ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ « БелГУ »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Кафедра теоретической и математической физики

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ ПЛОТНОСТИ МАГНИТНОГО МОМЕНТА

Диссертация на соискание академической степени магистра

Направление подготовки **03.04.02 Физика**,
программа **«Теоретическая и математическая физика»**

Чурсин Дмитрий Александрович

Научный руководитель
Д.физ.-мат.н., проф. Вирченко Ю.П.

Рецензент
Д.физ.-мат.н., проф. Красильников В.В.

Белгород 2016

Аннотация

Найдены все возможные эволюционные уравнения для псевдовекторного поля $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, имеющие дивергентный тип, ковариантные относительно вращений пространства $\mathbb{R}^3$ и такие, что «генератор» эволюции представляет собой дифференциальный оператор не выше второго порядка. С этой целью, решена задача о перечислении всех возможных алгебраически независимых тензоров второго порядка, которые представляют собой ковариантные относительно вращений мономы тензорной алгебры с одним порождающим элементом – псевдотензором первого ранга M_j, $j = 1, 2, 3$. На основе этих мономов найден общий вид потока плотности поля $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ который содержит пространственные производные не более чем первого порядка. Из полученного класса эволюционных уравнений выделены те из них которые обладают инвариантом $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2 = \mathrm{const}$. В результате, генератор общего эволюционного уравнения состоит из двух слагаемых, из которых одно представляет собой генератор эволюции в известном уравнении Ландау-Лифшица, описывающем эволюцию плотности магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ сферически симметричного магнетика.

Ключевые слова

алгебраическая независимость
дифференциальный оператор
инвариант
линейная независимость
поток поля
плотность магнитного момента
псевдовектор
псевдоскаляр
псевдотензор
символ Леви-Чивита
тензор
тензорная алгебра
уравнение Ландау-Лифшица
эволюционное уравнение

Оглавление

Список обозначений

В работе мы придерживаемся следующих правил при употреблении шрифтов для обозначения математических объектов и операций над ними.

• Для обозначения математических операторов (функционалов), для которых в математике имеются устоявшиеся аббревиатуры на основе букв латинского алфавита, мы употребляем шрифт «roman» – A, B, C, ...; a, b, c, ... Например, Re и Im – реальная и мнимая части комплексного числа. Если таковых устоявшихся аббревиатур не имеется, то мы используем для обозначения математических объектов различные шрифты, в зависимости от природы объекта, перечисленные ниже.

• Для обозначения стандартных математических структур используется ажурный шрифт – $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \ldots$, например, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

• Операторы, отображения, функционалы обозначаются прописными буквами шрифта «sanserif» – $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots$.

• Для обозначения числовых величин (параметров, функций и их аргументов) используются буквы латинского в шрифте «italic» – $a, b, c, \ldots$ и греческого алфавитов. При этом латинские буквы i, j, k, l – обозначают целые числа.

• Для обозначения векторов жирные буквы латинского алфавита. Их компоненты нумеруются индексами i, j, k, l, m. При этом принимается тензорное соглашение о суммировании по повторяющимся парным индексам.

• Для обозначения множеств различных математических объектов используется шрифт «calligraphic» – $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, , \ldots$.

Предметный указатель

δ_{ij} – символ Кронекера

ε_{ijk} – символ Леви-Чивита

$\mathbf{M}$ – псевдовекторное поле плотности магнитного момента

M_j – псевдовекторное поле плотности магнитного момента

$\mathbf{H}$ – вектор внешнего магнитного поля

H_j – вектор внешнего магнитного поля

$\mathbf{x}$ – радиус-вектор пространственной точки в $\mathbb{R}^3$

t – временной параметр

$\mathbf{F}$ – поле термодинамических сил

F_j – поле термодинамических сил

S_{ij} – псевдотензорное поле плотности потока магнитного момента

T_{ijkl} – тензор коэффициентов плотности потока магнитного момента

$\mathbf{n}$ – волновой вектор плоской волны

$\mathbf{A}$ – амплитуда плоской волны

1. Введение

Основополагающей проблемой неравновесной термодинамики является, как известно, формулировка эволюционных уравнений для плотностей интенсивных термодинамических параметров, вполне характеризующих локально состояние пространственно распределенной термодинамической системы в представлении ее в виде сплошной среды. Основным требованием, которое предъявляются к решению такой задачи для каждой фиксированной физической среды, при фиксации полного набора ее локальных физических характеристик, является соблюдение принципа *минимальности*: вывод эволюционных уравнений должен быть основан на довольно общих физических принципах, имеющих универсальных характер для всех физических сред. Именно решению такой задачи применительно к ферромагнитной среде посвящена настоящая работа. При этом мы здесь ограничиваемся только рассмотрением так называемых сферически симметричных ферромагнетиков. Как известно (см., например, [1]), локальное термодинамическое состояние диэлектрической ферромагнитной среды в пренебрежении ее механическими деформациями, изменениями со временем t концентраций возможно имеющихся в ней примесных атомов, а также при пренебрежении в ней магнитоэлектрическими эффектами полностью характеризуется локальной температурой $T(\mathbf{x},t)$ и плотностью магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$ в каждой пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$. Таким образом, изменение со временем локального термодинамического состояния описывается изменением физических полей $T(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$. В настоящей работе мы будем заниматься только изучением возможных эволюционных уравнений для поля $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$.

В рамках классического подхода для описания динамики плотности магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$, как известно [1], используется основное *уравнение ферродинамики* – уравнение Ландау-Лифшица, которое в случае сферически симметричного ферромагнетика записывается в виде [1, 2]

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x},t) = \gamma\Big[\mathbf{M}(\mathbf{x},t), \Delta\mathbf{M}(\mathbf{x},t) + \mathbf{H}(\mathbf{x},t)\Big] .$$

Используя тензорные обозначения это уравнение представим в виде

$$\dot{M}_j(\mathbf{x},t) = \gamma\varepsilon_{jkl}M_k(\mathbf{x},t)\Big[\Delta M_l(\mathbf{x},t) + H_l(\mathbf{x},t)\Big]\,, \quad j = 1,2,3. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{M}(\mathbf{x},t) = \langle M_1(\mathbf{x},t), M_2(\mathbf{x},t), M_3(\mathbf{x},t)\rangle$ – векторное поле плотности магнитного момента, $\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \langle H_1(\mathbf{x},t), H_2(\mathbf{x},t), H_3(\mathbf{x},t)\rangle$ – напряженность внешнего магнитного поля в пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$ в момент времени t, $\gamma = \mathrm{const}$, ε_{jkl} – универсальный антисимметричный псевдотензор третьего ранга. При записи этого уравнения использовано правило тензорной алгебры о суммировании по повторяющимся индексам (см., например, [3]). Кроме того, всюду далее принимается, что, во всех формулах, свободные («говорящие») нижние индексы i, j, k, l, m, n принимают значения $\{1, 2, 3\}$. Тот факт, что описывается динамика именно сферически симметричного ферромагнетика, отражается в том, что уравнение (1) инвариантно относительно пространственных вращений вектора $\mathbf{M}$ при $\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = 0$. Обычно, этот факт в теоретической физике выражают утверждением о том, что в уравнении (3) с $\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = 0$ не используются никакие иные тензорные физические поля, кроме самого поля $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$.

Несмотря на признанную в теории магнетизма адекватность динамического уравнения (1) и его общеупотребительность при решении различных практических задач ферродинамики, оно, как известно, обладает плохим, с физической точки зрения, математическим свойством. Это уравнение бездиссипативно, и поэтому не описывает динамику пространственного распределения магнитного момента в ферромагнитной среде на больших интервалах времени, когда диссипативные процессы начинают играть существенную роль и происходит, вследствие неравновесного распределения плотности магнитного момента в среде, перекачка части энергии взаимодействия между различным образом намагниченных малых пространственных областей среды в тепловую энергию. Возникает вопрос, каким образом нужно изменить уравнение (1) так, чтобы устранить этот дефект [4]. Простой ответ на этот вопрос, в виде добавления в правую часть уравнения (1) слагаемого в виде дифференциального оператора второго порядка с отрицательным символом, которое описывало бы на феноменологическом уровне процессы взаимного «трения магнитных моментов» среды, находящихся в различных пространственных точках среды, невозможен. Это связано с тем, что имеется важное с физическом точки зрения требование, которому должны удовлетворять любые слагаемые, добавляемые в правую часть уравнения. Решения измененное, таким образом, уравнения должны быть такими, чтобы, в течение эволюции системы, сохранялась величина $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2 = \text{const}$. В настоящей работе предлагается подход к решению указанной проблемы на основе сформулированных довольно общих физических принципов, которые представлены в следующем разделе. На этом пути найден общий вид сферически симметричного эволюционного уравнения для поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющего сформулированному условию наличия инварианта $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2$ движения системы, в том случае, когда это уравнение содержит пространственные производные не выше второго порядка. Показано, что в этом случае возможны только обобщенные уравнения, которые дополнительно к слагаемому содержат слагаемое, пропорциональное $([\nabla, \mathbf{M}], \nabla)\mathbf{M}$.

Глава 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Постановка задачи и описание схемы решения

Развитие основ механики и электродинамики сплошных сред, в последние десятилетия, было сосредоточено на проблеме конструирования адекватных эволюционных уравнений для описания динамики сред со сложной структурой. Решение этой проблемы стало очень востребованным в связи с тем, что развитие физики конденсированного состояния, естественным образом, привело к изучению сред, претерпевающих многочисленных фазовые превращения, в результате которых среды изменяли свои качественные свойства. При этом для характеризации локального термодинамического состояния каждой такой среды приходится использовать дополнительные интенсивные термодинамические параметры, которые называются параметрами порядка и которые связаны, как правило, со спонтанным нарушением какой-либо симметрии. Естественным следствием изучения термодинамики сред, характеризуемых, наряду с традиционными интенсивными термодинамическими параметрами такими как плотность, температура, концентрации различных химических компонентов и т.д., различными дополнительными параметрами порядка различной математической природы явилось то, что появилась необходимость построения неравновесной термодинамики таких сред.

На пути решения указанной проблемы возник так называемый гамильтонов подход построения эволюционных уравнений сред со спонтанно нарушенной симметрией (см., например, [5]). С одной стороны такой подход оказался очень плодотворным при решении многих задач из указанного выше круга, а, с другой стороны, оказалось, что он обладает рядом недостатков и, по видимому, его основные положения являются слишком стеснительными при построении таких динамических уравнений, предсказания которых полностью согласовывались бы с экспериментальными данными.

По этой причине в настоящей работе развивается альтернативный подход к решению математической задачи построения эволюционных уравнений для твердотельных сред с нарушенной симметрией. Он основан на простой идеологической схеме, в рамках которой, в частности, получаются уравнения гидродинамики (см. [6]). Эта схема вкратце выглядит следующим образом:

1. Фиксируется список интенсивных термодинамических параметров $\{\xi_p; p = 1 \div N\}$, который однозначно, с физической точки зрения, характеризуется локальное термодинамическое состояние изучаемой среды.

2. При построении эволюционных уравнений неравновесной термодинамики выбранные интенсивные термодинамические параметры рассматриваются как зависящие от времени поля $\{\xi_p(\mathbf{x}, t); p = 1 \div N\}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, заданные в какой-либо области евклидового пространства.

3. Искомые эволюционные уравнения для зафиксированного списка полей строятся в виде

$$\dot{\xi}_p(\mathbf{x}, t) = \mathsf{L}_p[\xi](\mathbf{x}, t)\,. \tag{2}$$

Они являются трансляционно инвариантными, что приводит к отсутствию явной зависимости операторов $\mathsf{L}_p[\xi]$ от пространственной точки.

4. Список полей $\xi_p(\mathbf{x}, t)$, $p = 1 \div N$ допускает разбиение на группы таким образом, что поля каждой группы представляют собой представления группы вращений $\mathbb{O}_3$ евклидового пространства.

5. Совокупность эволюционных уравнений $\dot{\xi}_p(\mathbf{x}, t) = \mathsf{L}_p[\xi]$, $p = 1 \div N$ является ковариантной при преобразованиях вращений группы $\mathbb{O}_3$.

6. Каждое из эволюционных уравнений локально, то есть, вообще говоря, нелинейные операторы $\mathsf{L}_p[\xi]$ являются дифференциальными, которые представимы в виде

$$\mathsf{L}_p[\xi] = \nabla_k \mathsf{S}_{pk}[\xi] + f_p(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{N})\,, \tag{3}$$

где f_p – функции от N переменных и каждый дифференциальный оператор $\mathsf{S}_{pk}[\xi]$, $p = 1 \div N$ представляет вектор с компонентами, нумеруемыми $k = 1, 2, 3$, плотности потока физического поля $\xi_p(\mathbf{x}, t)$ в пространственно временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$.

Перечисленные положения определяют только лишь общую математическую структуру эволюционных уравнений. При построении динамических уравнений, описывающих конкретную физическую ситуацию требуются также еще следующие важные ограничения.

7. Дифференциальные операторы $\mathsf{S}_{pk}[\xi]$ имеют порядок не выше первого. Это требование связано с предполагаемой малостью градиентов физических полей ξ_p, $p = 1 \div N$, что, как правило, допускается в физических теориях.

8. Уравнения (2) имеют дивергентный тип, то есть $f_p \equiv 0$, $p = 1 \div N$.

9. Добавляется список априорных локальных инвариантов движения – функций от полей ξ_p, $p = 1 \div N$, которые сохраняют свои значения на траекториях, определяемых решениями системы уравнений (2). Тогда, на основе этого списка инвариантов, из всего класса эволюционных уравнений, удовлетворяющих условиям 1. - 6., выделяются только те, которые обладают всеми инвариантами из указанного списка.

В настоящей работе мы продемонстрируем эффективность описанной схемы для решения задачи о построении эволюционного уравнения для сферически симметричной магнитоупорядоченной среды в пренебрежении изменениями ее теплового состояния.

1.2. Уравнение Ландау-Лифшица

В настоящей работе мы опишем класс эволюционных уравнений, которые могут, в принципе, претендовать на то, чтобы описывать динамику сферически симметричной ферромагнитной сплошной среды. При решении такой задачи мы будем руководствоваться перечисленными в предыдущем пункте положениями 1-9. Покажем, сначала, что сформулированные нами положения не входят в противоречие с имеющейся в настоящее время теорией ферромагнетизма. А именно, покажем, что искомый класс динамических уравнений должен содержать, как частный случай, уравнение (1) при условии $H_j(\mathbf{x}, t) = 0$. С этой целью, преобразуем следующим образом уравнение (1), которое при указанном условии имеет вид

$$\dot{M}_j(\mathbf{x}, t) = \gamma \varepsilon_{jkl} M_k(\mathbf{x}, t) \Delta M_l(\mathbf{x}, t) \,. \tag{3}$$

Определим поле

$$S_{jk}(\mathbf{x}, t) = \gamma \varepsilon_{jml} M_m(\mathbf{x}, t) \nabla_k M_l(\mathbf{x}, t) \,, \tag{4}$$

Это поле в каждой пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$ с радиус вектором $\mathbf{x}$ составляют псевдотензор второго ранга, ввиду того, что алгебраический объект третьего ранга (см. [7]) – символ Леви-Чивита ε_{jkl} является псевдотензором, а значения поля $M_j(\mathbf{x}, t)$ в каждой пространственно-временной точке представляют псевдовектор. Это означает, что символ Леви-Чивита ε_{jkl} при преобразованиях поворота пространства $\mathbb{R}^3$ преобразуется как тензор (в данном случае, его значения остаются неизменными и равными ± 1), а при преобразовании отражения фиксированной оси пространства $\mathbb{R}^3$, символ Леви-Чивита ε_{jkl} в отличие от тензора изменяет знак. Значения же поля $M_j(\mathbf{x}, t)$, наоборот, в отличие от вектора, при отражениях пространства $\mathbb{R}^3$ остаются неизменными, а при непрерывных поворотах пространства преобразуются как вектор. Наконец, дифференциальный оператор ∇_k преобразуется как вектор при ортогональных преобразованиях пространства $\mathbb{R}^3$.

Заметим, что псевдотензорное поле $S_{jk}(\mathbf{x}, t)$, которое можно назвать плотностью потока магнитного момента, представляет собой тензорное произведение с последующей сверткой по одному из индексов тензора второго ранга $\gamma\varepsilon_{jml}M_m(\mathbf{x},t)$ и псевдотензора $\nabla_k M_l(\mathbf{x},t)$, то есть для этого псевдотензорного поля выполнено условие 7. из списка, представленного в пункте 1.2.

Уравнение (3) представимо в дивергентном виде

$$\dot{M}_j(\mathbf{x},t) = \nabla_k S_{jk}(\mathbf{x},t)\,, \tag{5}$$

так как явное вычисление дивергенции $\nabla_k S_{jk}(\mathbf{x},t)$ дает

$$\nabla_k S_{jk}(\mathbf{x},t) = \gamma\varepsilon_{jml}[\nabla_k M_m(\mathbf{x},t)][\nabla_k M_l(\mathbf{x},t)] + \gamma\varepsilon_{jkl}M_k(\mathbf{x},t)\Delta M_l(\mathbf{x},t)\,,$$

где первое слагаемое тождественно равно нулю, как свертка по индексам m, l антисимметричного псевдотензора ε_{jml} и симметричного тензора $[\nabla_k M_m(\mathbf{x},t)][\nabla_k M_l(\mathbf{x},t)]$. Таким образом, для уравнения (3) выполнено положение 8. Наконец, из явного вида (3), учитывая тензорное тождество $\varepsilon_{jkl}M_l M_k = 0$, непосредственно следует, что $M_l^2(\mathbf{x},t) = M^2$ является инвариантом движения. Положения 1.-6. для уравнения (3) выполняются очевидным образом.

1.3. Математическая постановка задачи и метод ее решения

Согласно описанной в п. 1.1. программе, решение поставленной задачи об описании класса всех динамических уравнений, удовлетворяющих условиям 1-9 можно разбить на два этапа На первом этапе необходимо построить такое общее аналитическое выражение для псевдотензора $S_{jk}(\mathbf{x}, t)$, которое является «локальным» функционалом от $M_j(\mathbf{x}, t)$, то есть зависящим только от значений магнитного момента $M_j(\mathbf{x}, t)$ и значений его пространственных производных в той же точке $\mathbf{x}$. При этом функционал $S_{jk}(\mathbf{x}, t)$ должен удовлетворять, по физическим соображениям, требованию линейности по пространственным производным поля $M_j(\mathbf{x}, t)$. Это означает, что мы ограничиваемся эволюционными уравнениями вида (2) не более второго порядка, что связано с физическим предположением о малости пространственных «градиентов» у изучаемой физической величины. Соображения такого рода обычно используются при построении феноменологических уравнений (см., например, [6]) В результате, решения такой задачи будет описан весь класс эволюционных уравнений вида (5), которые удовлетворяют требованию ковариантности при действии группы вращений $\mathbb{O}_3$, когда обе части каждого из уравнений преобразуются при действии преобразований группы как псевдовекторы.

Далее, после решения задачи об описании общего вида псевдотензора S_{ij}, нужно выделить из него класс только таких функционалов $S_{ij}(\mathbf{x}, t)$, которые удовлетворяют тождеству $M_j \nabla_k S_{jk} = 0$. Наличие этого тождества обеспечит сохранение квадрата магнитного момента в каждой пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$.

Опишем теперь конкретную математическую постановку задач, которые подлежат решению.

Любой локальный функционал $S_{ij}(\mathbf{x}, t)$ от поля $M_j(\mathbf{x}, t)$, как элемент тензорной алгебры, представим в виде линейной комбинации линейно независимых мономов $S^{(a)}_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $a = 1 \div N$ этой алгебры, каждый из которых является псевдотензором в каждой пространственно-временной точке. При этом под мономами мы понимаем алгебраические выражения, составленные из тензоров, выбранных из фиксированного набора – образующих тензорной алгебры, посредством операции тензорного умножения и операции свертки и не при этом не используется операция сложения тензоров.

Далее, так как значения функционалов всех тензорных величин вычисляются в фиксированной пространственно-временной точке, то, если это не вызывает недоразумений, мы будем опускать пространственно временные аргументы.

Каждый из мономов $S^{(a)}_{ij}$, $a = 1 \div N$ конструируется из образующих алгебры на основе операций тензорного произведения и свертки. Множество таких мономов, без дополнительных уточнений, вообще говоря, бесконечно. Поэтому для перечисления всех возникающих возможностей построения тензора указанная алгебраическая постановка задачи нуждается в следующем уточнении. Во-первых, так как мономы, если они содержат производные $\nabla_k M_l$, то они должны быть линейны по значениям этих производных. Поэтому в каждый такой моном оператор дифференцирования входит один раз. При этом важен порядок , в котором расставляются между собой элементы M_j и ∇_k в тензорном произведении. Однако, ввиду справедливости формулы дифференцирования произведения оператором ∇_k,

$$\nabla_k M_{j_1} ... M_{j_s} = \sum_{l=1}^{s} \prod_{m \neq l} M_{j_m} \nabla_k M_{j_l}$$

в разложении псевдотензора S_{ij} по линейно независимым мономам можно считать, что каждый из мономов $S^{(a)}_{ij}$, если он содержит оператор ∇_k, имеет вид $S^{(a)}_{ij} = T^{(a)}_{ijkl} \nabla_k M_l$, где в указанной свертке $\nabla_k M_l$ является псевдотензором и, следовательно, $T^{(a)}_{ijkl}$ должны быть мономами принадлежащими тензорной алгебре, то есть тензорами четвертого ранга. Тогда каждый функционал $T_{ij}(\mathbf{x}, t)$, содержащий оператор ∇_k представим в виде

$$S_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_a f_a T^{(a)}_{ijkl}(\mathbf{x}, t) \nabla_k M_l(\mathbf{x}, t) \,. \tag{6}$$

В этом разложении коэффициенты f_a являются инвариантами относительно группы $\mathbb{O}_3$ и тензоры четвертого ранга $T^{(a)}_{ijkl}(\mathbf{x}, t)$ представляют собой алгебраически независимые в рамках тензорной алгебры мономы от значений поля $M_j(\mathbf{x}, t)$, вычисленные в пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$.

Для ограничения возможностей выбора мономов $T^{(a)}_{ijkl}$ примем следующее соглашение. Мономы $T^{(a)}_{ijkl}$ рассматриваются как эквивалентные, если они отличаются на множитель, возможно зависящий от значения поля M_j, но который является инвариантом преобразований вращения пространства $\mathbb{R}^3$. Это соглашение связано с тем, что в любом эволюционном феноменологическом уравнении для физической величины присутствуют некоторые неизвестные множители, которые являются скалярными функциями от ее значений в той же самой пространственной точке. Поэтому естественно не различать любые два монома, которые отличаются множителем в виде скалярной функции от M_j, и считать их эквивалентными.

Принятое соглашение ограничивает множество $\mathfrak{T}$ возможных линейно независимых мономов $T^{(a)}_{ijkl}$, построенных на основе конечного множества образующих тензорной алгебры, делая его конечным. Обозначим посредством N число его элементов. Выбор образующих определяется требованием, тем, что результирующее выражение для функционала S_{ij} должно быть сферически ковариантным. По этой причине, мономы $T^{(a)}_{ijkl}$ также должны быть сферически ковариантными. Это означает, что они должны быть сконструированы только из псевдовектора M_j с использованием универсальных (неизменные при непрерывных преобразованиях из O_3) тензора δ_{jk} и псевдотензора ε_{jkl} (символ Леви-Чивитта). Это означает, что все мономы $T^{(a)}_{ijkl}$ являются элементами полугруппы с операциями тензорного умножения и свертки, у которой псевдовектор M_j и универсальные тензор δ_{ij} и псевдотензор ε_{ijk} являются ее образующими.

Опишем теперь стратегию решения задачи.

1). Строится множество $\mathfrak{T}$ линейно независимые тензоры $T^{(a)}_{ijkl}$, $a = 1 \div N$ четвертого ранга в тензорной алгебре, порождаемой тензором δ_{ij}, псевдотензором ε_{ijk} и псевдовектором M_i. При этом перестановка любой пары свободных индексов в фиксированном элементе $T^{(a)}_{ijkl}$ приводит к другому ее элементу, если только оба индекса не принадлежат тензору δ, либо псевдотензору ε.

2). После этого, из множества всех псевдотензоров второго ранга $S_{ij} = T^{(a)}_{ijkl}\nabla_k M_l$, $T^{(a)}_{ijkl} \in \mathfrak{T}$, полученных посредством свертки по паре индексов выбираются все линейно независимые выражения. Именно эти выражения, при подстановке их в (6), представляют общую форму потока поля M_j. Обозначим множество всех таких потоков посредством $\mathfrak{S}$. Не ограничивая общности, будем считать, что число элементов в $\mathfrak{S}$ равно N.

3) К каждому псевдотензору $S_{ij} \in \mathfrak{S}$ применяется операция свертки с

вектором ∇_j. При этом оператор ∇_j записывается слева от S_{ij}. В результате, получается совокупность псевдовекторов $F_i = \nabla_j S_{ij}$. Эти поля $F_i(\mathbf{x}, t)$ будем называть «термодинамическими» силами.

Причем подразумевается, что, вследствие того, что множество тензоров, которое получается посредством применения операции свертки к каждому элементу совокупности линейно независимых тензоров может приводить к совокупности линейно зависимых тензоров, в множестве всех возможных термодинамических сил должно быть произведено выделение линейно независимых элементов. Эту линейно независимую совокупность обозначим посредством $\mathfrak{F}$.

На этом первый этап решения задачи – построения множества всех возможных термодинамических сил, управляющих эволюцией псевдовекторного поля $M_i(\mathbf{x})$ завершается.

Далее, решается задача о построении такого эволюционного уравнения для поля $M_i(\mathbf{x}, t)$, которое удовлетворяет специальному ограничению, которое выражается в виде аналитической связи для его компонент. Эта связь представляет собой интеграл движения эволюционного уравнения $M_i(\mathbf{x}, t)M_i(\mathbf{x}, t) = M^2$. Кроме того, мы рассмотрим возможность удовлетворения решениями эволюционного уравнения условию отсутствия источников поля $M_j(\mathbf{x}, t)$, когда связь, которой должны быть подчинены решения имеет вид $(\nabla, \mathbf{M}) \equiv M_i(\mathbf{x})\nabla_i M_i(\mathbf{x}) = 0$. Решение первой задачи состоит в следующем.

4). Устанавливаются те термодинамические силы $F_i(\mathbf{x})$ из совокупности $\mathfrak{F}$, для которых имеет место тождество $M_i(\mathbf{x})F_i(\mathbf{x}) = 0$ с учетом равенства $M_i^2(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$. Так как наличие $M_i^2(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$ может привести к линейной зависимости в выделенной совокупности термодинамических сил, то из нее выделяется, далее, линейно независимый набор. Обозначим этот набор термодинамических сил посредством $\mathfrak{F}_0$.

5). Набор $\mathfrak{C}$ скалярных функций $M_i(\mathbf{x})F_i(\mathbf{x})$, $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_0$ при учете равенства $M_i^2(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$ может появиться линейная зависимость. При реализации такого положения в этом множестве выделяется линейно независимый набор $\mathfrak{C}_0$ так, что функции из $\mathfrak{C}$ выражаются в виде линейных комбинаций функций (с учетом $M_i^2(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$) из набора $\mathfrak{C}_0$. Таким образом, получаются все линейно независимые тождества вида $M_i(\mathbf{x}) \sum_a \alpha^{(a)} F_i^a(\mathbf{x}) = 0$, где суммирование производится по набору $\mathfrak{C}$. Каждому такому тождеству соответствует набор коэффициентов $\{\alpha^{(a)}\}$.

6). На основе наборов коэффициентов $\{\alpha^{(a)}\}$ строится набор $\mathfrak{F}_c$ термодинамических сил $F_j^{(c)} = \sum_a \alpha^a F_i^{(a)}(\mathbf{x})$, наличие которых в эволюционном уравнении $\dot{M}_j = F_j$ также, наряду с силами из набора $\mathfrak{F}_0$ приводит к закону сохранения $M_i^2(\mathbf{x}, t) = \mathrm{const}$.

В результате, получается, что эволюционное уравнение общего вида, гарантирующее наличие у решений $M_j(\mathbf{x}, t)$ интеграла движения $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$\dot{M}_i = \sum_{F \in \mathfrak{F}_0} \alpha F_i + F_i^{(c)} \,. \tag{7}$$

с произвольным набором коэффициентов α в первой сумме и с произвольными силами $F_i^{(c)}$.

Несмотря на кажущуюся громоздкость реализации описанной программы, оказывается, что в применении к рассматриваемой нами задаче ее осуществление сильно упрощается тем обстоятельством, что не приходится прибегать к реализации ее пп. 5,6. В следующей главе мы выделим набор $\mathfrak{F}$, то есть будут реализованы пп. 1-3, а в третьей главе мы установим окончательный общий вид эволюционного уравнения.

Глава 2. ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ПОТОКОВ МАГНИТНОГО МОМЕНТА

2.1. Построение множества линейно независимых тензоров T_{ijkl}

Прежде чем приступить к построению линейно независимых мономов полугруппы, порождаемой операциями тензорного умножения и свертки на основе образующих M_j, δ_{ij}, ε_{ijk} сделаем следующие замечания.

Символ Кронекера δ не должен использоваться в операции свертки, так как, после такой операции по одному из индексов, он исчезает из конструируемого монома. По этой причине, множество всех тензоров T_{ijkl} четвертого ранга распадается на три класса: $\mathcal{K}_0$ состоит из мономов T_{jkkl}, в составе которых символ Кронекера δ отсутствует, $\mathcal{K}_1$ состоит из тензоров, имеющих вид тензорного произведения символа Кронекера на тензор второго ранга T, в состав которого этот символ не входит и класс $\mathcal{K}_2$, который состоит из тензоров четвертого ранга, которые представляются тензорным произведением двух символов Кронекера.

Второе замечание заключается в том, что символ Леви-Чивита ε при конструировании линейно независимых мономов не может быть использован в составе монома T_{ijkl} более одного раза и как сомножитель в тензорном произведении и как сомножитель в составе свертки. Это связано с тем, что для тензорного произведения символов ε справедлива формула (см., например, [4])

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} ,$$

которая сводит их к линейным комбинациям из символов δ. Следовательно, множество всех искомых мономов разбивается на два класса: $\mathcal{L}_0$ состоит из мономов, при построении которых отсутствует символ ε и мономов класса $\mathcal{L}_1$, которые содержат в своем составе символ ε.

Третье замечание касается того, что степень вхождения образующей M_j в состав мономов класса $\mathcal{L}_0$ должна быть четной, а в состав мономов класса $\mathcal{L}_1$ – нечетной, так как M_j является псевдовектором, а ε_{klm} – псевдотензором и только при четности суммарной степени их вхождения результирующий моном T_{ijkl} тензором.

Наконец, укажем, что имеется только один линейно независимый скаляр $M_j M_j$ в рассматриваемой нами полугруппе, псевдоскаляры отсутствуют.

Прежде чем строить линейно независимые тензоры T_{ijkl} сделаем еще одно замечание. При описании программы решения задачи в разделе 1.3. мы совсем не уделили внимания для рассмотрения возможных типов плотностей потоков S_{ij}, которые не содержат пространственных производных от M_j. Это связано с тем, что имеется только два линейно независимых элемента, с точностью до принятого нами понятия эквивалентности, которые являются результатами тензорного умножения и свертки из образующих M_j и ε_{ijk}, а именно, $M_i M_j$ и $\varepsilon_{ijk} M_k$. Но эти элементы тензорной алгебры являются тензорами, а не псевдотензорами. Поэтому они не подходят для решения поставленной задачи о построении линейно независимых плотностей потоков S_{ij}.

Перейдем к непосредственному построению линейно независимых тензоров T_{ijkl}.

Мономы класса $\mathcal{K}_2$. Все тензоры этого класса принадлежат классу $\mathcal{L}_0$ как как при тензорном умножении двух символов Кронекера уже не остается индексов для того, чтобы еще имелся сомножитель ε. При этом также нет возможности умножения на псевдовектор M_j. Поэтому имеется 3 линейно независимых тензора этого класса:

$$\delta_{ij}\delta_{kl}\,, \quad \delta_{ik}\delta_{jl}\,, \quad \delta_{il}\delta_{jk}\,. \tag{8}$$

Мономы класса $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_0$. Имеется 6 следующих тензоров этого класса, в зависимости от того, какая пара из четырех индексов $\{i, j, k, l\}$ связывается с символом δ, остальные два индекса связываются с парой множителей MM:

$$\delta_{ij} M_k M_l\,, \quad \delta_{ik} M_j M_l\,, \quad \delta_{il} M_k M_j\,, \quad \delta_{jk} M_i M_l\,, \quad \delta_{jl} M_i M_k\,, \quad \delta_{kl} M_i M_j\,. \tag{9}$$

Мономы класса $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_1$. Так как имеется только два линейно независимых тензора второго ранга, построенных на основе образующих M_j и ε_{ijk}, а именно, $M_i M_j$ и $\varepsilon_{ijk} M_k$, то, по причине, указанной в предыдущем пункте, имеется 6 линейно независимых тензоров этого класса:

$$\delta_{ij}\varepsilon_{klm}M_m\,, \quad \delta_{ik}\varepsilon_{jlm}M_m\,, \quad \delta_{il}\varepsilon_{jkm}M_m\,,$$
$$\delta_{jk}\varepsilon_{ilm}M_m\,, \quad \delta_{jl}\varepsilon_{ikm}M_m\,, \quad \delta_{kl}\varepsilon_{ijm}M_m\,. \tag{10}$$

Мономы класса $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{L}_0$. Так как при построении тензоров четвертого ранга этого класса нельзя использовать ни символ δ, ни символ ε, то все четыре индекса $\{i, j, k, l\}$ должны быть присвоены образующей M. Следовательно, такие тензоры имеют вид $MMMM$, и поэтому в классе имеется только один моном: $M_i M_j M_k M_l$.

Мономы класса $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{L}_1$. Мономы этого класса распадаются на две группы. В одной из них все индексы у символа ε являются свободными, и поэтому имеется только один индекс, который присваивается псевдовектору $\mathbf{M}$. Тогда в этой группе имеется следующие 4 монома, согласно тому, что имеется только 4 возможности выбрать тот индекс, который присваивается псевдовектору:

$$M_i\varepsilon_{jkl}\,, \quad M_j\varepsilon_{ikl}\,, \quad M_k\varepsilon_{ijl}\,, \quad M_l\varepsilon_{ijk}\,. \tag{11}$$

Ко второй группе отнесем те тензоры, у которых по одному из индексов у символа ε в тензорном произведении производится свертка, обязательно с псевдовектором M_j. (По двум индексам символа ε не может быть сворачивания, так как $\varepsilon_{ijk} M_j m_k \equiv 0$, а другой образующей кроме M не имеется.) Имеется 6 линейно независимых тензоров такого типа, согласно тому что имеется 6 возможностей выбора двух индексов из четырех $\{i, j, k, l\}$ тех, которые должны быть присвоены символу ε:

$$M_i M_j\varepsilon_{klm}M_m\,, \quad M_i M_k\varepsilon_{jlm}M_m\,, \quad M_i M_l\varepsilon_{jkm}M_m\,,$$
$$M_j M_k\varepsilon_{ilm}M_m\,, \quad M_j M_l\varepsilon_{ikm}M_m\,, \quad M_k M_l\varepsilon_{ijm}M_m\,. \tag{12}$$

Сформулируем в виде отдельного утверждения результаты проведенного анализа.

Теорема. *Имеется 26 линейно независимых, с точностью до эквивалентности, тензоров T_{ijkl} четвертого ранга в тензорной алгебре с образующими: M, ε, δ. Множество $\mathfrak{T}$ этих тензоров представлено списками* (8)-(12).

2.2. Построение множества линейно независимых плотностей потоков S_{ij}

В этом разделе мы реализуем пп. 2 и 3 программы решения задачи, описанной в главе 1.

Из тензоров класса $\mathcal{K}_2$, сверткой с тензором $\nabla_k M_l$, получаются плотности потоков $S_{ij}^{(a)}, a = 1, 2, 3$ следующего вида (см. (8)):

$$\delta_{ij}(\nabla, \mathbf{M}), \quad \nabla_i M_j, \quad \nabla_j M_i. \tag{13}$$

Аналогично, из тензоров класса $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_0$ получаются плотности потоков $S_{ij}^{(a)}, a = 4 \div 9$ следующего вида (см. (9)):

$$\delta_{ij}(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2, \quad M_j \nabla_i \mathbf{M}^2, \quad M_j(\mathbf{M}, \nabla)M_i,$$
$$M_i \nabla_j \mathbf{M}^2, \quad M_i(\mathbf{M}, \nabla)M_j, \quad M_i M_j(\nabla, \mathbf{M}), \tag{14}$$

где здесь и далее номера для выражений псевдотензорных полей $S_{ij}^{(a)}$ даются в порядке их представления в приведенном списке.

Из тензоров класса $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_1$ получаются плотности потоков $S_{ij}^{(a)}, a = 10 \div 15$ следующего вида (см. (10)):

$$\delta_{ij}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]), \quad \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_i M_l, \quad [\mathbf{M}, \nabla]_j M_i,$$
$$\varepsilon_{ikl} M_k \nabla_j M_l, \quad [\mathbf{M}, \nabla]_i M_j, \quad \varepsilon_{ijm} M_m (\nabla, \mathbf{M}). \tag{15}$$

Из тензора класса $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{L}_0$ получаем одну плотность потока $S_{ij}^{(16)} = M_i M_j (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2$.

Из тензоров класса $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{L}_1$ имеем следующие плотности потоков $S_{ij}^{(a)}, a = 17 \div 26$ соответственно из первой и второй групп выражений для тензоров T_{ijkl} (см. (11), (12)):

$$M_i[\nabla, \mathbf{M}]_j, \quad M_j[\nabla, \mathbf{M}]_i, \quad \varepsilon_{ijl}(\mathbf{M}, \nabla)M_l, \quad \varepsilon_{ijk}\nabla_k \mathbf{M}^2. \tag{16}$$

$$M_i M_j(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]), \quad M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_j, \quad M_i[\mathbf{M}, \nabla]_j \mathbf{M}^2,$$

$$M_j[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_i\,,\quad M_j[\mathbf{M},\nabla]_i\mathbf{M}^2\,,\quad \varepsilon_{ijm}M_m(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}^2\,. \tag{17}$$

Покажем, что все перечисленные псевдотензорные поля $S_{ij}^{(a)}(\mathbf{x})$ линейно независимы. Нужно показать, что тождественное равенство

$$\sum_{a=1}^{26} c_a S_{ij}^{(a)} = 0 \tag{18}$$

при любых значениях индексов $i,j=1,2,3$ и для любой пространственной точки с радиус-вектором $\mathbf{x}$ от которой зависят значения полей $S_{ij}^{(a)}$ возможны только при равенстве всех числовых коэффициентов $c_a=0$, $a=1\div 26$.

Допустим противное, что (18) имеет место. Тогда, заменив все поля $S_{ij}^{(a)}$ на $\lambda S_{ij}^{(a)}$ с произвольным множителем λ, получим из (18)

$$\lambda\sum_{a=1\div 3} c_a S_{ij}^{(a)} + \lambda^2 \sum_{a=10\div 15,17\div 20} c_a S_{ij}^{(a)} + \lambda^3 \sum_{a=4\div 9} c_a S_{ij}^{(a)} + \lambda^4 \sum_{a=16,21\div 26} c_a S_{ij}^{(a)} = 0\,.$$

Ввиду линейной независимости функций λ^s с различными показателями $s\in\mathbb{N}$, отсюда следуют четыре равенства

$$\sum_{a=1\div 3} c_a S_{ij}^{(a)} = 0\,, \tag{19}$$

$$\sum_{a=10\div 15,17\div 20} c_a S_{ij}^{(a)} = 0\,, \tag{20}$$

$$\sum_{a=4\div 9} c_a S_{ij}^{(a)} = 0\,, \tag{21}$$

$$\sum_{a=16,21\div 26} c_a S_{ij}^{(a)} = 0\,. \tag{22}$$

Проанализируем каждое из полученных равенств. Ввиду произвольности полей $S_{jk}^{(a)}$, подставим в равенство (19) их выражения в том случае, когда их значения вычисляются на основе фиксированного псевдовекторного поля $M_j = A_j\exp(i(\mathbf{n},\mathbf{x}))$, где A_j – произвольный псевдовектор, а $\mathbf{n}$ – произвольный вектор. После элементарных преобразований получаем равенство

$$c_1\delta_{ij}(\mathbf{n},\mathbf{A}) + c_2 A_j n_i + c_3 A_i n_j = 0\,.$$

Ввиду произвольности направлений векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{A}$, это равенство возможно при всех их направлениях только при $c_1=c_2=c_3=0$.

Рассмотрим равенство (20). Подстановка, аналогичная той, которая указана выше, приводит к равенству

$$(c_{12}-c_{17})[\mathbf{A},\mathbf{n}]_j A_i + (c_{14}-c_{18})[\mathbf{A},\mathbf{n}]_i A_j + \\ + (c_{15}+c_{19})\varepsilon_{ijm} A_m(\mathbf{n},\mathbf{A}) + c_{20}\varepsilon_{ijk} n_k \mathbf{A}^2 = 0\,.$$

Остальные слагаемые с коэффициентами c_{10}, c_{11}, c_{13} при такой подстановке тождественно обращаются в нуль. Из полученного равенства, ввиду произвольности векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{A}$ следует, что

$$c_{12}=c_{17}\,,\qquad c_{14}=c_{18}\,,\qquad c_{15}+c_{19}=0\,,\quad c_{20}=0\,. \tag{23}$$

Так как равенство нулю слагаемых с номерами 10, 11 и 13 всегда, если $M_j = A_j\varphi(\mathbf{x})$ со скалярной функцией $\varphi(\mathbf{x})$, то подстановка в (20) поля

$$M_j(\mathbf{x}) = A_j^{(1)}\exp(i(\mathbf{n}^{(1)},\mathbf{x})) + A_j^{(2)}\exp(i(\mathbf{n}^{(2)},\mathbf{x}))\,, \tag{24}$$

с четырьмя произвольными векторами $A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, n_j^{(1)}, n_j^{(2)}$, а также в слагаемые

$$c_{10}\delta_{ij}(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) + c_{11}\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_i M_l + c_{13}\varepsilon_{ikl}M_k\nabla_j M_l$$

в равенстве (20), которые ранее тождественно обращались в нуль при $M_j = A_j\exp(i(\mathbf{n},\mathbf{x}))$, после элементарных преобразований с учетом равенств (23), приходим приводит к следующему соотношению

$$A_k^{(2)}A_m^{(1)}[c_{10}\delta_{ij}\varepsilon_{klm}(n_l^{(1)}-n_l^{(2)}) + c_{11}\varepsilon_{jkm}(n_i^{(1)}-n_i^{(2)}) + c_{13}\varepsilon_{ikm}(n_j^{(1)}-n_j^{(2)})] +$$

$$+c_{12}\varepsilon_{jkl}[A_i^{(1)}A_k^{(2)} - A_i^{(2)}A_k^{(1)}][n_l^{(1)}-n_l^{(2)}] + c_{14}\varepsilon_{ikl}[A_j^{(1)}A_k^{(2)} - A_j^{(2)}A_k^{(1)}][n_l^{(1)}-n_l^{(2)}] +$$

$$+c_{15}\varepsilon_{ijm}[A_l^{(2)}A_m^{(1)} - A_m^{(2)}A_l^{(1)}][n_l^{(1)}-n_l^{(2)}] = 0$$

В силу произвольности вектора $\mathbf{n}^{(1)}-\mathbf{n}^{(2)}$, отсюда следует равенство

$$A_k^{(2)}A_m^{(1)}[c_{10}\delta_{ij}\varepsilon_{klm} + c_{11}\varepsilon_{jkm}\delta_{il} + c_{13}\varepsilon_{ikm}\delta_{jl}] + \\ c_{12}\varepsilon_{jkl}[A_i^{(1)}A_k^{(2)} - A_i^{(2)}A_k^{(1)}] + c_{14}\varepsilon_{ikl}[A_j^{(1)}A_k^{(2)} - A_j^{(2)}A_k^{(1)}] + \\ + c_{15}\varepsilon_{ijm}[A_l^{(2)}A_m^{(1)} - A_m^{(2)}A_l^{(1)}] = 0\,,$$

которое имеет место при любом $l=1,2,3$. Дифференцирование этого равенства сначала по вектору $A_m^{(2)}$, а затем по вектору $A_k^{(1)}$, что возможно ввиду произвольности этих векторов, приводит к тензорному равенству для универсальных псевдотензоров пятого ранга

$$c_{10}\delta_{ij}\varepsilon_{klm} + c_{11}\varepsilon_{jkm}\delta_{il} + c_{13}\varepsilon_{ikm}\delta_{jl} +$$

$$+ c_{12}[\varepsilon_{jml}\delta_{ik} - \varepsilon_{jkl}\delta_{im}] + c_{14}[\varepsilon_{iml}\delta_{jk} - \varepsilon_{ikl}\delta_{jm}] + c_{15}[\varepsilon_{ijk}\delta_{lm} - \varepsilon_{ijm}\delta_{lk}] = 0\,,$$

которое может иметь место только при $c_s = 0$, $s = 10 \div 15$, в силу линейной независимости всех универсальных тензоров в этом равенстве в виде тензорных произведений $\delta\varepsilon$, так как в каждое такое произведение входит символ δ с парой индексов, отличающейся от всех других произведений.

Проанализируем равенство (21). Подставим в это равенство поле $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\exp[i(\mathbf{n},\mathbf{x})]$. В результате, получим равенство

$$2c_4\delta_{ij}\mathbf{A}^2(\mathbf{A},\mathbf{n}) + 2c_5\mathbf{A}^2 n_i A_j + 2c_7\mathbf{A}^2 n_j A_i + (c_6 + c_8 + c_9)(\mathbf{A},\mathbf{n})A_i A_j = 0 \quad (25)$$

Ввиду произвольности векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$, положим сначала, что $(\mathbf{A},\mathbf{n}) = 0$. Тогда получаем равенство

$$c_5 n_i A_j + c_7 n_j A_i = 0\,,$$

которое может иметь место только при пропорциональности векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$ при неравных нулю коэффициентах c_5 и c_7. Следовательно, должно выполняться $c_5 = c_7 = 0$. Далее, из (25) при $(\mathbf{A},\mathbf{n}) \neq 0$ следует равенство

$$2c_4\delta_{ij}\mathbf{A}^2 + (c_6 + c_8 + c_9)A_i A_j = 0,$$

которое возможно только при $c_4 = 0$ и $c_6 + c_8 + c_9 = 0$. Таким образом, равенство (21) превращается в следующее

$$c_6 M_j(\mathbf{M},\nabla)M_i + c_8 M_i(\mathbf{M},\nabla)M_j + c_9 M_i M_j(\nabla,\mathbf{M}) = 0\,.$$

Подставим в это равенство поле

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{(1)}\exp[i(\mathbf{n}^{(1)},\mathbf{x})] + \mathbf{A}^{(2)}\exp[i(\mathbf{n}^{(2)},\mathbf{x})]\,.$$

Тогда имеем

$$(c_6 + c_8 + c_9)\sum_{s=1,2} A_j^{(s)}(\mathbf{M},\nabla)A_i^{(s)}\exp[2i(\mathbf{n}^{(s)},\mathbf{x})] +$$

$$+ c_6\Big(A_j^{(1)}(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(2)})A_i^{(2)} + A_j^{(2)}(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(1)})A_i^{(1)}\Big)\exp([i(\mathbf{n}^{(1)},\mathbf{x}) + i(\mathbf{n}^{(2)},\mathbf{x})] +$$

$$+c_8\Big(A_i^{(1)}(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(2)})A_j^{(2)}+A_i^{(2)}(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(1)})A_j^{(1)}\Big)\exp([i(\mathbf{n}^{(1)},\mathbf{x})+i(\mathbf{n}^{(2)},\mathbf{x})]-$$

$$-ic_9\Big(A_i^{(1)}A_j^{(2)}+A_i^{(1)}A_j^{(2)}\Big)(\nabla,\mathbf{M})\exp([i(\mathbf{n}^{(1)},\mathbf{x})+i(\mathbf{n}^{(2)},\mathbf{x})]=0\,.$$

Так как первое слагаемое в этом равенстве отсутствует, ввиду найденного нами тождества для коэффициентов c_6, c_8, c_9, то оно преобразуется в следующее

$$c_6\Big(A_j^{(1)}(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(2)})A_i^{(2)}+A_j^{(2)}(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(1)})A_i^{(1)}\Big)+$$
$$+c_8\Big(A_i^{(1)}(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(2)})A_j^{(2)}+A_i^{(2)}(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(1)})A_j^{(1)}\Big)-$$
$$-ic_9\Big(A_i^{(1)}A_j^{(2)}+A_j^{(1)}A_i^{(2)}\Big)(\nabla,\mathbf{M})=0\,.$$

В силу линейной независимости тензоров $A_i^{(1)}A_j^{(2)}$ и $A_i^{(2)}A_j^{(1)}$, получаем два равенства

$$c_6(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(2)})+c_8(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(1)})-ic_9(\nabla,\mathbf{M})=0\,,$$
$$c_6(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(1)})+c_8(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(2)})-ic_9(\nabla,\mathbf{M})=0\,.$$

Вычитая одно из другого, получим

$$(c_6-c_8)(\mathbf{M},\mathbf{n}^{(2)}-\mathbf{n}^{(1)})=0\,.$$

Ввиду произвольности векторов $\mathbf{n}^{(s)}$, $s=1,2$, получим $c_6=c_8$. В этом случае оба представленных равенства совпадают. Тогда, сравнивая коэффициенты при каждой из экспонент, например, в первом из них, получаем систему линейных однородных уравнений для коэффициентов c_6 и c_9,

$$c_6(\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{n}^{(1)}+\mathbf{n}^{(2)})+c_9(\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{n}^{(1)})=0\,,$$
$$c_6(\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{n}^{(1)}+\mathbf{n}^{(2)})+c_9(\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{n}^{(1)})=0\,.$$

В силу произвольности всех четырех векторов $\mathbf{A}^{(s)}$, $\mathbf{n}^{(s)}$, $s=1,2$, детерминант этой системы

$$\det\begin{pmatrix}(\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{n}^{(1)}+\mathbf{n}^{(2)}) & (\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{n}^{(1)})\\ (\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{n}^{(1)}+\mathbf{n}^{(2)}) & (\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{n}^{(1)})\end{pmatrix}=$$
$$=(\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{n}^{(2)})(\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{n}^{(2)})-(\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{n}^{(1)})(\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{n}^{(2)})$$

не равен тождественно нулю. Следовательно, $c_6=c_9=0$.

Для проведения анализа равенства (22) нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Существуют векторные (псевдовекторные) поля* $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, *для которых* $(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) \not\equiv 0$.

□ Подставим в выражение $(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])$ поле $\mathbf{M}$ в виде суперпозиции двух экспонент

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{(1)} \exp[i(\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{x})] + \mathbf{A}^{(2)} \exp[i(\mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{x})] \tag{26}$$

с постоянными векторами $\mathbf{A}^{(s)}$, $\mathbf{n}^{(s)}$, $s = 1, 2$. Так как

$$(\mathbf{A}^{(s)} \exp[i(\mathbf{n}^{(s)}, \mathbf{x})], [\nabla, \mathbf{A}^{(s)} \exp[i(\mathbf{n}^{(s)}, \mathbf{x})]]) =$$
$$= i \exp[2i(\mathbf{n}^{(s)}, \mathbf{x})](\mathbf{A}^{(s)}, [\mathbf{n}^{(s)}, \mathbf{A}^{(s)}]) \equiv 0$$

при $s = 1, 2$, то, в этом случае,

$$(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) = i \exp[i(\mathbf{n}^{(1)}+\mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{x})]\Big((\mathbf{A}^{(1)}, [\mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{A}^{(2)}])+(\mathbf{A}^{(2)}, [\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{A}^{(1)}])\Big) =$$
$$= i \exp[i(\mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{x})](\mathbf{n}^{(2)} - \mathbf{n}^{(1)}, [\mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{A}^{(1)}])\,.$$

Всегда имеется четверка векторов $\mathbf{A}^{(s)}$, $\mathbf{n}^{(s)}$, $s = 1, 2$, для которых представленное смешанное произведение векторов не равно нулю. ■

Лемма 2. *Существуют векторные (псевдовекторные) поля* $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, *для которых* $[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}] \not\equiv 0$.

□ Подставим в выражение $[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]$ поле $\mathbf{M}$ в виде суперпозиции (26) двух экспонент и учтем, что

$$[\mathbf{A}^{(s)} \exp[i(\mathbf{n}^{(s)}, \mathbf{x})], (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{A}^{(s)} \exp[i(\mathbf{n}^{(s)}, \mathbf{x})]] =$$
$$i \exp[2i(\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{x})][\mathbf{A}^{(s)}, (\mathbf{M}, \mathbf{n}^{(s)})\mathbf{A}^{(s)}] = 0$$

при $s = 1, 2$. Тогда

$$[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}] =$$
$$= i \exp[i(\mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{x})]\Big([\mathbf{A}^{(1)}, (\mathbf{M}, \mathbf{n}^{(2)})\mathbf{A}^{(2)}] + [\mathbf{A}^{(2)}, (\mathbf{M}, \mathbf{n}^{(1)})\mathbf{A}^{(1)}]\Big) =$$
$$= i \exp[i(\mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{x})](\mathbf{M}, \mathbf{n}^{(2)} - \mathbf{n}^{(1)})[\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}]\,.$$

Всегда имеется четверка векторов $\mathbf{A}^{(s)}$, $\mathbf{n}^{(s)}$, $s = 1, 2$, для которых, во первых, $[\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}] \neq 0$ и, во-вторых, $(\mathbf{M}, \mathbf{n}^{(2)} - \mathbf{n}^{(1)}) \neq 0$, ввиду того, что $(\mathbf{A}^{(s)}, \mathbf{n}^{(2)} - \mathbf{n}^{(1)}) \neq 0$, $s = 1, 2$. ■

Рассмотрим равенство (22). Подставим в него поле $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\exp[i(\mathbf{n},\mathbf{x})]$. При этом слагаемые с коэффициентами c_{21}, c_{22} и c_{24} тождественно обращаются в нуль. Тогда, в результате подстановки, получаем равенство

$$2c_{16}A_iA_j(\mathbf{A},\mathbf{n}) + c_{23}A_i[\mathbf{A},\mathbf{n}]_j + c_{25}A_j[\mathbf{A},\mathbf{n}]_i + 2c_{26}\varepsilon_{ijm}A_m(\mathbf{A},\mathbf{n}) = 0\,.$$

Полагая в этом равенстве, сначала $(\mathbf{A},\mathbf{n}) = 0$, а затем $[\mathbf{A},\mathbf{n}] = 0$, принимая во внимание произвольность векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$, получим равенства

$$c_{23}A_i[\mathbf{A},\mathbf{n}]_j + c_{25}A_j[\mathbf{A},\mathbf{n}]_i = 0\,, \tag{27}$$

$$c_{16}A_iA_j(\mathbf{A},\mathbf{n}) + c_{26}\varepsilon_{ijm}A_m(\mathbf{A},\mathbf{n}) = 0\,, \tag{28}$$

где $(\mathbf{A},\mathbf{n}) \neq 0$ Из (27), сверткой с A_i получаем, что $c_{23} = 0$, так как $[\mathbf{A},\mathbf{n}]_j \neq 0$, а сверткой с A_j – $c_{25} = 0$, так как $[\mathbf{A},\mathbf{n}]_i \neq 0$. Из (28) следует совпадение симметричного и антисимметричного тензоров $c_{16}A_iA_j = -c_{26}\varepsilon_{ijm}A_m$, что возможно только при их равенстве нулю. Следовательно, ввиду $A_j \neq 0$, получаем $c_{16} = 0$ и $c_{26} = 0$.

Таким образом, равенство (22) сводится к следующему

$$c_{21}M_iM_j(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) + c_{22}M_i[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_j + c_{24}M_j[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_i = 0\,. \tag{29}$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathbf{M}_i$, получим равенство

$$c_{21}M_j(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) + c_{22}[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_j = 0\,. \tag{30}$$

В силу Леммы 1, найдется поле $\mathbf{M}$, для которого $(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) \neq 0$. В этом случае, при $c_{21} \neq 0$, получим, что поле $\mathbf{M}$ перпендикулярно самому себе, что невозможно при $\mathbf{M}^2 \neq 0$. Следовательно, $c_{21} = 0$. Но тогда c_{22}, так как в силу Леммы 2 можно выбрать поле, у которого $[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}] \neq 0$. С учетом полученных равенств, снова используя Лемму 2, получим из (29), что $c_{24} = 0$.

Итак, проведенный анализ показал, что верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Все псевдотензорные поля $S^{(a)}_{ij}$, $a = 1 \div 26$, составляющие множество $\mathfrak{S}$ и представленные формулами (13 - 17), линейно независимы.*

Глава 3. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ МАГНИТНОГО МОМЕНТА

3.1. Построение множества линейно независимых термодинамических сил

В этой главе мы завершаем решение той задачи, которая была поставлена в Главе 1. В этом разделе мы отберем линейно независимые термодинамические силы $F_i^{(a)} = \partial S_{ij}^{(a)}/\partial x_j$ соответствуют отобранным плотностям $S_{ij}^{(a)}$, $a = 1 \div 26$ описанным в Главе 2. Такая процедура необходима в связи с тем, что вычисление сверток с каждым из линейно независимых тензорных полей, которые представляют термодинамические силы, может привести к тому, что список полученных таким образом полей $F^{(a)}(\mathbf{x})$ окажется линейно зависимым набором.

Вычисление дивергенций всех возможных линейно независимых плотностей потоков $S_{ij}^{(a)}$, $a = 1 \div 26$, которые перечислены формулами (13-17), приводит к следующим термодинамическим силам. При этом дивергенции, соответствующие псевдотензорам S_{ij} из формулы (13), приводят к двум совпадающим значениям. В списке потоков (16), дивергенция одного из дает точный нуль, ввиду $\varepsilon_{ijk}\nabla_j\nabla_k \equiv 0$. В результате, мы получаем 24 термодинамические силы, которые представлены в следующих формулах. Псевдотензорам, представленным в (13), соответствуют силы $\mathbf{F}[\mathbf{x};\mathbf{M}]$ следующего вида:

$$\nabla_i(\nabla, \mathbf{M})\,, \quad \Delta M_i\,. \tag{31}$$

Псевдотензорам, представленным формулой (14), соответствуют силы

$$\nabla_i(\mathbf{M}, \nabla\mathbf{M}^2)\,, \quad (\nabla, \mathbf{M}\nabla_i\mathbf{M}^2)\,, \quad (\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla)M_i)\,,$$
$$(\nabla, M_i\nabla\mathbf{M}^2)\,, \quad (\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M})\,, \quad (\nabla, M_i\mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M}))\,. \tag{32}$$

Псевдотензорам, представленным формулой (15), соответствуют силы

$$\nabla_i(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad ([\nabla, \mathbf{M}], \nabla_i\mathbf{M})\,, \quad (\nabla, [\mathbf{M}, \nabla]M_i)\,,$$

$$\varepsilon_{ikl}\nabla_j M_k \nabla_j M_l\,, \quad (\nabla,[\mathbf{M},\nabla]_i\mathbf{M})\,, \quad [\nabla,\mathbf{M}(\nabla,\mathbf{M})]_i\,. \tag{33}$$

Поле F_i, соответствующее псевдотензору $S_{ij}^{(16)}$ имеет вид

$$(\nabla, M_i\mathbf{M}(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}^2)\,. \tag{34}$$

Псевдотензорам, представленным формулой (16), соответствуют силы

$$(\nabla, M_i[\nabla,\mathbf{M}])\,, \quad (\nabla,\mathbf{M}[\nabla,\mathbf{M}]_i)\,, \quad [\nabla,(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_i\,. \tag{35}$$

Наконец, псевдотензорам, представленным формулой (17), соответствуют силы

$$(\nabla, M_i\mathbf{M}(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]))\,, \quad (\nabla, M_i[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}])\,, \quad (\nabla, M_i[\mathbf{M},\nabla]\mathbf{M}^2)\,,$$

$$(\nabla,\mathbf{M}[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_i)\,, \quad (\nabla,\mathbf{M}[\mathbf{M},\nabla]_i\mathbf{M}^2)\,, \quad [\nabla,\mathbf{M}(\mathbf{M},\nabla\mathbf{M}^2)]_i\,. \tag{36}$$

Таким образом в окончательном списке линейно независимых термодинамических сил имеется 24 поля $F_i^{(a)}[\mathbf{x};\mathbf{M}]$, $a = 1 \div 24$, нумерация которых соответствует тому порядку, в котором они перечислены последовательно в формулах (31- 36). В соответствии с этим общее эволюционное уравнение дивергентного типа для псевдовекторного поля $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$, сферически симметричного, и у которого термодинамические силы представляют собой локальные функционалы от поля $\mathbf{M}$ и содержат пространственные производные не выше второго порядка, имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_{a=1}^{24} c_a \mathbf{F}^{(a)}[\mathbf{x};\mathbf{M}]\,, \tag{37}$$

где c_a являются, в общем случае, скалярными функциями от $\mathbf{M}^2(\mathbf{x})$.

3.2. Эволюционные уравнения с законом сохранения плотности магнитного момента

Мы должны среди всех термодинамических сил – слагаемых в правой части эволюционного уравнения (37) отобрать только те, которые обеспечивают постоянство скалярного поля $\mathbf{M}^2(\mathbf{x},t) = M^2 = \mathrm{const}$, когда поле если $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$ является его решением.

Проанализируем последовательно каждое из слагаемых в правой части уравнения (37) и выделим из всего их списка те, которые удовлетворяют нужному требованию. Прежде всего заметим, что поставленному требованию – обеспечению сохранения квадрата псевдовекторного поля $\mathbf{M}^2(\mathbf{x},t)$ не отвечают силы с номерами $a = 3$, 4, 6, 15, 21, 23, 24 из списка предыдущего раздела. Это связано с тем, что в выражения этих сил содержится дифференцирование поля $\mathbf{M}^2(\mathbf{x},t) = M^2$.

Заметим, что термодинамическая сила с номером $a = 12$ в формуле (33) соответствует уравнению (3) Главы 1. Она, заведомо обладает требуемым свойством, так как $M_i\varepsilon_{ikl}\nabla_j M_k \nabla_j M_l \equiv 0$. Поэтому мы сразу же удалим из проводимого далее анализа.

Точно также удалим из списка термодинамическую силу с номером $a = 22$, так как она также обладает требуемым свойством при условии сохранения $\mathbf{M}^2(\mathbf{x},t) = M^2$. В самом деле, справедливы следующие тождественные преобразования

$$M_i(\nabla, \mathbf{M}[\mathbf{M}, (\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_i) =$$

$$= (\nabla, \mathbf{M})(\mathbf{M}, [\mathbf{M}, (\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]) + M_i(\mathbf{M},\nabla)[\mathbf{M}, (\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_i =$$
$$= M_i[(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}, (\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_i + M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M},\nabla)^2\mathbf{M}]_i = 0$$

с обращением в нуль первого слагаемого во второй строке и обоих слагаемых в первой.

Таким образом, нам нужно проанализировать следующие термодинамические силы $\mathbf{F}$ на предмет существования таких универсальных линейных зависимостей между соответствующими им функциями от радиус-вектора

$\mathbf{x}$, которые представляются скалярными произведениями $(\mathbf{M}, \mathbf{F})$:

$$\nabla_i(\nabla, \mathbf{M})\,, \quad \Delta M_i\,,$$

$$\nabla_i(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad ([\nabla, \mathbf{M}], \nabla_i \mathbf{M})\,, \quad (\nabla, [\mathbf{M}, \nabla] M_i)\,, \quad (\nabla_, [\mathbf{M}, \nabla]_i \mathbf{M})\,,$$

$$[\nabla, \mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M})]_i\,, \quad (\nabla, M_i[\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad (\nabla, \mathbf{M}[\nabla, \mathbf{M}]_i)\,, \quad [\nabla, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i\,.$$

$$(\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla) M_i)\,, \quad (\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M})\,, \quad (\nabla, M_i \mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M}))\,.$$

$$(\nabla, M_i \mathbf{M}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]))\,, \quad (\nabla, M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}])\,. \tag{38}$$

Эти термодинамические силы разбиты на четыре группы согласно тому, в какой степени в каждую из них входит поле $\mathbf{M}$. Наличие линейной зависимости, точно также как и в разделе 2.2, нужно проверять внутри каждой из групп. В последующем анализе наличия линейной зависимости нумерацию выражений $(\mathbf{M}, \mathbf{F}^{(a)})$ и соответствующим из них коэффициентов c_a при принимаем согласно представленному здесь списку.

Итак, для квадратичных по полю $\mathbf{M}$ выражений проанализируем равенство

$$c_1(\mathbf{M}, \nabla(\nabla, \mathbf{M})) + c_2(\mathbf{M}, \Delta\mathbf{M}) = 0\,.$$

Подстановка в него поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\exp[i(\mathbf{n}, \mathbf{x})]$ дает равенство

$$c_1(\mathbf{A}, \mathbf{n})^2 + c_2\mathbf{n}^2\mathbf{A}^2 = 0\,,$$

которое возможно только при $c_1 = c_2 = 0$, что усматривается полагая, ввиду произвольности векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$, сначала $\mathbf{n} \perp \mathbf{A}$, а затем $\mathbf{n} \parallel \mathbf{A}$.

Проанализируем теперь возможность линейной зависимости между выражениями третьего порядка по $\mathbf{M}$,

$$c_{11}M_i(\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla)M_i) + c_{12}M_i(\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}) +$$

$$+ c_{13}M_i(\nabla, M_i\mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M})) = 0\,. \tag{39}$$

Аналогично, подстановка выражения для поля $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ в виде плоской волны с произвольной амплитудой $\mathbf{A}$ и волновым вектором $\mathbf{n}$ приводит к равенству

$$c_{11} + c_{12} + c_{13} = 0\,. \tag{40}$$

Подставим теперь в (39) поле $= [\mathbf{x}, \mathbf{n}]$. Тогда $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$ и

$$(\mathbf{M}, \nabla)M_i = n_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - x_i\mathbf{n}^2\,.$$

Тогда, ввиду $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$, $(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = 0$

$$(\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla) M_i) = (\nabla, \mathbf{M}(n_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - x_i \mathbf{n}^2)) =$$

$$= (\mathbf{M}, \nabla(n_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - x_i \mathbf{n}^2)) = -M_i \mathbf{n}^2 \,.$$

Наряду с этим, по той же причине,

$$(\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}) = (\nabla_k M_i) \cdot (\mathbf{M}, \nabla) M_k + M_i(\nabla_k \mathbf{M}, \nabla) M_k =$$

$$= \varepsilon_{ikl} n_l [\mathbf{M}, \mathbf{n}]_k + \Big(\varepsilon_{ikl} n_l \varepsilon_{kmn} M_m n_n\Big) =$$

$$= -M_i \mathbf{n}^2 + (\delta_{in}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{ln}) n_l n_n M_m = -2M_i \mathbf{n}^2 \,.$$

Подстановка этих соотношений в (28) дает

$$c_{11} + 2c_{12} = 0 \,. \tag{41}$$

Наконец, подставим в (39) поле $\mathbf{M} = \mathbf{x}$. Тогда

$$(\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla)) M_i = (\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}) = (\nabla, M_i \mathbf{M}) = 4x_i$$

и поэтому из (39) следует

$$c_{11} + c_{12} + 3c_{13} = 0 \,.$$

Из этого равенства, вместе с (40) и (41) следует $c_{11} = c_{12} = c_{13} = 0$.

Проанализируем возможность линейной зависимости между двумя выражениями четвертого порядка порядка по $\mathbf{M}$,

$$c_{14} M_i(\nabla, M_i \mathbf{M}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])) + c_{15} M_i(\nabla, M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]) = 0 \,. \tag{42}$$

Подставим в это равенство поле $M_j(\mathbf{x}) = A_j + \mathrm{Re} B_j \exp[i(\mathbf{n}, \mathbf{x})]$ с произвольными вещественными векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$, а также комплексным вектором $\mathbf{B}$, которого $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ и $|\mathrm{Re}\mathbf{B}| = |\mathrm{Im}\mathbf{B}|$, $(\mathrm{Re}\mathbf{B}, \mathrm{Im}\mathbf{B}) = 0$ так, что $\mathbf{B}^2 = 0$. Такой выбор поля $M_j(\mathbf{x})$ обеспечивает равенство $M_j(\mathbf{x}) \mathbf{M_j}(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$. Так как в этом случае

$$M_i(\nabla, M_i \mathbf{M}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])) = \varepsilon_{jkl} M_i \nabla_j M_i M_k M_m \nabla_m M_l =$$

$$= \varepsilon_{jkl}[M^2 \nabla_j M_k M_m \nabla_m M_l - (M_k M_m \nabla_m M_l) M_i \nabla_j M_i] \,,$$

где второе слагаемое обращается в нуль в предположении, что $\mathbf{M}^2 = \mathrm{const}$, и, кроме того,

$$M_i(\nabla, M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]) = \varepsilon_{klm} M_i \nabla_j M_i M_j M_k \nabla_l M_m =$$

$$= \varepsilon_{klm}[M^2 \nabla_j M_j M_k \nabla_l M_m - (M_j M_k \nabla_l M_m) M_i \nabla_j M_i] \,,$$

где второе слагаемое также обращается в нуль в том же предположении. Тогда равенство (42) сводится к следующему

$$c_{14}\varepsilon_{jkl}\nabla_j M_k M_m \nabla_m M_l + c_{15}\varepsilon_{klm}\nabla_j M_j M_k \nabla_l M_m = 0 \,. \tag{43}$$

Подстановка указанного явного выражения для поля в это равенство дает

$$c_{14}\varepsilon_{jkl} n_j n_m \Big([\mathrm{Im} B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}][\mathrm{Im} B_l e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}] M_k +$$
$$+ (A_m + [\mathrm{Re} B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}])[\mathrm{Re} B_l e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}] M_k \Big) +$$
$$+ c_{15}\varepsilon_{klm} n_j n_l \Big([\mathrm{Im} B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}][\mathrm{Im} B_j e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}] M_k +$$
$$+ (A_j + [\mathrm{Re} B_j e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}])[\mathrm{Re} B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}] M_k \Big) = 0 \,.$$

Меняя во втором слагаемом индексы суммирования $j \Leftrightarrow l$ во втором слагаемом и, сравнивая оба получившихся слагаемых, имеем

$$(c_{14} - c_{15})\varepsilon_{jkl} n_j n_m (A_m + [\mathrm{Re} B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}])[\mathrm{Re} B_l e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}] M_k +$$
$$+ (c_{14}\varepsilon_{jkl} n_m - c_{15}\varepsilon_{jkm} n_l) n_j [\mathrm{Im} B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}][\mathrm{Im} B_l e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}] M_k = 0 \,. \tag{44}$$

Дифференцируя дважды по A_k и по A_m получим равенство

$$(c_{14} - c_{15})(\varepsilon_{jkl} n_j n_m + \varepsilon_{jml} n_j n_k) = 0 \,.$$

Сверткой с n_m находим $(c_{14} - c_{15})\varepsilon_{jkl} n_j = 0$. В силу произвольности вектора n_j получаем $c_{14} = c_{15}$. В этом случае второе слагаемое в (44) также обращается в нуль, в силу равенства нулю свертки симметричного и антисимметричного тензоров.

Воспользуемся полученным равенством коэффициентов в уравнении (43) и покажем, что они должны быть равны нулю. Для этого нужно показать, что равенство

$$\varepsilon_{jkl}\nabla_j M_k M_m \nabla_m M_l + \varepsilon_{klm}\nabla_j M_j M_k \nabla_l M_m = 0 \,. \tag{45}$$

не может иметь место для любых гладких полей $M_j(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию $M_j M_j = M^2 = \mathrm{const}$.

Совершим во втором слагаемом замены индексов суммирования: сначала $m \Leftrightarrow j$, а затем $l \Rightarrow j$. В результате, получим

$$\varepsilon_{jkl}\Big[\nabla_j M_k M_m \nabla_m M_l - \nabla_m M_k M_m \nabla_j M_l\Big] = 0\,.$$

Подставим в это равенство поле M_j в виде $M_j = A_{jk}x_k$ с произвольной невырожденной матрицей $\mathcal{A}$, $(\mathcal{A})_{jk} = A_{jk}$ $\det\mathcal{A} = 0$. Такое поле не удовлетворяет поставленному условию $M_jM_j = \mathrm{const}$, однако в случае, если приведенное равенство выполняется, то оно обязано выполняться и для линейных полей $M_j = A_{jk}x_k$, у которых матрица $\mathcal{A}$ является антисимметричной, так как в любой точке $\mathbf{x}$, например в нулевой, где оно выполняется, оно также должно выполняться и при малых отклонений от этой точки. При этом в силу сохранения M_jM_j для матрицы должно иметь место $\mathcal{A} + \mathcal{A}^{\mathsf{T}} = 0$.

В результате указанной подстановки получаем

$$\varepsilon_{jkl}\Big[A_{kj}(\mathcal{A}\mathbf{M})_l + M_k(\mathcal{A}^2)_{lj} - (\mathcal{A}\mathbf{M})_k A_{lj} - M_k A_{lj}\mathrm{Sp}\mathcal{A}\Big] = 0\,.$$

Положим матрица $\mathcal{A}$ антисимметрична. Тогда $\mathcal{A}^2$ – симметричная матрица и $\mathrm{Sp}\mathcal{A} = 0$. Поэтому

$$\varepsilon_{jkl}\Big[A_{kj}(\mathcal{A}\mathbf{M})_l - (\mathcal{A}\mathbf{M})_k A_{lj}\Big] = 0$$

вследствие равенства нулю свертки симметричного и антисимметричного тензоров. Далее, ввиду того, что x_j – произвольный вектор и $\det\mathcal{A} \neq 0$, то M_j – произвольный вектор. Тогда, по той же причине, $\mathcal{A}\mathbf{M}$ – произвольный вектор, и потому дифференцированием по этому вектору, получаем равенство $\varepsilon_{jkn}A_{kj} = \varepsilon_{jnl}A_{lj} = 0$, которое должно быть верным для любой антисимметричной матрицы $\mathcal{A}$. Из него следует, что $\varepsilon_{jkn}A_{kj} = 0$. Откуда сверткой с ε_{nlm} получаем $A_{lm} = A_m l$, что противоречит антисимметрии матрицы $\mathcal{A}$. Полученное противоречие показывает, что равенство (45) невозможно для любых полей M_j, и поэтому $c_{14} = c_{15} = 0$.

Перейдем теперь к анализу возможности наличия тождеств в списке (38) выражений $(\mathbf{M}, \mathbf{F})$, имеющих степень два по полю M_j. Прежде всего заметим, что в списке таких выражения имеются тождественно равные нулю при выполнении условия $\mathbf{M}^2 = \mathrm{const}$. А именно, таковыми являются выражения с номерами $a = 4, 5, 8$. В самом деле, для выражения с силой под номером $a = 4$ имеем

$$M_i([\nabla, \mathbf{M}], \nabla_i\mathbf{M}) = M_i\varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l \nabla_j M_i =$$

$$= \varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l M_i \nabla_j M_i - M_l \varepsilon_{jkl}(\nabla_k M_i)(\nabla_j M_i) = 0\,,$$

где оба слагаемых, полученных последовательным применением оператора ∇_k равны нулю; первое вследствие предположения $M_i M_i = \mathrm{const}$, $M_i \nabla_j M_i = 0$, а второе – вследствие свертки симметричного тензора с антисимметричным.

Для выражения с силой под номером $a = 5$, последовательно применяя оператор ∇_j к каждому сомножителю, имеем

$$M_i(\nabla, [\mathbf{M}, \nabla]\mathbf{M}_i) = M_i \nabla_j \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_l M_i =$$

$$= \varepsilon_{jkl}(\nabla_j M_k) M_i \nabla_l M_i + M_i \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_j \nabla_l M_i = 0$$

где первое слагаемое равно нулю в силу $M_i \nabla_j M_i = 0$, а второе – ввиду свертки симметричного и антисимметричного тензоров. По тем же причинам, равно нулю выражение, соответствующее силе под номером $a = 8$,

$$M_i(\nabla, M_i[\nabla, \mathbf{M}]) = M_i \nabla_j M_i \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l =$$

$$= M_i(\nabla_j M_i)\varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l + M_i M_i \varepsilon_{jkl} \nabla_j \nabla_k M_l = 0\,.$$

Таким образом следующие термодинамические силы F_i из списка (38) обеспечивают сохранение квадрата поля $\mathbf{M}$:

$$([\nabla, \mathbf{M}], \nabla_i \mathbf{M})\,, \quad (\nabla, [\mathbf{M}, \nabla]\mathbf{M}_i)\,, \quad (\nabla, M_i[\nabla, \mathbf{M}])\,. \tag{46}$$

Проанализируем, теперь, возможность существования линейной зависимости между скалярными функциями, представленными оставшимися выражениями $(\mathbf{M}, \mathbf{F})$:

$$M_i \nabla_i(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad M_i(\nabla, [\mathbf{M}, \nabla]_i \mathbf{M})\,, M_i[\nabla, \mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M})]_i\,,$$

$$M_i(\nabla, \mathbf{M}[\nabla, \mathbf{M}]_i)\,, \quad M_i[\nabla, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i\,. \tag{47}$$

Подставим в возможное соотношение линейной зависимости между ними

$$\alpha_1 M_i \nabla_i M_j \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l + \alpha_2 M_i \nabla_j \varepsilon_{ikl} M_k \nabla_l M_j + \alpha_3 M_i \varepsilon_{ijk} \nabla_j M_k \nabla_l M_l +$$

$$+ \alpha_4 M_i \nabla_j M_j \varepsilon_{ikl} \nabla_k M_l + \alpha_5 M_i \varepsilon_{ijk} \nabla_j M_l \nabla_l M_k = 0\,. \tag{48}$$

линейное выражение для поля $M_j = A_{jk} x_k$ с произвольной невырожденной матрицей $\mathcal{A}$. Тогда имеем равенство

$$\alpha_1 (\mathcal{A}^2)_{jn} \varepsilon_{jkl} A_{lk} + \alpha_2 A_{in} \varepsilon_{ikl} (\mathcal{A}^2)_{kl} + \alpha_3 A_{in} \varepsilon_{ijk} A_{kj} \mathrm{Sp}\mathcal{A} +$$

$$+\alpha_4 A_{in}\varepsilon_{ikl}A_{lk}\mathrm{Sp}\mathcal{A}+\alpha_5 A_{in}\varepsilon_{ijk}(\mathcal{A}^2)_{kj}=0\,.$$

Так как матрица $\mathcal{A}$ антисимметрична, то $\mathrm{Sp}\mathcal{A}=0$ и $\mathcal{A}^2$ симметрична. Тогда это равенство превращается в $\alpha_1(\mathcal{A}^2)_{jn}\varepsilon_{jkl}A_{lk}=0$. Предположим, что $\alpha_1\neq 0$. Следовательно, так как матрица $\mathcal{A}$ невырождена (все ее собственные числа чисто мнимые), то у матрицы $\mathcal{A}^2$ также нет нулевых собственных чисел и поэтому $\varepsilon_{jkl}A_{kl}$ не может быть ее собственным вектором с нулевым собственным числом. Отсюда следует, что $\varepsilon_{jkl}A_{lk}=0$ и сверткой обеих частей этого равенства с ε_{jmn} находим, что $A_{mn}=A_{nm}$. Полученное противоречие доказывает, что $\alpha_1=0$.

Учитывая равенство $\alpha_1=0$ подставим в (48) поле $M_j(\mathbf{x})=A_j+M_j^{(1)}$, $M_j^{(1)}=\mathrm{Re}B_j\exp[i(\mathbf{n},\mathbf{x})]$ с теми же что и ранее использованными свойствами коэффициентов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Такая подстановка приводит к следующему

$$M_i\varepsilon_{ikl}\Big(\alpha_2 n_l\nabla_j M_k M_j^{(2)}-\alpha_3 n_j\nabla_l M_k M_j^{(2)}+$$
$$+\alpha_4 n_k\nabla_j M_j M_l^{(2)}-\alpha_5 n_j\nabla_l M_j M_k^{(2)}\Big)=0\,,$$

где $\nabla_k M_j^{(1)}=n_k M_j^{(2)}$, и далее,

$$M_i\varepsilon_{ikl}\Big((\alpha_2-\alpha_3)n_l n_j(M_k^{(2)}M_j^{(2)}-M_k M_j^{(1)})+$$
$$+\alpha_4 n_k n_j(M_l^{(2)}M_j^{(2)}-M_j M_l^{(1)})-\alpha_5 n_j n_l(M_l^{(2)}M_k^{(2)}-M_k M_l^{(1)})\Big)=0\,. \quad (49)$$

Положим в полученном равенстве, сначала, $\mathbf{n}\perp\mathbf{M}^{(1)}$ при любом значении радиус-вектора $\mathbf{x}$, от которого зависит $\mathbf{M}^{(1)}$ и, следовательно, $\mathbf{n}\perp\mathbf{M}^{(2)}$. Тогда из него следует, что

$$\alpha_4 A_i\varepsilon_{ikl}n_k M_l^{(1)}n_j A_j=0\,.$$

Выбрав вектор $\mathbf{n}$ так, чтобы $(\mathbf{n},\mathbf{A})\neq 0$ и при этом $\mathbf{n}\not\parallel\mathbf{A}$, получим, что $A_i\varepsilon_{ikl}n_k M_l^{(1)}\neq 0$, так как $\mathbf{A}\perp\mathbf{M}^{(1)}$. Отсюда следует, что $\alpha_4=0$. Учитывая это равенство в (49), подставим в него вектор $\mathbf{n}$, перпендикулярный $\mathbf{A}$. Тогда слагаемое с α_5 исчезает, и поэтому из получившегося равенства следует, что

$$M_i\varepsilon_{ikl}(\alpha_2-\alpha_3)n_l n_j(M_k^{(2)}M_j^{(2)}-M_k M_j^{(1)})=0\,. \quad (50)$$

Выбрав теперь вектор $\mathbf{n}$, получим из этого равенства

$$(\alpha_2-\alpha_3)\varepsilon_{ikl}n_l n_j\Big[A_i(M_k^{(2)}M_j^{(2)}-M_k^{(1)}M_j^{(1)})+M_i^{(1)}(M_k^{(2)}M_j^{(2)}-A_kM_j^{(1)})\Big]=$$

$$=(\alpha_2-\alpha_3)\varepsilon_{ikl}n_l n_j\Big[A_i(M_k^{(2)}M_j^{(2)}+M_i^{(1)}(M_k^{(2)}M_j^{(2)}\Big]=$$

$$=(\alpha_2-\alpha_3)(\mathbf{n},\mathbf{M}^{(2)})\Big[(\mathbf{A},[\mathbf{M}^{(2)},\mathbf{n}])+(\mathbf{M}^{(1)},[\mathbf{M}^{(2)},\mathbf{n}])\Big]=0\,.$$

Это равенство должно выполняться при любом векторе $\mathbf{n}$, который мы выберем так, чтобы $(\mathbf{n},\mathbf{M}^{(2)})\neq 0$, более того, мы его выберем так, чтобы он был перпендикулярен ни $\mathrm{Re}\mathbf{B}$, ни $\mathrm{Im}\mathbf{B}$. Но тогда $(\mathbf{M}^{(1)},[\mathbf{M}^{(2)},\mathbf{n}])\neq 0$ и равенство не может выполняться при $\alpha_2\neq\alpha_3$ для любого радиус-вектора $\mathbf{x}$, так как это слагаемое в скобках содержит квадратичную комбинацию относительно $\exp[i(\mathbf{n},\mathbf{x})]$, а первое слагаемое – имеет первую степень относительно этой экспоненты. Отсюда следует, что $\alpha_2=\alpha_3$.

Покажем, наконец, что

$$M_i\varepsilon_{ikl}\Big(\nabla_jM_k\nabla_lM_j-\nabla_lM_k\nabla_jM_j\Big)=0 \tag{51}$$

для полей, удовлетворяющих условию $M_jM_j=M^2$. Во первых, учитывая равенство нулю свертки $\varepsilon_{ikl}M_iM_k$, левая часть (51) записывается в виде

$$M_i\varepsilon_{ikl}\Big((\nabla_jM_k)\cdot(\nabla_lM_j)-(\nabla_lM_k)\cdot(\nabla_jM_j)\Big)\,.$$

Введем матрицу $\mathcal{A}_{kl}=\partial M_k/\partial_l$. Тогда, в терминах этой матрицы, последнее выражение имеет вид

$$M_i\varepsilon_{ikl}\Big((\mathcal{A}^2)_{kl}-A_{kl}\mathrm{Sp}\mathcal{A}\Big)\,.$$

Дифференцируя же по x_k условие $M_jM_j=M^2$ имеем дополнительную связь матрицы $\mathcal{A}$ с вектором M_j, $M_jA_{jk}=0$, $k=1,2,3$. Запишем это равенство в системе координат, где $M_j=0$, $j=2,3$, $M_1\neq 0$,

$$A_{1k}=0\,,\ k=1,2,3\,. \tag{52}$$

Тогда, в силу этих равенств, исследуемое выражение, действительно, обращается в нуль,

$$\varepsilon_{1kl}\Big((\mathcal{A}^2)_{kl}-A_{kl}\mathrm{Sp}\mathcal{A}\Big)=$$

$$= (A_{21}A_{13} - A_{31}A_{12}) + (A_{22}A_{23} - A_{32}A_{22}) + (A_{23}A_{33} - A_{33}A_{32}) -$$
$$- (A_{23} - A_{32})(A_{11} + A_{22} + A_{33}) =$$
$$= (A_{21}A_{13} - A_{31}A_{12}) - (A_{23} - A_{32})A_{11} = 0\,.$$

Следовательно, (51) имеет место в выбранной нами системе координат, и поэтому оно верно, в следствие его инвариантности, в любой системе координат.

Теорема 3. *Весь класс термодинамических сил* $\mathbf{F}$, *который обеспечивают выполнение равенства* $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = 0$ *дается следующим списком*

$$\varepsilon_{ikl}\nabla_j M_k \nabla_j M_l\,, \quad \varepsilon_{ikl}\nabla_j M_j M_k M_m \nabla_m M_l\,,$$
$$\varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l \nabla_i M_j\,, \quad \nabla_j \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_l M_i\,,$$
$$\nabla_j M_i \varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l\,, \quad \varepsilon_{ikl}\Big(\nabla_j M_k \nabla_l M_j - \nabla_l M_k \nabla_j M_j\Big)\,.$$

8. Заключение

В работе решена задача об описании класса всех эволюционных уравнений с дифференциальным эволюционным оператором по пространственным производным дивергентного типа для псевдовекторного поля $\mathbf{M}(\mathbf{x})$. При этом на возможный выбор эволюционного оператора наложены дополнительные условия: он должен содержать пространственные производные не выше второго порядка, должен быть ковариантным при преобразованиях группы $\mathbb{O}_3$ (повороты и отражения евклидового пространства) и при этом должен быть сферически симметричным. Далее, из этого класса эволюционных уравнений выделен класс таких из них, которые обладают инвариантом $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2$.

В результате проведенного исследования оказалось, что все уравнения исследуемого класса имеют следующий вид

$$\dot{M}_i = \gamma_1 \varepsilon_{ikl} \nabla_j M_k \nabla_j M_l + \gamma_2 \varepsilon_{ikl} \nabla_j M_j M_k M_m \nabla_m M_l +$$
$$+ \gamma_3 \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l \nabla_i M_j + \gamma_4 \nabla_j \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_l M_i + \gamma_5 \nabla_j M_i \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l +$$
$$+ \gamma_6 \varepsilon_{ikl} \Big(\nabla_j M_k \nabla_l M_j - \nabla_l M_k \nabla_j M_j \Big) \, .$$

с произвольными постоянными γ_a и $a = 1 \div 6$. В частности, если все постоянные $\gamma_a = 0$ при $a = 2 \div 6$ из этого общего уравнения получается сферически симметричное уравнение Ландау-Лифшица для плотности магнитного момента ферромагнетика в отсутствии внешнего магнитного поля.

Заметим, что найденные эволюционные уравнения, в общем случае, не обладают свойством инвариантности относительно замены $t \Rightarrow -t$, $\mathbf{M} \Rightarrow -\mathbf{M}$. А именно, такой тип инвариантности, которым обладает уравнение Ландау-Лифшица, нарушается в том случае, когда хотя бы одна из постоянных γ_a, $a = 3 \div 6$ отлична от нуля. Тогда можно ожидать, что наличие таких слагаемых приводит к эволюционным уравнениям, которые не обладают обратимостью движения.

Заметим, что уравнения описанного класса, в общем случае, не являются соленоидальными, то есть не обладают инвариантом $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$.

Литература

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны / М.: Наука, 1967. – 368 с.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред / Теоретическая физика т.8 / М.: Наука, 1982. – 620 с.

3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / М.: Наука, 1967. – 664 с.

4. Академик НАН Украины Виктор Григорьевич Барьяхтар. Жизнь в науке / Нац. акад. наук Украины, Нац. науч. центр «Харьк. физ.-техн. ин-т». – К. : Наукова думка, 2010. – 328 с.

5. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход к теории антиферромагнитных систем // ТМФ. – 1993. – 95:1. – С.58–73. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией / Физика элементарных частиц и атомного ядра.– 1996. – 27. – 2. – С.431-492.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / М.: Наука, 1986.

7. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / М.: Гос. изд. ФМЛ, 1963. – 412 с.

8. Вирченко Ю.П., Д.А. Чурсин Плотность потока магнитного момента сферически симметричного магнетика // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №11(208); 39. – С.191-196.