1, M2, ..., Mn, называются *равносильными*, если набор элементов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращает первый предикат в истинное высказывание в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание.

Предикаты равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают $P^+ = Q^+$. Обозначение: $P \Leftrightarrow Q$.

Предикат Q, заданный над множествами M1, M2, ..., Mn, называется *следствием* предиката P, заданного над теми же множествами, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений предметных переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание превращается предикат P, т.е. $P^{+} \subseteq Q^{+}$ Обозначение: $P \Rightarrow Q$.

Два предиката, определенные на одних и тех же множествах, равносильны тогда и только тогда, когда каждый из них является следствием другого.

Каждые два тождественно истинных (тождественно ложных) предиката, заданных на одних и тех же множествах, равносильны.

Любой предикат, равносильный тождественно истинному (тождественно ложному) предикату, сам является тождественно истинным (тождественно ложным) предикатом.

Каждый тождественно истинный n-местный предикат является следствием любого другого n-местного предиката, определенного на тех же множествах.

Каждый n-местный предикат является следствием любого тождественно ложного n-местного предиката, определенного на тех же множествах.

Пусть P и Q – два n-местных предиката, определенные на одних и тех же множествах, такие, что $P \Rightarrow Q$. Тогда:

а) если P тождественно истинный (выполнимый), то и Q тождественно истинный (выполнимый);

б) если Q тождественно ложный (опровержимый), то и P тождественно ложный (опровержимый).

Логические операции над предикатами.

1. Отрицание. *Отрицанием n-местного предиката* P(x1, x2, ..., xn), определенного на множествах M1, M2, ..., Mn называется новый n-местный предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый ¬P(x1, x2, ..., xn), (читается: «неверно, что P(x1, x2, ..., xn)»), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных

переменных, при которых исходное высказывание превращается в ложное высказывание.

Множество истинности отрицания совпадает с дополнением множества истинности данного предиката: $(\neg P)^+ = \overline{P^+}$.

Отрицание предиката будет тождественно истинным тогда и только тогда, когда исходный предикат тождественно ложен.

2. Конъюнкция. *Конъюнкцией* n-местного предиката P(x1, x2, ..., xn), определенного на множествах M1, M2, ..., Mn и m-местного предиката Q(y1, y2, ..., ym), определенного на множествах N1 N2, ..., Nm, называется новый (n+ m)-местный предикат, определенный на множествах M1, M2, ..., Mn, N1, N2, ..., Nm, обозначаемый P(x1, x2, ..., xn) $\wedge$ Q(y1, y2 ..., ym), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых оба исходных предиката превращаются в истинные высказывания.

Для n-местных предикатов P(x1, x2, ..., xn) и Q(x1, x2, .., xn), определенных на множествах M1, M2, ..., Mn, множество истинности конъюнкции совпадает с пересечением множеств истинности исходных предикатов: $(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+$.

Конъюнкция двух предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно истинны.

3. Дизъюнкция. *Дизъюнкцией* n-местного предиката P(x1, x2, ..., xn), определенного на множествах M1, M2, ..., Mn и m-местного предиката Q(y1, y2, ..., ym), определенного на множествах N1 N2, ..., Nm, называется новый (n+ m)-местный предикат, определенный на множествах M1, M2, ..., Mn, N1, N2, ..., Nm, обозначаемый P(x1, x2, ..., xn) $\vee$ Q(y1, y2 ..., ym), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых в истинное высказывание превращается по меньшей мере один из исходных предикатов.

Для n-местных предикатов P(x1, x2, ..., xn) и Q(x1, x2, .., xn), определенных на множествах M1, M2, ..., Mn множество истинности дизъюнкции $P(x1, x2, ..., xn) \vee Q(y1, y2 ..., ym)$ совпадает с объединением множеств истинности исходных предикатов: $(P \vee Q)^+ = P^+ \cup Q^+$.

Дизъюнкция двух предикатов есть выполнимый предикат тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из данных предикатов выполним.

Дизъюнкция двух предикатов тождественно ложна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно ложны.

4. Импликация и эквивалентность двух предикатов. *Импликация* $P(x1, x2, ..., xn) \rightarrow Q(y1, y2 ..., ym)$ определяется как такой предикат, что для любых объектов высказывание $P \rightarrow Q$ является импликацией высказываний P и Q. Аналогично определяется эквивалентность двух предикатов.

Кванторные операции над предикатами.

1. Квантор общности.

Операцией *связывания квантором общности* называется правило, по которому каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\forall x)(P(x))$, которое истинно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно истинен, и ложно в противном случае. Высказывание $(\forall x)(P(x))$ называется *универсальным высказыванием* для предиката P(x).

В выражении $(\forall x)(P(x))$ переменная x уже перестает быть переменной в обычном смысле этого слова, т.е. вместо нее невозможно подставлять какие бы то ни было конкретные значения. Считают, что переменная x *связанная*, кажущаяся или немая.

Если одноместный предикат P(x) задан на конечном множестве M={a1, a2, ..., an}, то нетрудно понять, что высказывание $(\forall x)(P(x))$ эквивалентно конъюнкции $P\{a1) \wedge P(a2) \wedge ... \wedge P(an)$. Следовательно, для предикатов, заданных на конечном множестве, операция связывания квантором общности может быть выражена через конъюнкцию.

Для предикатов, заданных на бесконечном множестве, такого сделать нельзя, и в этом случае операция связывания квантором общности является существенно новой.

Операция связывания квантором общности сопоставляет предикату высказывание. Поэтому каждое высказывание для достижения большей общности сейчас и в дальнейшем можно рассматривать как предикат, содержащий 0 предметных переменных, т.е. как нульместный предикат. Применение операции связывания квантором общности к предикатам с любым числом предметных переменных является операцией представления предикатам других предикатов.

Операцией *связывания квантором общности по переменной x1* называется правило, по которому каждому n-местному (n > 2) предикату P(x1, x2 ..., xn), определенному на множествах M1, M2, ..., Mn, ставится в соответствие новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый (∀x1)(P(x1, x2, ..., xn)), который для любых предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращается в высказывание (∀x1)(P(x1, a2, ..., an)), истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат P(x1, a2, ..., an), определенный на множестве M1 тождественно истинен, и ложное в противном случае.

2. Квантор существования.

Операцией связывания *квантором существования* называется правило, по которому каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве M, ставится в соответствие высказывание, обозначаемое (∃x)(P(x)), которое ложно в том и только в том случае, когда P(x) тождественно ложен, и истинно в противном случае.

Если одноместный предикат P(x) задан на конечном множестве M={a1, a2, ..., an}, то высказывание (∃x)(P(x)) эквивалентно (имеет то же логическое значение) дизъюнкции P(a1) v P(a2) v ... v P(an). Для предикатов, заданных на бесконечном множестве, такого сделать нельзя, и в этом случае операция связывания квантором существования является существенно новой.

Операцией связывания *квантором существования по переменной x1* называется правило, по которому каждому n-местному (n > 2) предикату P(x1, x2 ..., xn), определенному на множествах M1, M2, ..., Mn, ставится в соответствие новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый (∃x1)(P(x1, x2, ..., xn)), который для любых предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращается в высказывание (∃x1)(P(x1, a2, ..., an)), ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат P(x1, a2, ..., an), определенный на множестве M1 тождественно ложен, и истинное в противном случае.

3. Численные кванторы.

1) n = 1. Предложение «По меньшей мере один объект обладает свойством P» имеет тот же смысл, что и предложение «Существует объект, обладающий свойством P», т.е. (∃x)(P(x)).

Предложение «Не более чем один объект обладает свойством P» равнозначно по смыслу предложению «Если есть объекты, обладающие свойством P, то они совпадают», т.е.

$$(\forall x)(\forall y)[(P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y].$$

Предложение «Один и только один объект обладает свойством P» равнозначно конъюнкции предыдущих высказываний: $(\exists x)(P(x)) \wedge (\forall x)(\forall y)[(P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y].$

Последняя операция связывания квантором существования и единственности, а само высказывание иногда обозначают так: (∃!x)(P(x)).

2) n = 2. Предложение «По меньшей мере два объекта обладают свойством P» означает то же, что и предложение «Существуют два различных объекта, обладающих свойством P», т.е.

$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y).$$

Предложение «Не более чем два объекта обладают свойством P» равнозначно по смыслу предложению «Каковы бы ни были объекты x, y, z, если все они обладают свойством P, то по меньшей мере два из них совпадают», которое символически записывается так:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall y)[(P(x) \wedge P(y) \wedge P(z)) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z].$$

Предложение «Два и только два объекта обладают свойством Р» совпадает по смыслу с конъюнкцией предыдущих высказываний.

4. Ограниченные кванторы.

Высказывание «Всякий объект, обладающий свойством Р, обладает также и свойством Q» равнозначно по смыслу высказыванию «Всякий объект, если он обладает свойством Р, то он обладает и свойством Q», которое на языке логики предикатов записывается так: $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$.

Сопоставление двум данным одноместным предикатам Р(х) и Q(х) высказывания носит название *операции связывания ограниченным квантором общности*, а само высказывание обозначают: $(\forall P(x))(Q(x))$.

Высказывание «Среди объектов, обладающих свойством Р, существует объект, обладающий также и свойством Q». равнозначно по смыслу высказыванию «Существует объект, обладающий свойством Р и обладающий свойством Q», которое на языке логики предикатов записывается так: $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$.

Сопоставление двум данным одноместным предикатам Р(х) и Q(х) высказывания носит название *операции связывания ограниченным квантором существования*, а само высказывание обозначается $(\exists P(x))(Q(x))$.

Формулы логики предикатов.

Понятие формулы логики предикатов вводится аналогично понятию формулы логики высказываний. Сначала задается алфавит символов, из которых будут составляться формулы:

предметные переменные: x, y, z;

нульместные предикатные переменные: P, Q, R;

n-местные (n >= 1) предикатные переменные: P(, ...,), Q{ , ...,), R(, ...,), с указанием числа свободных мест в них;

символы логических операций:$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

кванторы: $\forall$, $\exists$;

вспомогательные символы: (,) – скобки; , – запятая.

Дадим индуктивное определение формулы логики предикатов:

1) Каждая нульместная предикатная переменная есть формула;

2) если P(, ...,) – n-местная предикатная переменная, то P(x1 ..., xn) есть формула, в которой все предметные переменные x1, ..., xn свободны;

3) если F – формула, то $\neg$F – также формула. Свободные (связанные) предметные переменные в формуле $\neg$F те и только те, которые являются свободными (связанными) в F;

4) если F1 и F2 – формулы и если предметные переменные, входящие одновременно в обе эти формулы, свободны в каждой из них, то выражения (F1 $\wedge$ F2), (F1 $\vee$ F2), (F1 $\rightarrow$ F2), (F1 $\leftrightarrow$ F2) также являются формулами. При этом предметные переменные, свободные (связанные) хотя бы в одной из формул F1, F2, называются свободными (связанными) и в новых формулах;

5) если F – формула и x – предметная переменная, входящая в F свободно, то выражения ($\forall$x)(F) и ($\exists$x)(F) также являются формулами, в которых переменная x связанная, а все остальные предметные переменные, входящие в формулу F свободно или связанно, остаются и в новых формулах соответственно такими же;

6) никаких других формул логики предикатов, кроме получающихся согласно пп. 1 –5, нет.

Формулы, определенные в 1 и 2, называются *элементарными* (или атомарными). Формулы, не являющиеся элементарными, называются *составными*.

В формулах вида (($\forall$x)(F) и ($\exists$x)(F) формула F называется *областью действия квантора* $\forall x$ или $\exists$x; соответственно.

Формулы, в которых нет свободных предметных переменных, называются *замкнутыми*, а формулы, содержащие свободные предметные переменные, – *открытыми*.

Классификация формул логики предикатов.

Если в формулу логики предикатов вместо каждой предикатной переменной подставить конкретный предикат, определенный на некотором выбранном множестве M, то формула превратится в конкретный предикат, заданный над множеством M.

При этом если исходная формула была замкнутой, то полученный конкретный предикат окажется нульместным, т.е. будет высказыванием.

Если же исходная формула была открытой, т.е. содержала свободные вхождения предметных переменных, то в результате подстановки получим предикат, зависящий от некоторых предметных переменных. Если теперь подставить вместо этих предметных переменных конкретные предметы из множества M, то полученный предикат, а, следовательно, и исходная формула превратятся в конкретное высказывание.

Превращение формулы логики предикатов в высказывание описанным выше способом (а также само получаемое высказывание) называется *интерпретацией* этой формулы на множестве M.

Формула логики предикатов называется *выполнимой* (*опровержимой)* на множестве M, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат.

Формула логики предикатов называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*) на множестве M, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Формула логики предикатов называется *общезначимой*, или *тавтологией* (*тождественно ложной* или *противоречием*), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Нахождение тавтологий является одной из важнейших задач логики предикатов, как и алгебры высказываний. Но если в алгебре высказываний имеется общий метод определения, является или нет данная формула тавтологией (это – метод составления таблицы истинности для формулы), то в логике предикатов такого общего метода не существует.

Каждая формула подлежит изучению индивидуальным методом на тождественную истинность. Дело здесь в том, что каждое высказывание имеет только одно из двух логических значений: «истина» или «ложь»», тогда как значение предиката зависит от выбора значений его предметных переменных, который, вообще говоря, можно сделать бесконечным числом способов.

Некоторые тавтологии алгебры предикатов.

1. Всякая формула, получающаяся из тавтологии алгебры высказываний заменой входящих в нее пропозициональных переменных произвольными предикатными переменными, является тавтологией логики предикатов.

2. Законы де Моргана для кванторов:

$$a)\ \neg(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x));$$
$$б)\ \neg(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x)).$$

3. Выражение кванторов одного через другой:

$$a)\ (\forall x)(P(x)) \leftrightarrow \neg(\exists x)(\neg P(x));$$
$$б)\ (\exists x)(P(x)) \leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x)).$$

4. Законы пронесения кванторов через конъюнкцию и дизъюнкцию:

$$a)\ (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x));$$
$$б)\ (\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x));$$
$$в)\ (\forall x)(P(x) \vee Q) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \vee Q;$$
$$г)\ (\exists x)(P(x) \wedge Q) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \wedge Q.$$

5. Законы пронесения кванторов через импликацию:

а) $(\forall x)(P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \to Q)$;
б) $(\exists x)(P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \to Q)$;
в) $(\forall x)(Q \to P(x)) \leftrightarrow (Q \to (\forall x)(P(x)))$;
г) $(\exists x)(Q \to P(x)) \leftrightarrow (Q \to (\exists x)(P(x)))$.

6. Законы удаления квантора общности и введения квантора существования:

а) $(\forall x)(P(x)) \to P(y)$;
: *б*) $P(y) \to (\exists x)(P(x))$.

7. Законы коммутативности для кванторов:

а) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y)) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(P(x, y))$;
б) $(\exists x)(\exists y)(P(x, y)) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(P(x, y))$;
в) $(\exists y)(\forall x)(P(x, y)) \to (\forall x)(\exists y)(P(x, y))$.

8. Если в тавтологиях считать, что предикатные переменные зависят от произвольного конечного числа предметных переменных, то полученные формулы будут также тавтологиями логики предикатов.

Две формулы F и H логики предикатов называются *равносильными* на множестве M, если при любой подстановке в эти формулы вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, определенных на M, формулы превращаются в равносильные предикаты. Обозначение: F≅H.

Формулы F и H равносильны тогда и только тогда, когда формула F↔H является тавтологией.

Переход от одной равносильной формулы к другой называется *равносильным преобразованием* исходной формулы. В процессе равносильных преобразований формул логики предикатов могут использоваться равносильности, известные из алгебры высказываний.

Равносильные преобразования позволяют приводить формулы к тому или иному более удобному виду. Один из таких видов носит название приведенной формы.

Приведенной формой для формулы логики предикатов называется такая равносильная ей формула, в которой из операций алгебры высказываний имеются только операции $\neg$, $\vee$, $\wedge$, причем знаки отрицания относятся лишь к предикатным переменным и к высказываниям.

Предваренной нормальной формой для формулы логики предикатов называется такая ее приведенная форма, в которой все кванторы стоят в ее начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, т.е. это формула вида $(K_1x_1)\ldots(K_mx_m)\ (F(x_1,\ \ldots,\ x_n))$, где K_i, есть один из кванторов $\forall$ или $\exists$, причем формула F не содержит кванторов и является приведенной формулой.

Логическое следование формул логики предикатов.

Понятие логического следования для формул логики предикатов соответствует понятию логического следования для формул алгебры высказываний.

Формула G логики предикатов называется *логическим следствием* формулы F, если при всякой интерпретации, при которой F превращается в тождественно истинный предикат, формула G также превращается в тождественно истинный предикат. Запись: F |= G.

Как и в алгебре высказываний, F |= G $\Leftrightarrow$ |= F$\to$G.

Также две формулы равносильны тогда и только тогда, когда каждая из них является логическим следствием другой.

Примеры решения типовых задач

Пример 1.

Выяснить, равносильны ли предикаты $5x^2-11x+2=0$ и $(x^3-3)(3x^2-7x+2)=0$, если их рассматривать над мужеством действительных чисел, над множеством рациональных чисел, над множеством целых чисел и над множеством натуральных чисел.

Решение.

Найдем действительные корни данных уравнений. Уравнение $5x^2 - 11x + 2 = 0$ имеет корни 2 и 0,5. Уравнение $(x^3 - 3)(3x^2 - 7x + 2) = 0$ имеет корни $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 2 и $\frac{1}{3}$.

Множества действительные корни данных уравнений не равны, поэтому предикаты не равносильны над множеством действительных чисел.

Рациональными корнями первого уравнения являются числа 2 и 0,5; второго – числа 2 и $\frac{1}{3}$. Поэтому предикаты не равносильны над множеством рациональных чисел.

Целыми корнями обоих уравнений является число 2, поэтому над полем целых чисел эти предикаты равносильны.

Натуральными корнями обоих уравнений является число 2, и равносильность над полем натуральных чисел этих предикатов доказана.

Пример 2.

Истина, ложна или выполнима формула $A(f(g(x,y)),y)$ в следующей интерпретации: $M = (-\infty;+\infty)$, $A(x,y)\colon\ x = y$, $g(x,y)\colon\ x + y$; $f(z)\colon\ z$.

Решение.

Запишем предикат $A(f(g(x,y)),y)$ в явной форме и определим, для каких значений переменных он превращается в истинное высказывание.

Так как $g(x,y)\colon\ x + y$; $f(z)\colon\ z$, то $f(g(x,y))\colon\ x + y$. Тогда из условия $A(x,y)\colon\ x = y$, получаем, что $A(f(g(x,y)),y)\colon\ x + y = y$. Решение уравнения являет $x = 0$, y – любое число.

Таким образом, данная формула истинна, если $x = 0$ и y – любое число. Формула будет ложной, если $x \neq 0$. Формула будет выполнимой, например, при $x = 0$ и $y = 2$.

Пример 3.

Предикат $A(x, y)$ задан на множестве $M = \{1, 2, 3\}$ таблицей:

x\y	1	2	3
1	1	1	1
2	0	0	1
3	1	0	1

Определить истинность значений формул при каждом значении свободной переменной: $(\forall x)A(x, y)$, $(\forall y)A(x, y)$, $(\exists x)A(x, y)$, $(\exists y)A(x, y)$.

Решение.

Определим истинность формулы $(\forall x)A(x, y)$. Если $x = 1$, то $A(1, y) = 1$. Если $x = 2$, то $A(2, y)$ может принимать значения 0 или 1. Если $x = 3$, то $A(2, y)$ может принимать значения 0 или 1.Поэтому формула $(\forall x)A(x, y)$ истинна, только при $x = 1$.

Определим истинность формулы $(\forall y)A(x, y)$. Если $y = 1$, то $A(x,1)$ может принимать значения 0 или 1. Если $y = 2$, то $A(x, 2)$ может принимать значения 0 или 1. Если $y = 3$, то $A(x,3) = 1$. Поэтому формула $(\forall y)A(x, y)$ истинна, только при $y = 3$.

Определим истинность формулы $(\exists x)A(x, y)$. Если $x = 1$, то $A(1, y) = 1$. Если $x = 2$, то $A(2, y)$ может принимать значения 0 или 1. Если $x = 3$, то $A(2, y)$ может принимать значения 0 или 1.Поэтому формула $(\exists x)A(x, y)$ истинна, так как при $x = 1$ она превращается в истинное высказывание.

Определим истинность формулы $(\exists y)A(x, y)$. Если $y = 1$, то $A(x,1)$ может принимать значения 0 или 1. Если $y = 2$, то $A(x, 2)$ может принимать значения 0 или 1. Если $y = 3$, то $A(x,3) = 1$. Поэтому формула $(\exists y)A(x, y)$ истинна, так как при $y = 3$ она превращается в истинное высказывание.

Пример 4.

Найдите множества истинности предиката (x – четное число) $\leftrightarrow$ (x не делит 8), заданных над множеством M={1,2,…,19,20}.

Решение.

Данный предикат представляет собой эквивалентность двух предикатов. Поэтому найдем сначала те натуральные числа из М, которые превращают в истинные высказывания одновременно оба эти предиката. Первый предикат превращается в истинное высказывание элементами из множества М1 = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}, второй – элементами из М2 = {3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}. Значит, оба эти предиката превращаются одновременно в истинные высказывания на множестве М+ = М1 $\cap$ М2 = {6, 10, 12, 14, 16, 18, 20}.

Найдем числа из М, которые превращают в ложные высказывания одновременно оба предиката «x – четное число» и «x не делит 8». Первый предикат превращается в ложное высказывание элементами из множества М3 = {1, 3, 5, 7, 9, И, 13, 15, 17, 19}, а второй – элементами из М4 = {1, 2, 4, 8}. Значит, оба эти предиката превращаются одновременно в ложные высказывания на множестве М- = М3 $\cap$ М4 = {1}.

Таким образом, весь данный предикат превращается в истинное высказывание при подстановке вместо x как элементов из М+, так и элементов из М-. Следовательно, множеством истинности данного предиката является объединение этих множеств М+ $\cup$ М- == {6, 10, 12, 14, 16, 18, 20} и {1} = {1, 6, 10, 12, 14, 16, 18, 20}.

Пример 5.

Применяя равносильные преобразования, привести следующую формулу к предваренной нормальной форме: $(\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(R(x))$.

Решение.

Данная формула представляет собой импликацию двух подформул, в каждой из которых имеется квантор по переменной x, т.е. переменная x является связной в каждой подформуле. Поэтому

$$(\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(R(x)) \cong (\forall x)(P(x)) \to (\forall y)(R(y)).$$

Квантор общности по переменной x применяется к посылке импликации, в то время как следствие импликации не имеет свободной переменной x. Тогда он может быть вынесен за знак импликации, но при этом он должен поменяться на квантор (∃x). Получаем

$$(\forall x)(P(x)) \to (\forall y)(R(y)) \cong (\exists x)(P(x) \to (\forall y)(R(y))).$$

В скобках формуле квантор общности по переменной y относится к заключению импликации, в то время как посылка этой импликации не имеет свободной переменной y. Тогда квантор (∀y) может быть без всяких изменений вынесен за знак импликации. Получаем

$$(\exists x)(P(x) \to (\forall y)(R(y))) \cong (\exists x)(\forall y)(P(x) \to R(y)).$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Запишите символически следующие предложения:

а) для всякого числа x существует такое число y, что x+y=5;

б) для любого числа y найдется хотя бы одно число x, что y–x<0;

в) при любом x, не равном нулю, существует y такое, что x/y=2;

г) для любых чисел x и y имеет место равенство x+y=y+x;

д) все рациональные числа действительные;

е) ни одно рациональное число не является действительным.

2. Введем следующие обозначения:

Z(x,t): я вижу предмет x в момент времени t,

P(x,t): я беру предмет x в момент времени t,

Q(t*,t): момент времени t* предшествует моменту t (t*<t).

Напишите, используя эти обозначения, символические выражения для следующих предложений.

1) Я всегда что-то вижу.

2) Иногда я ничего не вижу.

3) Существуют предметы, которые я никогда не вижу.

4) Я вижу каждую вещь в некоторый момент времени.

5) Если я вижу предмет, то я тут же его беру.

6) Если я вижу предмет, то я беру его спустя некоторое время.

7) Перед тем, как я беру предмет, я вижу его.

8) Если я беру предмет, не видя его до этого, то через некоторое время вижу его, но не беру.

9) Не существует предметов, которые я никогда не беру.

3. Пусть переменные в нижеследующих выражениях пробегают множество действительных чисел, а алгебраические знаки имеют свои обычные значения, прочтите эти выражения и определите, истинны ли они:

1) $\forall x \forall y(x+y=y+x)$; 2) $\forall x \exists y(x+y=3)$; 3) $\exists y \forall x(x+y=3)$;

4) $\exists x \exists y(x+y=3)$; 5) $\forall x \forall y(x+y=3)$; 6) $(\forall x \forall y(x+y=3)) \Rightarrow (2=3)$.

4. Выразить область истинности предиката P(x,y) через область истинности предикатов A(x,y) и B(x,y), если

а) $P(x,y) = \neg A(x,y)$; б) $P(x,y)=A(x,y) \vee B(x,y)$;

в) $P(x,y)=A(x,y) \wedge B(x,y)$; г) $P(x,y)=A(x,y) \Rightarrow B(x,y)$.

5. Пусть M – множество действительных чисел, а A(x) обозначает, что x обладает некоторым свойством A. Запишите символически следующие предложения:

1) существует хотя бы одно $x \in M$ такое, что A(x);

2) существует ровно одно $x \in M$ такое, что A(x);

3) существует не более одного $x \in M$ такого, что A(x);

4) существует в точности два $x \in M$ таких, что A(x);

5) существует не менее двух $x \in M$ таких, что A(x);

6) существует не более двух $x \in M$ таких, что A(x).

6. Указать свободные и связанные переменные:

а) $\exists x A(x) \wedge B(x)$; б) $P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$; в) $\exists x \forall y P(x) \wedge Q(y) \Rightarrow \forall x R(x)$;

г) $\exists x \exists y P(x,y) \wedge Q(z)$; д) $\forall z P(z) \wedge \exists x Q(x,z) \Rightarrow \exists y R(z,y) \vee Q(z,x)$.

7. Пусть все приведенные ниже предикаты определены на множестве всех действительных чисел. Изобразить графически области изменения свободных переменных, при которых следующие предикаты принимают значение

истины:

а) y$\geq x^2$; б) ∀x(y<sinx); в) ∃x($x^2 + y^2 \leq 4$); г) ∀y∃y(sinx=1).

8. Рассмотрим двуместный предикат F(x; y) на множестве людей, проверяющий, считает ли человек x человека y своим другом. Что означают следующие высказывания:

а) ∀x∀yF(x,y)⇒F(y,x); б) ∀x∃yF(x,y); в) ∃y∀xF(x,y);

г) ∀x∃yF(y,x); д) ∃y∀xF(y,x); е) ∀y∃xF(x,y).

9. В попытке достичь гармонического равновесия, Александр Сергеевич стал думать, как записать в кванторах следующие утверждения, но таким образом, чтобы отрицание не стояло перед квантором. Помогите Александру Сергеевичу, пожалуйста.

а) Нет людей, которых бы Онегин считал своими друзьями.

б) Нет людей, которые бы считали Онегина своим другом.

в) Нет такого человека, который бы считал своими друзьями всех людей.

г) Нет такого человека, которого бы все считали своим другом.

д) Нет такого человека, который бы не считал ни одного человека своим другом.

10. Предикат M на множестве людей проверяет, является ли его аргумент мужчиной. Предикат P(x; y) проверяет, является ли x родителем y. Переведите следующие высказывания и предикаты с языка кванторов на русский.

а) ∃z P(x,z)∧P(z,y); б) ∀x∃yP(x,y); в) ∀x∃yP(y,x);

г) ∀y∃x∃z P(x,y)∧P(z,y)∧M(x)∧¬M(z);

д) ∃x P(x,z)∧M(x)∧P(x,t)∧z≠t.

11. Запишите следующие предикаты и высказывания на языке кванторов.

а) x и y – единоутробные братья; б) x – дед y по материнской линии.

12. Рассмотрим предикат D(m;n), проверяющий, является ли число m делителем числа n. Что означают следующие высказывания? Какие из них являются истинными?

а) ∀m∃n D(m,n); б) ∃n∀m D(m,n); в) ∀m ∃n D(n,m);

г) ∃n∀m D(n,m); д) ∀n∃m D(m,n); е) ∃m∀n D(n,m).

13. Запишите следующие определения в кванторах.

а) Последовательность чисел $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной сверху, если существует такое число C, что все элементы последовательности меньше C.

б) Последовательность чисел $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной снизу, если существует такое число C, что все элементы последовательности больше C.

в) Последовательность чисел $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной, если существует такое число C, что все элементы последовательности меньше C по модулю.

14. Запишите в кванторах утверждение: «последовательность $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ не является

а) ограниченной сверху; б) ограниченной снизу; в) ограниченной;
г) возрастающей; д) убывающей.

15. Какие из следующих утверждений истинны?

а) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x < y$;

б) Существует число, которое меньше всех других чисел;

в) Если ∀x∃y P(x,y), то ∃y∀x P(x,y);

г) Если ∃y∀x P(x,y), то ∀x∃y P(x,y).

16. Локсодрома считается хорошей, если, во-первых, брахистохрона длиннее морской мили, и, во-вторых, строфоида не самопересекается. Определите без отрицания плохую (не являющуюся хорошей) локсодрому.

17. Постройте отрицание к утверждению «для любого четырехугольника существует вписанная в него окружность» и покажите, что оно истинно.

18. В квадрате 3×3 закрашено 5 клеток. Докажите, что найдется закрашенная клетка, в строке и в столбце которой найдется еще по одной закрашенной клетке.

19. Постройте отрицания к следующим утверждениям:

а) В каждом классе найдется ученик, который решил хотя бы одну задачу из контрольной.

б) Найдется класс, в котором каждый ученик решил хотя бы одну задачу из контрольной.

в) Существует такая задача, что в каждом классе хотя бы один ученик ее решил.

г) Для каждой задачи есть класс, в котором все ученики ее решили.

д) Есть город, в каждом районе которого есть улица, на которой в каждом доме есть однокомнатная квартира.

е) В каждом городе есть магазин, в котором нет хлеба, и никто из продавцов не знает, когда он будет.

20. Попытайтесь формализовать фразу «ученики должны показывать свои тетради учителям», рассматривая множества учеников, тетрадок и учителей. Придумайте несколько вариантов, как это можно сделать.

21. Пусть M={1,2,3} и на этом множестве M заданы предикаты A(x,y) и B(x) таблицами:

A(x,y)

x\y	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	1
3	0	1	0

B(x)

x	B(x)
1	0
2	1
3	0

Определить истинностное значение формул:

а) $\exists x A(x,x)$;

б) $\forall x A(x,x) \Rightarrow \exists x \forall y A(x,y)$;

в) $\exists x \exists y (B(x) \wedge A(x,y))$;

г) $(\exists x B(x)) \wedge \forall x \neg A(y,y)$;

д) $\exists x \forall y (B(y) \Rightarrow A(x,y))$.

22. Выяснить, выполнима ли формула $\forall x \exists y P(x,y,z)$ в интерпретации: $M=(-\infty,\infty)$; $P(x,y,z): x+y< z$. Является ли эта формула истинной для данной интерпретации?

23. Для формулы $\forall x P(x,y) \Rightarrow P(y,y)$. Найдите интерпретацию, в которой эта

формула выполнима.

24. Истинна ли формула $\forall xP(x,y) \Rightarrow P(y,y)$ на произвольной двухэлементной области.

25. Привести к предваренным нормальным формам следующие формулы:

а) $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x,y)) \Rightarrow ((\exists yA(y)) \Rightarrow \exists zB(y,z))$;

б) $\exists xB(x,y) \Rightarrow (A(x) \Rightarrow \neg\, \exists zB(x,z))$;

в) $\forall x(\forall y\exists zC(x,y,z) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow \forall xA(x)$;

г) $\neg\, \exists xA(x) \Rightarrow \forall z\exists y\forall xC(x,y,z)$.

Тема 3. Теория алгоритмов

Основные определения и понятия

Понятие алгоритма стихийно формировалось с древнейших времен. Под *алгоритмом* понимают четкую систему инструкций о выполнении в определенном порядке некоторых действий для решения всех задач какого-то данного класса.

Выявим общие типичные черты и особенности алгоритмов.

Каждый алгоритм предполагает наличие некоторых *начальных*, или *исходных, данных*, а в результате применения приводит к получению определенного *искомого результата*. Применение каждого алгоритма осуществляется путем выполнения дискретной цепочки (последовательности) неких элементарных действий. Эти действия называют *шагами*, а процесс их выполнения называют *алгоритмическим процессом.* Таким образом, отмечается свойство *дискретности алгоритма*.

Существенной чертой алгоритма является его *массовый характер*, т.е. возможность применять его к обширному классу начальных данных, возможность достаточно широко эти начальные данные варьировать.

Непременным условием, которому удовлетворяет алгоритм, является его *детерминированность*, или *определенность*. Это означает, что предписания алгоритма с равным успехом могут быть выполнены любым другим человеком и в любое другое время, причем результат получится тот же самый. Т.е. предписания алгоритма настолько точны и отчетливы, что не допускают никаких двусмысленных толкований и никакого произвола со стороны исполнителя.

Говоря о начальных данных для алгоритма, имеют в виду так называемые *допустимые начальные данные*, т.е. такие начальные данные, которые сформулированы в терминах данного алгоритма.

Среди допустимых начальных данных для алгоритма могут быть такие, к которым он применим, т.е. начиная от которых можно получить искомый результат, а могут быть и такие, к которым данный алгоритм неприменим, т.е. начиная от которых искомого результата получить нельзя. Неприменимость алгоритма к допустимым начальным данным может заключаться либо в том, что алгоритмический процесс никогда не оканчивается (в этом случае говорят, что он бесконечен), либо в том, что его выполнение во время одного из шагов наталкивается на препятствие, заходит в тупик (в этом случае говорят, что он безрезультатно обрывается).

Под *алгоритмом* понимается четкая система инструкций, определяющая дискретный детерминированный процесс, ведущий от варьируемых начальных данных (входов) к искомому результату (выходу), если таковой существует, через конечное число тактов работы алгоритма; если же искомого результата не существует, то вычислительный процесс либо никогда не оканчивается, либо попадает в тупик.

При таком определении алгоритма можно выделить некоторые характерные его черты:

1. Дискретность. Каждая последующая величина получается из значений предыдущих по определенному закону. Все величины получаются последовательно друг за другом.
2. Детерминированность. Между всеми величинами, получаемыми алгоритмом, существует жесткая причинная связь. Последующие значения зависят от предыдущих.
3. Элементарность шагов алгоритма. Закон получения последующей системы величин из предшествующей должен быть простым.
4. Массовость. Начальная система величин выбирается из некоторого множества. начальные условия могут варьироваться в бесконечных пределах.
5. Результативность. Конечный результат всегда должен быть получен.

Сам термин «алгоритм» (или «алгорифм») происходит от имени великого средне-азиатского учёного Мухаммеда аль-Хорезми (787 – ок. 850).

Парадоксы, обнаруженные в основаниях математики в начале XX в., вызвали к жизни различные концепции и течения, призванные эти парадоксы устранить. В 1920-е гг. вплотную встали вопросы о том, что же такое строгая выводимость и эффективное вычисление. Понятие алгоритма само должно было стать объектом математического исследования и поэтому нуждалось в строгом определении. Первые работы по уточнению понятия алгоритма и его изучению, т.е. по теории алгоритмов, были выполнены в 1936–1937 гг. математиками А. Тьюрингом, Э. Постом, Ж.Эрбраном, К.Гёделем, А.А.Марковым, А.Чёрчем. Было выработано несколько определений понятия алгоритма, но впоследствии выяснилось, что все они равносильны между собой, т.е. определяют одно и то же понятие.

На интуитивном уровне под алгоритмом понимается уже найденное решение конкретной задачи. Положение меняется, если возникает алгоритмическая проблема, решение которой не найдено, и требуется установить, имеет ли она решение. В этом случае надо доказать либо существование алгоритма, либо его отсутствие. Первое можно сделать путем фактического описания процесса, решающего задачу. Здесь достаточно интуитивного понятия алгоритма. Доказать не существование алгоритма таким образом не получиться. Для этого нужно точное формальное определение.

В уточнении понятия алгоритма выделяются три направления:

1. Уточнение понятия эффективно вычислимой функции. Этим занимались А. Черч и К. Гедель. В результате был выделен класс частично рекурсивных функций, имеющих строгое математическое определение.

2. Машинная арифметика. Здесь сущность понятия алгоритма раскрывается путем рассмотрения процессов, осуществляемых в вычислительной машине.
3. Направление, связанное с понятием нормальных алгоритмов из работ А. Маркова.

Машины Тьюринга.

Машина Тьюринга есть математическая (воображаемая) машина, а не машина физическая. Она есть такой же математический объект, как функция, производная, интеграл, группа и т.д. И так же как и другие математические понятия, понятие машины Тьюринга отражает объективную реальность, моделирует некие реальные процессы.

Ее удобно представлять в виде автоматически работающего устройства. В каждый дискретный момент времени устройство, находясь в некотором состоянии, обозревает содержимое одной ячейки протягиваемой через устройство ленты и делает шаг, заключающийся в том, что устройство переходит в новое состояние, изменяет (или оставляет без изменения) содержимое обозреваемой ячейки и переходит к обозрению следующей ячейки – справа или слева. Причем шаг осуществляется на основании предписанной команды. Совокупность всех команд представляет собой программу машины Тьюринга.

Повторение элементарных операций, определённых в этой машине, достаточно для проведения любого возможного вычисления. От человека-вычислителя эта машина отличается двумя особенностями:

1. она не ошибается, т.е. она без всяких отклонений выполняет правила, установленные для ее работы;

2. она снабжена потенциально бесконечной памятью. Это значит, что хотя в каждый момент количество накопленной ею информации конечно, для

этого нет никакой верхней грани. В качестве накопителя рассматривается бесконечная лента.

Машина Тьюринга включает:

1. Внешний алфавит $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$, т.е. конечное множество символов. В этом алфавите (в символах этого алфавита) информация вводится в машину. Машина перерабатывает введенную информацию в новую.

2. Внутренний алфавит $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m, R, L, C\}$. Символы $q_0, q_1, ..., q_m$ выражают конечное число состояний машины, причем q_1 – начальное состояние, q_0 – стоп-состояние.

3. Бесконечную в обе стороны ленту, представляющую память машины. Эта память разбита на клетки. В каждую клетку может быть записана только одна буква, a_0 – пустая клетка, она всегда может появиться при движении вправо или влево, если закончится слово исходной информации.

4. Управляющая головка. Она передвигается вдоль ленты и может останавливаться напротив какой-либо клетки и воспринимать записанный там символ исходного слова. В одном такте работы машины управляющая головка может сдвигаться только на одну клетку или оставаться на месте.

Работа машины складывается из тактов, по ходу которых происходит преобразование начальной информации в промежуточную. В качестве начальной информации на ленту можно подать любую конечную систему знаков внешнего алфавита, расставленную произвольным образом по ячейкам. При этом работа машины Тьюринга может заканчиваться так:

– после конечного числа тактов машина останавливается в q_0 состоянии. При этом на ленте оказывается переработанная информация. В этом случае говорят, что машина применима к начальной информации и перерабатывает ее в результирующую информацию;

– машина никогда не останавливается (не переходит в состояние q_0). В этом случае машина не применима к начальной информации;

В каждом такте работы машина Тьюринга действует по единой функциональной схеме, которая имеет вид $a_i q_j \Rightarrow a_l \begin{Bmatrix} R \\ L \\ C \end{Bmatrix} q_s$, где a_i – буква на ленте, обозреваемая управляющей головкой на данном такте, q_j – текущее состояние машины на данном такте.

На каждом такте функциональной схемой вырабатывается команда, состоящая из трех элементов (правая часть формулы):

1. Буква внешнего алфавита a_l, на которую заменяется обозреваемая буква a_i.
2. Адрес внешней памяти и дополнительные действия для выполнения на следующем такте.
3. следующее состояние машины.

Формирование правой части функциональной схемы происходит по командам, совокупность которых образует программу машины Тьюринга. Программа представляется в виде двумерной таблицы, называемой тьюринговой функциональной схемой, в каждой клетке которой записываются отдельные команды.

Состояния	**Символы внешнего алфавита**			
	a_0	a_1	…	a_n
q_1	$a_2 L q_3$	$a_1 R q_2$	…	$a_2 L q_1$
q_2	$a_1 C q_0$	$a_2 C q_1$	…	$a_1 C q_2$
…	…	…	…	…
q_m	$a_1 P q_3$	$a_0 R q_{m-1}$	…	$a_{n-1} R q_1$

Работа машины Тьюринга полностью определяется ее программой. Две машины Тьюринга с общей функциональной схемой идентичны, разные машины имеют разные программы, т.е. различные функциональные схемы.

В качестве символов алфавита могут быть не только буквы, часто используются цифры и другие символы.

Словом в алфавите А или в алфавите Q, или в алфавите А U Q называется любая последовательность букв соответствующего алфавита. Под к-ой *конфигурацией* будем понимать изображение ленты машины с информацией, сложившейся на ней к началу к-то шага (или слово в алфавите А, записанное на ленту к началу к-то шага), с указанием того, какая ячейка обозревается в этот шаг и в каком состоянии находится машина. Имеют смысл лишь конечные конфигурации, т.е. такие, в которых все ячейки ленты, за исключением, быть может, конечного числа, пусты. Конфигурация называется *заключительной*, если состояние, в котором при этом находится машина, заключительное.

Если выбрать какую-либо незаключительную конфигурацию машины Тьюринга в качестве исходной, то работа машины будет состоять в том, чтобы последовательно (шаг за шагом) преобразовывать исходную конфигурацию в соответствии с программой машины до тех пор, пока не будет достигнута заключительная конфигурация.

Будем считать, что непустое слово а в алфавите А\ $\{a_0\}$ воспринимается машиной *в стандартном положении*, если оно записано в последовательных ячейках ленты, все другие ячейки пусты, и машина обозревает крайнюю справа ячейку из тех, в которых записано слово а. Стандартное положение называется *начальным {заключительным)*, если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии q_1 (соответственно в состоянии остановки q_0). Слово а перерабатывается машиной в слово р, если от слова а, воспринимаемого в начальном стандартном положении, машина после выполнения конечного числа команд приходит к слову р, воспринимаемому в положении остановки.

Машина Тьюринга – не что иное, как некоторое правило (алгоритм) для преобразования слов алфавита А$\cup$Q, т. е. конфигураций. Таким образом, для определения машины Тьюринга нужно задать ее внешний и внутренний алфавиты, программу и указать, какие из символов обозначают пустую ячейку и заключительное состояние.

Таким образом, каждая машина Тьюринга с произвольными внешними и внутренними алфавитами и заданной программой перерабатывает s слов, записанных во внешнем алфавите, в результирующее слово, если машина применима к начальной информации, и машина не применима к s словам, если выражение (слово) после ее работы имеет неопределенное значение.

Создание (синтез) машин Тьюринга (т.е. написание соответствующих программ) является задачей значительно более сложной, нежели процесс применения данной машины к данным словам.

Сконструировать машину Тьюринга – значит написать (составить) ее программу. В этом процессе два этапа: сначала создается *алгоритм вычисления значений функции*, а затем он записывается на языке машины Тьюринга (программируется).

Примеры решения типовых задач

Пример 1.

По заданной машине T с внешним алфавитом $A=\{|,\wedge\}$ и слову u найти слово $T(u)$: $u=||||$.

	q_1	q_2
$\vert$	$q_2\wedge П$	$q_2\vert Л$
$\wedge$	$q_0\vert$	$q_1\wedge П$

Решение.

Применим машину Тьюринга к исходному слову. На первом этапе нужно выполнить команду $q_2\wedge П$. Первый символ | преобразуется в $\wedge$, машина поменяет состояние на q_2 и будет обозревать следующую справа ячейку. Получаем следующую конфигурацию: $\wedge q_2|||$.

На втором этапе нужно выполнить команду $q_2|$Л. Второй символ | преобразуется в |, машина поменяет состояние на q_2 и будет обозревать следующую слева ячейку. Получаем следующую конфигурацию: $q_2 \wedge |||$.

На третьем этапе нужно выполнить команду $q_0|$. Первый символ $\wedge$ преобразуется в | и машина завершит работу. Получим $T(u) = ||||$.

Пример 2.

Выяснить, применима ли машина Т с внешним алфавитом $A = \{|, \wedge\}$ к слову u, и в случае применимости найти результат: $u = |||$.

	q_1	q_2
|	$q_1|$П	$q_2|\wedge$Л
$\wedge$	$q_2\wedge$Л	$q_0|$П

Решение.

Применим машину Тьюринга к исходному слову. На первом этапе нужно выполнить команду $q_1|$П. Первый символ остается таким же, машина остается в состоянии на q_1 и будет обозревать следующую справа ячейку. Получаем следующую конфигурацию: $|q_1||$. На последующих этапах работы машины будет проводить действия, аналогичные тем, что проводились на первом этапе. Получаем следующую конфигурацию: $|||q_1$.

Машина Тьюринга будет обозревать пустую ячейку. По заданию машины Тьюринга можем считать, что в любой пустой ячейке стоит символ |. Поэтому машина продолжит работу до бесконечности. Таким образом, на ленте будет записано слово бесконечной длины, состоящее из символов |.

Пример 3.

Пусть $P = babbbc$ слово в алфавите $A = \{a, b, c\}$. Нормальный алгоритм В задан схемой $B = \{ab \to a$. В какое слово перерабатывает данный алгоритм слово Р.

Решение.

Проведем схему преобразования слова $P = babbbc \to babbc \to babc \to bac$. Таким образом, после переработки получим слово bac.

Пример 4.

Построить машину Тьюринга, переводящую унарную запись натурального числа в троичную систему счисления.

Решение.

Идея алгоритма состоит в последовательном уменьшении унарной записи переводимого числа на единицу и увеличении формируемой троичной записи на единицу до тех пор, пока на месте унарной записи переводимого числа ничего не останется. Программа такой машины задается таблицей:

	q_1	q_2	q_3	q_4
$\vert$	$q_1 \vert$П	$q_4 \wedge$ Л		$q_4 \vert$ Л
0	$q_1 0$ П	$q_3 0$	$q_3 0$ Л	$q_1 1$ П
1	$q_1 1$ П	$q_3 1$	$q_3 1$ Л	$q_1 2$ П
2	$q_1 2$ П	$q_3 2$	$q_3 2$ Л	$q_4 0$ Л
$\wedge$	$q_2 \wedge$Л		$q_0 \wedge$П	$q_1 1$ П

Пример 5.

Построить машину Тьюринга, удваивающую натуральные числа, записанные в унарной системе счисления.

Решение.

Запишем программу машины Тьюринга в алфавите $A = \{|, \alpha, \wedge\}$ в виде следующей таблицы:

	q_1	q_2	q_3
$\vert$	$q_1 \alpha$ П	$q_2 \vert$Л	$\vert q_3$ П

α		$q_3 \mid \text{П}$	
$\wedge$	$q_2 \wedge \text{Л}$	$q_0 \wedge \text{П}$	$q_2 \mid \text{Л}$

Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $B = \begin{cases} b \to \bullet\Lambda \\ a \to \bullet\Lambda \\ c \to c \end{cases}$. Как действует данный алгоритм? Применим ли данный алгоритм к любому слову в алфавите А?

2. Пусть задан алфавит $A = \{b, c\}$ и нормальный алгоритм в алфавите А: $B = \begin{cases} b \to \Lambda \\ c \to \Lambda \end{cases}$. Применим ли данный алгоритм к любому слову в алфавите А? Если он применим к некоторому слову Р, то в какое слово он его преобразует?

3. По заданной машине Т с внешним алфавитом $A = \{\mid, \wedge\}$ и слову u найти слово $T(u)$: $u = \mid\mid\mid$, $u = \mid \wedge\wedge \mid$, $u = \mid\mid \wedge\wedge\wedge \mid$.

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$q_2 \wedge \text{П}$	$q_2 \mid$	$q_1 \mid \text{П}$
$\wedge$	$q_2 \mid \text{П}$	$q_3 \mid \text{П}$	$q_0 \mid$

4. Выяснить, применима ли машина Т с внешним алфавитом $A = \{\mid, \wedge\}$ к слову u, и в случае применимости найти результат: $u = \mid\mid \wedge \mid$, $u = \mid \wedge \mid\mid\mid\mid$.

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$q_1 \mid \text{П}$	$q_1 \mid \text{Л}$	$q_2 \mid \text{П}$
$\wedge$	$q_3 \wedge \text{П}$	$q_3 \wedge \text{П}$	$q_0 \wedge$

5. Какую функцию натурального аргумента вычисляет машина, заданная программой:

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$q_3 \mid \text{П}$	$q_2 \mid \text{П}$	$q_2 \mid \text{П}$
$\wedge$	$q_0 \mid$	$q_0 \mid$	$q_1 \wedge \text{Л}$

Упростите эту машину.

6. Какую функцию натурального аргумента вычисляет машина:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
$\vert$	$q_1\vert$П	$q_3 0$ П	$q_3\vert$П	$q_5\vert$ Л	$q_5\vert$ Л
$\wedge$	$q_2\wedge$П	$q_1\wedge$ Л	$q_4\wedge$ Л	$q_4\wedge$Л	$q_0\wedge$ П

7. Построить машину Тьюринга, которая вычисляет остаток от деления заданного конструктивного натурального числа на 5.

8. Построить машину Тьюринга, которая вычисляет модуль разности любых двух натуральных чисел.

9. Пусть A={1,2,3,…,9,0}. Построить машину Тьюринга T0, которая любое число n (в десятичной записи) перерабатывала бы в нуль, т.е. T0(n)=0.

10. Пусть A={1,2,3,…,9,0}. Построить машину Тьюринга T1, которая любое число n (в десятичной записи) перерабатывала бы в число n+1, т.е. T1(n)=n+1.

11. Постройте машину, распознающую четность натурального числа.

12. Постройте машину, вычисляющую остаток от деления на турального числа на m.

Тема 4. Варианты контрольной работы

Вариант 1.

1. Дана формула: $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \vee \neg Y \wedge (Z \vee \neg Y)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СДНФ.

2. Волк, Лиса и Медведь поспорили – кто из них самый хитрый. Каждый из них сделал заявление:

Лиса. Я хитрее медведя.

Медведь. Лиса не самая хитрая.

Волк. Лиса хитрее меня.

Известно, что солгал самый хитрый зверь. Кто он?

3. Пусть $P(x) := x^2 + 2x + 1 \geq 0,\ Q(x) := x^2 + 2x - 3 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ и $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,∧} и слову u=| | | | найти слово T(u):

	q_1	q_2
$\mid$	$q_2 \wedge$ П	$q_2 \mid$ Л
$\wedge$	$q_0 \mid$	$q_1 \wedge$ П

Вариант 2.

1. Дана формула: $(\neg X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СКНФ.

1. Один из пяти братьев испек маме пирог.

Андрей сказал: «Это Витя или Толя».

Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра».

Толя сказал: «Вы оба шутите».

Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой нет».

Юра сказал: «Нет, Дима, ты не прав».

Про троих своих сыновей мама знает, что они никогда не лгут. Кто испек пирог?

3. Пусть $P(x) := x^2 - 2x + 1 \leq 0,\ Q(x) := x^2 - 3x + 2 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ и $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,$\wedge$} и слову u=| | | найти слово T(u):

	q_1	q_2
|	q_1 | П	q_2 $\wedge$ Л
$\wedge$	q_2 $\wedge$ Л	q_0 | П

Вариант 3.

1. Дана формула: $(X \wedge \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Z)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СДНФ.

2. Антон, Борис и Вадим подозреваются в угоне автомобиля. На допросе они показали следующее:

Антон. Борис лжет.

Борис. Вадим лжет.

Вадим. Антон и Борис оба лгут.

Допустим, что виновный лжет, а невиновный говорит правду. Кто из троих виновен в угоне автомобиля?

3. Пусть $P(x) := x^2 + 4x + 4 > 0,\ Q(x) := x^2 + 5x - 6 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ и $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,$\wedge$} и слову u=| | | найти слово T(u):

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$q_2 \mid П$	$q_2 \mid$	$q_1 \mid П$
$\wedge$	$q_2 \mid П$	$q_3 \mid П$	$q_0 \mid$

Вариант 4.

1. Дана формула: $(X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg Z$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СКНФ.

2. Шорти Финелли был найден убитым, полиция арестовала по подозрению в убийстве троих: Бака, Джо и Тилпи. На допросе задержанные дали следующие показания.

Бак: «Я не убивал. Я никогда не видел Джо раньше. Я знаю Шорти».

Джо: «Я не убивал. Бак и Тилпи – мои приятели. Бак никогда никого не убивал».

Тилпи: «Я не убивал. Бак лжет, говоря, что он никогда раньше не видел Джо. Я знаю, кто из двух других подозреваемых – убийца».

Известно, что одно из высказываний каждого из задержанных ложно и один из подозреваемых – убийца. Кто убийца?

3. Пусть $P(x) := x^2 - 4x + 4 \le 0,\ Q(x) := x^2 + x - 6 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \to Q(x))$ и $\exists x(P(x) \to Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,∧} и слову u=| ∧ | | | найти слово T(u):

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$q_1 \mid П$	$q_1 \mid Л$	$q_2 \mid П$
$\wedge$	$q_3 \wedge П$	$q_3 \wedge П$	$q_0 \wedge$

Вариант 5.

1. Дана формула: $(X \vee Y \wedge \neg Z) \wedge (Z \vee X)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;

2) С помощью преобразований упростить формулу;

3) Составить СДНФ.

2. Юлия, Екатерина и Анна, преподают различные предметы в школах А, Б и В. Юлия работает не в А, а Екатерина – не в Б. Та, кто работает в А, преподает не английский язык. Та, кто работает в Б, преподает высшую математику. Екатерина преподает не психологию. Какую дисциплину преподает Анна, и в какой школе?

3. Пусть $P(x) := x^2 - 4x + 4 > 0,\ Q(x) := x^2 + x - 6 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ и $\exists x(P(x) \vee Q(x))$.

4. По заданной машине Т с внешним алфавитом А={|,∧} и слову u=∧ | ∧ | найти слово T(u):

	q_1	q_2	q_3
|	q_2 | П	q_2 |	q_1 | П
∧	q_2 | П	q_3 | П	q_0 |

Вариант 6.

1. Дана формула: $(Z \to X) \to (\neg(Y \vee Z) \to X)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;

2) С помощью преобразований упростить формулу;

3) Составить СКНФ.

2. Внимание Андрея, Дениса и Марата привлек промчавшийся мимо них автомобиль.

- Это английская машина марки «Феррари», – сказал *Андрей*.
- Нет, машина итальянская, марки «Понтака» – возразил *Денис*.
- Это “Сааб”, и сделан не в Англии, - сказал *Марат*.

Оказавшийся рядом знаток автомобилей сказал, что каждый из них прав в одном из двух высказанных предположений.

Какой же марки этот автомобиль и в какой стране изготовлен?

3. Пусть $P(x):=x^2-4x+4\le 0,\ Q(x):=x^2+x-6=0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ и $\exists x(P(x)\vee Q(x))$.

4. По заданной машине Т с внешним алфавитом А={|,$\wedge$} и слову u=| | $\wedge$ | найти слово T(u):

	q_1	q_2	q_3
$\vert$	$q_1 \ \vert$ П	$q_1 \ \vert$ Л	$q_2 \ \vert$ П
$\wedge$	$q_3 \ \wedge$ П	$q_3 \ \wedge$ П	$q_0 \ \wedge$

Вариант 7.

1. Дана формула: $(\neg X\to\neg Y)\to(Y\wedge Z\to X\wedge Z)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СДНФ.

2. Вадим, Сергей и Михаил изучают разные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: «Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский». Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два остальных ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

3. Пусть $P(x):=x^2+2x+1\ge 0,\ Q(x):=x^2+2x-3=0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ и $\exists x(P(x)\vee Q(x))$.

4. По заданной машине Т с внешним алфавитом А={|,$\wedge$} и слову u=$\wedge$ | | $\wedge$ найти слово T(u):

	q_1	q_2
$\vert$	$q_2 \ \wedge$ П	$q_2 \ \vert$ Л
$\wedge$	$q_0 \ \vert$	$q_1 \ \wedge$ П

Вариант 8.

1. Дана формула: $\neg(X \wedge (Y \vee Z)) \to X \wedge Y \vee Z$.

1) Составить таблицу истинности формулы;

2) С помощью преобразований упростить формулу;

3) Составить СКНФ.

2. Виновник ночного дорожно-транспортного происшествия скрылся с места аварии. Первый из опрошенных свидетелей сказал работникам ГИБДД, что это были «Жигули», первая цифра номера машины – единица. Второй свидетель сказал, что машина была марки «Москвич», а номер начинался с семерки. Третий свидетель заявил, что машина была иностранная, номер начинался не с единицы. При дальнейшем расследовании выяснилось, что каждый из свидетелей правильно указал либо только марку машины, либо только первую цифру номера. Какой марки была машина, и с какой цифры начинался номер?

3. Пусть $P(x) := x^2 - 2x + 1 \le 0,\ Q(x) := x^2 - 3x + 2 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \to Q(x))$ и $\exists x(P(x) \to Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,∧} и слову u=∧ | ∧ найти слово T(u):

	q_1	q_2
|	q_1 | П	q_2 ∧ Л
∧	q_2 ∧ Л	q_0 | П

Вариант 9.

1. Дана формула: $\neg(X \wedge Y) \to \neg(Z \vee X)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;

2) С помощью преобразований упростить формулу;

3) Составить СДНФ.

2. Следствием установлено:

1) если *A* виновен, то виновны также и *B*, и *C*;

2) если *C* виновен, то хотя бы один из *A* и *B* не виновен.

Виновен ли *A*?

3. Пусть $P(x) := x^2 + 4x + 4 > 0,\ Q(x) := x^2 + 5x - 6 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ и $\exists x(P(x) \vee Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,∧} и слову u=| ∧ ∧ | найти слово T(u):

	q_1	q_2	q_3
|	q_2 | П	q_2 |	q_1 | П
∧	q_2 | П	q_3 | П	q_0 |

Вариант 10.

1. Дана формула: $X \wedge (Y \vee \neg Z) \wedge (Z \vee Y \vee X)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СКНФ.

2. Алеша, Боря и Гриша нашли в земле сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения:

Алеша: «Это сосуд греческий и изготовлен в V веке.»

Боря: «Это сосуд финикийский и изготовлен он в III веке.»

Гриша: «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке.»

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

3. Пусть $P(x) := x^2 - 4x + 4 \le 0,\ Q(x) := x^2 + x - 6 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ и $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,∧} и слову u=| | | | найти слово T(u):

	q_1	q_2	q_3
|	q | П	q_1 | Л	q_2 | П
∧	q_3 ∧ П	q_3 ∧ П	q_0 ∧

Вариант 11.

1. Дана формула: $X \vee (Y \to (Z \leftrightarrow X \wedge Y))$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СДНФ.

2. Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр. Говорит Мегрэ. Есть новости?

- Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жусьен считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Люка (инспектор) просил передать, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонил …
- Все, спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.

3. Пусть $P(x) := x^2 + 2x + 1 \geq 0,\ Q(x) := x^2 + x = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ и $\exists x(P(x) \vee Q(x))$.

4. По заданной машине Т с внешним алфавитом А={|,∧} и слову u=| | ∧ | найти слово T(u):

	q_1	q_2
|	q_1 | П	q_2 ∧ Л
∧	q_2 ∧ Л	q_0 | П

Вариант 12.

1. Дана формула: $\neg(X \vee Z) \wedge (X \to Y)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СКНФ.

2. Петя, Вася и Маша остались дома одни. Кто-то из них ел варенье. На вопрос мамы, кто это сделал, они сказали:

Петя: «Я не ел. Маша тоже не ела.»

Вася: «Маша действительно не ела. Это сделал Петя»

Маша: «Вася врет. Это он съел.»

Выясните, кто ел варенье, если известно, что двое из них оба раза сказали правду, а третий один раз соврал, а один раз сказал правду.

3. Пусть $P(x) := x^2 - 4x + 4 > 0,\ Q(x) := x^2 + x - 6 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ и $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,∧} и слову u=| | ∧ ∧ | найти слово T(u):

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$q_2 \mid П$	$q_2 \mid$	$q_1 \mid П$
$\wedge$	$q_2 \mid П$	$q_3 \mid П$	$q_0 \mid$

Вариант 13.

1. Дана формула: $(X \leftrightarrow Z) \rightarrow X \wedge \neg Y$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СДНФ.

2. Следствием установлено:

1) если *A* виновен, то виновен и хотя бы один из *B*, *C*;
2) если *C* не виновен, то и *A* не виновен;
3) если *B* виновен, то и *C* виновен.

Виновен ли *C*?

3. Пусть $P(x) := x^2 + 2x + 1 \geq 0,\ Q(x) := x^2 + 2x - 3 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ и $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,∧} и слову u=| ∧ ∧ | найти слово T(u):

	q_1	q_2
$\vert$	$q_2 \wedge П$	$q_2 \vert Л$
$\wedge$	$q_0 \vert$	$q_1 \wedge П$

Вариант 14.

1. Дана формула: $(X \vee Y \wedge \neg Z) \wedge (Z \vee X)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;
3) Составить СКНФ.

2. Иван, Тит и Фома подозреваются в поджоге кооперативной палатки. На допросе они дали следующие показания:

Иван. Поджег Тит.

Тит. Я не поджигал.

Фома. Я не поджигал.

Дополнительное расследование показало, что ровно один из них сказал правду. Кто поджег палатку?

3. Пусть $P(x) := x^2 - 2x + 1 \leq 0,\ Q(x) := x^2 - 3x + 2 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ и $\exists x(P(x) \vee Q(x))$.

4. По заданной машине Т с внешним алфавитом А={|,∧} и слову u=| ∧ | найти слово T(u):

	q_1	q_2
$\vert$	$q_1 \vert П$	$q_2 \wedge Л$
$\wedge$	$q_2 \wedge Л$	$q_0 \vert П$

Вариант 15.

1. Дана формула: $(X \to Y) \to (X \vee Z \to Y \vee Z)$.

1) Составить таблицу истинности формулы;
2) С помощью преобразований упростить формулу;

3) Составить СДНФ.

2. После битвы со Змеем Горынычем три богатыря заявили:

Добрыня Никитич. Змея убил Алёша Попович.

Илья Муромец. Змея убил Добрыня Никитич.

Алёша Попович. Змея убил я.

Кто убил Змея, если только один из богатырей сказал правду?

3. Пусть $P(x) := x^2 + 4x + 4 > 0,\ Q(x) := x^2 + 5x - 6 = 0$. Определите истинность высказываний: $\forall x(P(x) \to Q(x))$ и $\exists x(P(x) \to Q(x))$.

4. По заданной машине T с внешним алфавитом A={|,$\wedge$} и слову u=| $\wedge$ $\wedge$ | найти слово T(u):

	q_1	q_2	q_3
|	q_1 | П	q_1 | Л	q_2 | П
$\wedge$	q_3 $\wedge$ П	q_3 $\wedge$ П	q_0 $\wedge$

Список литературы

1. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 448 с.
2. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – М.: Издательский центр «Акадения», 2007. – 307 с.
3. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. – М.: КомКнига, 2006. – 240 с.
4. Назиев А.Х. Математическая логика: задачник-практикум / А.Х. Назиев, С.А. Моисеев. -–Рязань: Ряз. Гос. Ун-т им. С.А. Есенина, 2011. – 80 с.
5. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. курс лекций. Задачник-практикум и решения. – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 288 с.
6. Шапорев С.Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
7. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – М.: Вузовская книга, 2000. – 280 с.
8. Математическая логика: учебно-методический комплекс (для студентов-заочников, обучающихся по специальности 050202 «Информатика»). – Горно-Алтайск.: РИО ГАГУ, 2010. – 87 с.
9. Лавров И.А. Математическая логика: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 240 с.
10. Новиков, П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 400с.
11. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
12. Романович, В.А. Лекции по математической логике. – Т.: Издательство ТГУ, 2005. – 408 с.

13.Глухов М.М., Шишков А.Б. Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов. – М.: Изд-во «Лань», 2012. – 416 с.

14.Скорубский, В. И. Математическая логика: учебник и практикум для академического бакалавриата / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 211 с.