2. Кропотов А.И. Николай Яковлевич Сонин. – Л.: Наука, 1967. – 135 с.
3. Мордухай-Болтовской Д.Д. Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. Вып. 1. Теория пределов, дифференцирование и интегрирование функций. – Варшава, 1904. – 426 с.
4. Мордухай-Болтовской Д.Д. Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. В 2-х томах. – Спб.: Изд-во К.Л.Риккера, 1914-1915.
5. Коробейник Ю.Ф., Ерусалимский Я.М., Налбандян М.Б., Рожанская Н.Н. Механико-математический факультет Ростовского государственного университета (краткий исторический очерк). – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1995. – 65 с.
6. Налбандян Ю.С. Даты, имена, гипотезы. / Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование. – Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006. – С.11-23.
7. Налбандян М.Б., Налбандян Ю.С. Д.Д.Мордухай-Болтовской (1876-1952) и М.Г.Хапланов (1902-1977) //Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова – Ростов-на-Дону, 2002. – С.11-14
8. Ахиезер Н.И., Ворович И.И., Ефимов Н.В., Захарюта В.П., Левин Б.Я. М.Г.Хапланов. К 70-летию со дня рождения //Успехи матем. наук. – 1973. – Т.28, в. 3. – С.199-204
9. Коробейник Ю.Ф. Долгий путь в науке /Ю.Ф.Коробейник. Избранные труды. Т.1. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. – С.7-36.
10. А.В.Абанину – 60 лет // Владикавказский матем. журнал. – 2015. – Т.17, в.1. – С.78-81.
11. Абанин А.В. С благодарностью о тех, кто помог мне стать математиком и помогает им быть. [Электронный ресурс] / А.В.Абанин // Режим доступа http://www.math.rsu.ru/mexmat/ma/nalb/abanin.doc (дата обращения 29.09.2015)

Сведения об авторах

Налбандян Юлия Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа ЮФУ, электронная почта ysnalbandyan@sfedu.ru, область научных интересов – история математики, абсолютно представляющие системы, пространства ультрадифференцируемых функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

Некрасова И.В.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия.

Аннотация

В настоящей работе выводятся математические модели, определяющие распределение поля давления в пласте вблизи скважины в процессе гидравлического удара. Вывод моделей основан на строгом усреднении точных уравнений, описывающих на микроскопическом уровне совместное движение твердого скелета грунта и вязкой жидкости, заполняющей поры в грунте.

MATHEMATICAL MODELS OF A HYDRAULIC SHOCK

Nekrasova I.V.
Belgorod National Research University, Belgorod, Russia.

В предложенной работе изучается линеаризованная модель совместного движения упругого пористого тела и вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрен упругий пористый скелет, занимающий ограниченную область Q. Поры полностью насыщены вязкой несжимаемой жидкостью.

В скелете имеет место полое включение – цилиндрическое отверстие, заполненное той же самой жидкостью, что и поры – область Ω_0.

Область Q лежит в полупространстве $x_3 < 0$. Ее граница S состоит из двух частей: S^1 лежит в плоскости $x_3 = 0$; $S^2 = S \setminus S^1$ – гладкая поверхность класса C^2, вблизи плоскости $x_3 = 0$ заданная уравнением $\Phi(x_1, x_2) = 0$.

Область Ω является подобластью Q, такой что дополнение Ω в Q есть цилиндр $\overline{\Omega}^0 = \{\mathbf{x} \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le \delta^2 < 1,\ \phi(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$.

В области Ω_T в безразмерных переменных совместное движение твердого скелета и жидкости, заполняющей поры, описывается системой

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^{\varepsilon} = 0, \tag{1}$$

$$\rho^{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathsf{P}, \tag{2}$$

$$\mathsf{P} = \chi^{\varepsilon} \bar{\alpha}_{\mu} \mathsf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}) + (1 - \chi^{\varepsilon}) \bar{\alpha}_{\lambda} \mathsf{D}(x, \mathbf{w}^{\varepsilon}) - p^{\varepsilon} \mathrm{I}. \tag{3}$$

В области Ω_T^0 движение жидкости описывается системой Стокса, состоящей из уравнения неразрывности (1) и уравнения баланса импульса

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathsf{P}^0, \tag{4}$$

$$\mathsf{P}^0 = \bar{\alpha}_{\mu} \mathsf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}) - p^{\varepsilon} \mathrm{I}. \tag{5}$$

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ выполнены условия непрерывности перемещений и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \tag{6}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} P^0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} P(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0), \tag{7}$$

для $(\mathbf{x}^0, t) \in S_T^0 = S^0 \times (0, T)$.

На верхнем торце $S^1 = \{x_3 = 1\} \cap \partial\Omega^0$ цилиндра Ω_0 задано нормальное напряжение

$$\mathsf{P}^0(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{e}_3 = p_0(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_3, \tag{8}$$

где $p_0(\mathbf{x},t)$ есть импульс, определяющий гидроудар.

$$\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t) \in S_T^2 = S^2 \times (0,T). \tag{9}$$

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{10}$$

Математическая модель (1) – (10) содержит естественный малый параметр ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой физической области: $\varepsilon = l / L$.

Модель содержит безразмерные параметры $\bar{\alpha}_{\mu}$ и $\bar{\alpha}_{\lambda}$, зависящие от малого параметра задачи ε.

Целью настоящей работы является нахождение предельных режимов (усредненных уравнений) и соответствующих начальных и краевых условий для предельных значений решений задачи (1) – (10) когда $\varepsilon \to 0$ при условии $\mu_0 = \lambda_0 = 0$ в следующих случаях:

$$\mu_1 = \infty, 0 \le \lambda_1 < \infty; \tag{11}$$

$$\lambda_1 = \infty, 0 \le \mu_1 < \infty. \tag{12}$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\alpha}_{\mu}(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\bar{\alpha}_{\mu}}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\alpha}_{\lambda}(\varepsilon) = \lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\bar{\alpha}_{\lambda}}{\varepsilon^2} = \lambda_1.$$

Доказательство построено на основе метода двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга [1]

Теорема 1. Пусть выполнены условия (11). Тогда для функции w^{ε} существует продолжение w_f^{ε} из области $Q_f^{\varepsilon} \times (0,T)$ в Q_T и существует подпоследовательность $\{\varepsilon_k > 0\}$, такая что последовательности $\{p^{\varepsilon_k}\}$, $\{(1-\chi^{\varepsilon_k})\partial \mathbf{w}^{\varepsilon_k} / \partial t\}$ и $\{\partial \mathbf{w}_f^{\varepsilon_k} / \partial t\}$ сходятся при $\varepsilon_k \to 0$ слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям p, $\partial \mathbf{w}^{(s)} / \partial t$ и $\partial \mathbf{w}_f / \partial t$ соответственно. Предельные функции удовлетворяют в области Q_T системе усредненных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\zeta}{\rho_f}\nabla p + (1-\zeta)(m\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t^2}),$$

закона сохранения импульса

$$(1-\zeta)(m\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2} + \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t^2} + \nabla p) = 0, \tag{13}$$

для жидкой компоненты среды и соотношения

$$
\begin{aligned}
&(1-\zeta)\Big(\frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}-(1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}\Big)= \\
&=-(1-\zeta)\int_0^t \mathsf{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\Big(\nabla p(\mathbf{x},\tau)+\rho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau
\end{aligned} \tag{14}
$$

для твердой компоненты среды при $\lambda_1>0$ или усредненного закона сохранения количества движения твердой компоненты в виде

$$
(1-\varsigma)\left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t^2}-(1-m)\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}\right)=-(1-\varsigma)\mathsf{B}^{(s)}(\infty,0)\cdot\left(\nabla p+\rho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}\right) \tag{15}
$$

в случае $\lambda_1=0$.

Уравнения (12)-(15) дополняются однородными начальными условиями

$$
\mathbf{w}^{(s)}(\mathbf{x},0)=\mathbf{w}_f(\mathbf{x},0)=0 \tag{16}
$$

для перемещений жидкой и твердой компонент, граничными условиями

$$
p(\mathbf{x},t)=-p_0(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{x}\in S^1,\quad t>0, \tag{17}
$$

$$
\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in S^2,\quad t>0 \tag{18}
$$

для скорости $\mathbf{v}$ и давления p.

Матрицы $\mathsf{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t)$ и $\mathsf{B}^{(s)}(\infty,0)$ определены решениями периодических начально-краевых задач на ячейке Y.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (12). Тогда для функций w^ε существует продолжение w_s^ε из области $\Omega_s^\varepsilon\times(0,T)$ в область $Q\times(0,T)$ и существует подпоследовательность $\{\varepsilon_k>0\}$, такая что последовательности $\{p^{\varepsilon_k}\}$, $\{\chi^{\varepsilon_k}\partial\mathbf{w}^{\varepsilon_k}/\partial t\}$ и $\{\partial\mathbf{w}_s^{\varepsilon_k}/\partial t\}$ сходятся при $\varepsilon_k\to 0$ слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям p, $\partial\mathbf{w}^{(f)}/\partial t$, и $\partial\mathbf{w}_s/\partial t$ соответственно. Предельные функции удовлетворяют в области Q_T системе усредненных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности

$$
\nabla\cdot\mathbf{v}=0, \tag{19}
$$

$$
\mathbf{v}=-\frac{\zeta}{\rho_f}\int_0^t\nabla p(\mathbf{x},\tau)d\tau+(1-\zeta)\Big(\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}+(1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}\Big),
$$

закона сохранения импульса

$$
(1-\zeta)\Big(\rho_f\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}+(1-m)\rho_s\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}+\int_0^t\nabla p(\mathbf{x},\tau)d\tau\Big)=0 \tag{20}
$$

для твердой компоненты, соотношения

$$
\begin{aligned}
&(1-\zeta)\Big(\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}-m\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}\Big)= \\
&=(1-\zeta)\left(\int_0^t \mathsf{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)\cdot\Big(\nabla p(\mathbf{x},\tau)+\rho_f\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\right)
\end{aligned} \tag{21}
$$

для жидкой компоненты при $\mu_1 > 0$ или усредненного закона сохранения количества движения жидкой компоненты в виде

$$(1-\varsigma)\left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t^2} - m\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2}\right) = (1-\varsigma)\mathrm{B}^{(f)}(0,\infty)\cdot\left(\nabla p + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2}\right) \qquad (22)$$

в случае $\mu_1 = 0$.

Уравнения (19)–(22) дополняются однородными начальными условиями (16) для перемещений $\mathbf{w}^{(f)}$ и $\mathbf{w}_s$ жидкой и твердой компонент и граничными условиями (17), (18).

Литература

1. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal., 1989, V. 20, Issue 3, 608 - 623.
2. Мейрманов А.М., Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. Мат. Журнал, 2007, т. 48, No. 3, 645 - 667.
3. Burridge R. and Keller J.B., Poroelasticity equations derived from microstructure // Journal of Acoustic Society of America, 1981, V. 70, No. 4, 1140 - 1146.

Сведения об авторах

Некрасова Ирина Викторовна, кандидат физ-мат наук, доцент кафедры общей математики, Белгородский государственный университет, nekrasova_i@bsu.edu.ru, дифференциальные уравнения с частными производными, динамика вязкой жидкости.

ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ РЮКЗАЧНЫХ КРИПТОСИСТЕМ

Осипян В.О.

Кубанский госуниверситет, Краснодар, Россия

Аннотация.

Предлагается метод, расширяющий класс нестандартных рюкзачных криптосистем на основе принципа двойственности. В частности, приводится механизм такого расширения на примере обобщенной аддитивной задачи о рюкзаке. Разработанная система защиты информации существенно отличается от двоичной мультипликативной ранцевой криптосистемы по всем параметрам. Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых обобщённый мультипликативный ранцевый вектор инъективен над Z_p, $p \geq 2$.