

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
( **Н И У « Б е л Г У »** )

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

**Кафедра теоретической и математической физики**

**ТЕРМОФОРЕЗ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

**Дипломная работа студента  
очной формы обучения  
направления подготовки 03.03.02 Физика  
4 курса группы 07001210**

**Лифинцев Иван Сергеевич**

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Малай Н.В.

**БЕЛГОРОД - 2016**

## Реферат

Рассмотрен термофорез крупной твердой аэрозольной частицы цилиндрической формы, внутри которой действуют неоднородно распределенные по ее объему тепловые источники. Получены аналитические выражения для полей температуры вне и внутри аэрозольной частицы, а также выражения для силы и скорости термофореза цилиндрической частицы.

## Содержание.

Введение.....	4
I. Постановка задачи. ....	9
II. Решение уравнения теплопроводности. ....	16
III. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления.....	23
IV. Вывод выражения для силы термофореза. ....	34
V. Анализ полученных результатов. ....	36
Заключение. ....	39
Список использованной литературы.....	40

## ***ВВЕДЕНИЕ***

***Актуальность исследования.*** В дипломной работе исследуется поведение аэрозольных частиц несферической формы в вязких неоднородных газообразных средах, внутри которых действуют неравномерно распределенные источники тепла. В настоящее время имеет место огромный интерес установление комплекса физических закономерностей, играющих решающую роль в предсказании характера поведения аэрозольных частиц в газах и газовых смесях. Это обстоятельство неслучайно, так как с каждым годом увеличивается использование аэрозолей в практических целях – промышленности, технике, сельском хозяйстве, медицине и т.д. Образующиеся в результате производственной деятельности человека аэрозоли могут, с одной стороны, содержать ценные вещества, с другой, – оказывать вредное влияние на людей и окружающую среду. В связи с обострением экологической ситуации необходимо решать вопросы очистки промышленных отходов от аэрозольных частиц, природа образования которых может быть произвольной.

Однокомпонентную или многокомпонентную газообразную среду, вместе со взвешенными в ней частицами называют аэродисперсной системой. Аэродисперсные системы находят широкое применение в практической деятельности человека, например, в технике, медицине, сельском хозяйстве и т.д. В связи с этим всестороннее изучение их свойств представляет значительный научный и практический интерес.

На входящие в состав аэродисперсных систем аэрозольные частицы могут действовать силы различной природы, вызывающие упорядоченное движение частиц относительно центра инерции газообразной среды. Так, например, седиментация и электрофорез происходят в поле гравитации и электрической силы. В газообразных средах с неоднородным распределением температуры возникновение упорядоченного движения частиц обусловлено действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей некомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. При этом

движение частиц, обусловленное внешним градиентом температуры, называется термофорезом. Неоднородное распределение температуры в окрестности частиц может возникнуть при их нагреве и охлаждении источниками или стоками тепла произвольной физической или химической природы. Возникающее при этом движение частиц называется теплофоретическим. Частным случаем теплофоретического движения является фотофорез. Фотофоретическое движение возникает при нагреве частиц световым излучением. При неоднородном распределении температуры движение аэрозольных частиц происходит, например, в каналах тепло – и массообменников, в зонах просветления облаков и туманов, устройствах предназначенных для нанесения тонких покрытий из аэрозольных частиц, химических реакторах и т.д. Аэрозольные частицы могут оказывать значительное влияние на протекание физических и физико-химических процессов различного вида в аэродисперсных системах (например, процессов массо – и теплообмена). Это обстоятельство нужно учитывать при нахождении физических величин внутри рассматриваемых систем.

Проблема вынужденного переноса аэрозольных частиц под действием градиентов температуры (термофорез) в газах имеет большое научное и прикладное значение. Явление термофореза всегда сопутствует термодинамически неравновесным системам. Термофоретический перенос аэрозольных частиц играет важную роль в установках по улавливанию аэрозольных примесей; для нанесения тонких покрытий; для описания атмосферных процессов, при получении веществ с заданными свойствами и ряде других областей деятельности человека [1,2].

Твердые и жидкие частицы, находящиеся во взвешенном состоянии в газообразной среде, называются аэрозольными частицами. Для классификации аэрозольных частиц по размерам применяют критерий Кнудсена:  $Kn = \frac{\lambda}{R}$ , где  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега молекул газообразной среды;  $R$  – радиус частицы.

Частицы называют крупными, если  $Kn \leq 0.01$ , умеренно крупными при  $0.01 \leq Kn \leq 0.3$  и мелкими при  $Kn \gg 1$ .

Если на поверхности вещества происходит испарение или конденсация частиц вещества, то такие частицы называются летучими. Нелетучими называются частицы, на поверхности которых фазовый переход не происходит

В настоящей дипломной работе рассматриваются твердые крупные частицы.

Среднее расстояние между аэрозольными частицами у значительной части встречающейся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких условиях учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знании законов динамики движения и тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных аэрозольных частиц. Поэтому изучение закономерностей движения отдельных частиц в газообразных средах является важной актуальной задачей, представляющей значительный теоретический и практический интерес.

Рассмотрение термофоретического движения аэрозольных частиц является достаточно сложной задачей. Это связано с тем, что в газе движение конкретной частицы определяется как поверхностными явлениями (обусловленные непосредственным взаимодействием молекул газообразной среды с поверхностью частицы), так и с объемными эффектами, возникающими из-за неоднородных распределений гидродинамического и температурного полей.

Одна из задач, возникающая при практических приложениях вызвана тем, что многие частицы, встречающиеся в промышленных установках и в природе, имеют форму поверхности отличную от сферической, например, цилиндрическую. В связи с этим возникает как теоретический, так и практический интерес рассмотреть термофоретическое движение цилиндрической аэрозольной частицы.

**Тема исследования.** Термофорез твердой крупной цилиндрической аэрозольной частицы, внутри которой действуют неравномерно распределенные в ее объеме источники тепла.

**Объектом исследования** является изучение явления термофореза в газообразной среде.

**Предметом исследования:** влияние формы поверхности и внутренних источников тепла, неоднородно распределенных в объеме частицы на термофорез крупной аэрозольной частицы цилиндрической формы.

**Цель исследования** –получить аналитические выражения для термофоретической силы, действующей на твердую крупную аэрозольную частицу цилиндрической формы и скорости термофореза с учетом внутренних источников тепла.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие **задачи исследования:**

- ознакомление с историей развития термофореза цилиндрических частиц;
- изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в цилиндрической системе координат;
- получить выражения для поля температуры внутри частицы, с учетом тепловых источников неоднородно распределенных в ее объеме;
- получить выражения для силы и скорости термофореза с учетом внутренних источников тепла;
- провести качественный анализ влияния на силу и скорость термофореза внутренних источников тепла.

**Научная новизна исследования.** В настоящей дипломной работе делается попытка проанализировать явление термофореза в вязкой газообразной среде для твердой крупной аэрозольной частицы цилиндрической формы с учетом внутренних источников тепла.

**Практическая значимость исследования** заключается в том, что его материалы и выводы дополняют и углубляют исследования по данной проблеме и могут быть использованы при разработке общих курсов и факультативов по экологическим вопросам для школ, гимназий, лицеев.

**Апробация исследования.** Основные результаты выпускной квалификационной работы докладывались на Международной научно-практической и научно-методической конференции «*Современные проблемы математики и механики: теория и практика*» (г. Белгород, БУКЭиП, 2016) и по теме выпускной квалификационной работы опубликованы тезисы.

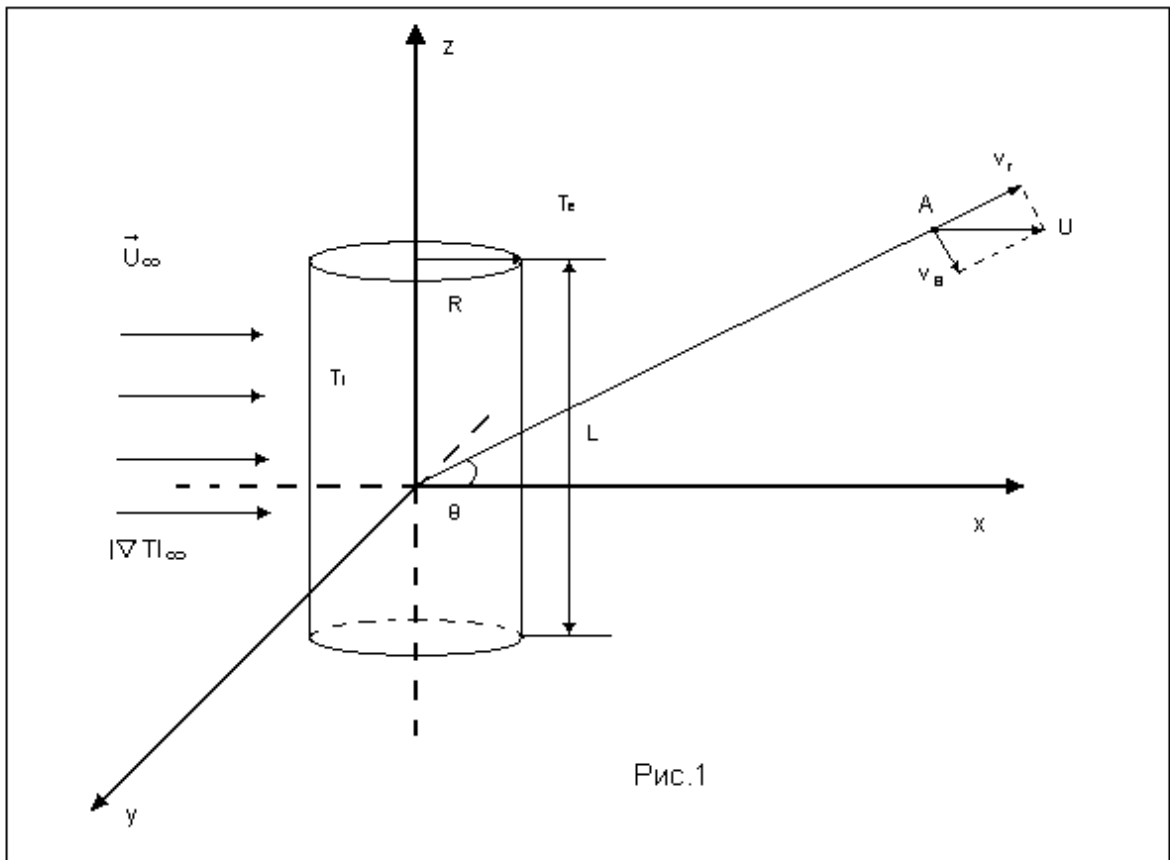
### **Структура работы.**

Дипломная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы.



## Глава I. Постановка задачи

Пусть в неограниченной неподвижной изотропной бинарной газовой смеси создан и поддерживается с помощью внешних источников постоянный градиент температуры  $(\nabla T)_\infty$ . В такую неоднородно нагретую среду помещается крупная цилиндрическая частица радиуса  $R$ . Причем  $R$  значительно меньше ее длины  $L$ . Предположим, что ось частицы перпендикулярна направлению градиента температуры  $(\nabla T)_\infty$ . Свяжем систему отсчета с частицей, причем так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью частицы, а полярная ось  $x$  совпадала с направлением  $(\nabla T)_\infty$  (см. рис.1). При таком выборе системы координат наша задача сводится к анализу обтекания частицы плоскопараллельным потоком газа со скоростью  $U_\infty$ . Определенная в такой системе координат скорость газа на бесконечности, равна с обратным знаком величине скорости термофореза,  $U_{th} = -U_\infty$



Здесь и далее индексы «e» и «i» будем относить соответственно к газообразной среде и частице; индексом «∞» – обозначены параметры газа на бесконечности, т.е. вдали от частицы.

Общая система уравнений газовой динамики нелинейная [3-4], и при решении поставленной выше задачи были сделаны следующие предположения:

1. все процессы, происходящие в системе, будем рассматривать в квазистационарном приближении, что возможно в силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации умеренно крупных и крупных аэрозольных частиц;
2. движение аэрозольных частиц во внешнем заданном поле градиента температуры будем считать происходящим при числах Пекле и Рейнольдса много меньших единицы;
3. частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.
4. задача рассматривается при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы, т.е. выполняется следующее условие  $(T_e - T_s)/T_\infty \ll 1$ . Здесь  $T_e$  – температура газа,  $T_s$  – средняя температура поверхности частицы и  $T_\infty$  – температура газообразной среды вдали от частицы. При выполнении этого условия коэффициенты молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) можно считать постоянными величинами.

При введенных выше предположениях решалась следующая система газодинамических уравнений, описывающая распределения полей скорости  $V_e$ , давления  $P_e$  и температур вне  $T_e$  и внутри  $T_i$  частицы [4]:

$$\rho_e (V_e \cdot \nabla) V_e = -\nabla P_e + \mu_e \Delta V_e \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} V_e = 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta T_e = 0 \quad (1.3)$$

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i} \quad (1.4)$$

Запишем граничные условия, удовлетворяющие нашей задачи в полярной системе координат.

– на поверхности частицы (при  $r = R$ ) справедливы граничные условия (1.6)

– (1.9):

$$V_r = 0, \quad (1.6)$$

$$V_\phi = \frac{K_{TS} \mu_e}{T_e \rho_e \cdot R} \frac{\partial T_e}{\partial \phi}, \quad (1.7)$$

$$\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r}, \quad (1.8)$$

$$T_e = T_i, \quad (1.9)$$

– вдали от цилиндрической частицы (при  $r \rightarrow \infty$ ) они имеют вид (1.10)- (1.13)

:

$$V_r = U_\infty \cos \phi, \quad (1.10)$$

$$V_\phi = -U_\infty \cdot \sin \phi, \quad (1.11)$$

$$T_e = T_\infty + |\nabla T|_\infty r \cos \phi, \quad (1.12)$$

$$P_e \rightarrow P_\infty. \quad (1.13)$$

– и внутри частицы при  $r \rightarrow 0$ , имеем:

$$T_i \neq \infty, \quad (1.14)$$

где  $\rho_e, \lambda_e, \mu_e$  – плотность, теплопроводность и динамическая вязкость газа;  $\lambda_i$  – теплопроводность частицы;  $r, \theta$  – полярные координаты;  $V_r, V_\theta$  – компоненты вектора скорости в полярной системе координат;  $|\nabla T|_\infty$  – величина заданного градиента температуры,  $K_{TS}$  – коэффициент теплового скольжения,  $Q_i$  – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы.

Наличие источников тепла внутри частицы приводит к тому, что средняя температура ее поверхности ( $T_s$ ) может отличаться от температуры окружающей газообразной среды вдали от нее ( $T_\infty$ ). Нагрев поверхности частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики окружающей газообразной среды (вязкости, теплопроводности, плотности) и в конечном итоге на распределение полей скорости, давления и температуры в окрестности. В нашем случае это влияет на термофорез.

Внутренние источники тепла – это модельное представление, удобное для описания реальных процессов, сопровождающихся выделением тепла в объеме аэрозольной частицы. Так можно моделировать нагрев поверхности под действием химической реакции, радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д.

Поскольку поглощенная частицей энергия превращается в тепловую энергию (идет на нагрев частицы), то обозначим через  $q_i(\mathbf{r})$  плотность тепловыделения в объеме частицы и будем называть  $q_i(\mathbf{r})$  плотностью тепловых источников, неоднородно распределенных в ее объеме. Считается, что эта функция задана (см. ниже). Если, например, неоднородный нагрев обусловлен поглощением электромагнитного излучения, то  $q_i(x, y, z)$  определяется из решения электродинамической задачи. Электродинамическая задача, позволяет рассчитать функцию источников тепла в объеме частицы при заданных значениях длины волны, интенсивности излучения, размеров частицы и комплексного показателя преломления [5,6]. При макроскопическом рассмотрении объемная плотность источников тепла равняется с обратным знаком дивергенции вектора плотности потока излучения  $I_0$  (вектора Умова – Пойтинга) [7]:

$$q_i(\mathbf{r}) = -\nabla I_0,$$

где  $I_0 = \frac{c}{4\pi} \text{Re}[E, H]$ ,  $E, H$  – векторы напряженности электрического и магнитного поля внутри частицы, которые описываются уравнениями Максвелла:

$$[\nabla, E] = -ikH, \quad [\nabla, H] = -im^2kE.$$

Здесь  $k = 2\pi/\lambda_0$  – волновое число,  $\lambda_0$  – длина волны падающего излучения,  $m = n_1 + ik_1$  – комплексный показатель преломления вещества частицы,  $n_1, k_1$  – действительная и мнимая части комплексного показателя преломления вещества частицы.

В результате функция  $q_i(r)$  принимает следующий вид [5,7]:

$$q_i(r) = 2\pi k k_1 I_0 B(r),$$

где  $B(r) = |E(r)|^2 / E_0^2$  – безразмерная функция, описывающая распределение электрического поля в объеме частицы,  $E_0$  – модуль напряженности электрического поля падающей волны. Функция  $B(r)$  может быть рассчитана на основе строгой электродинамической теории Ми [5].

Следует отметить, что возможность существования неоднородности распределения поглощенной энергии излучения в частице зависит от оптических констант материала частицы и параметра дифракции  $\rho = 2\pi R_0 / \lambda_0$ ,  $R_0$  – эффективный радиус частицы. Таким образом, выражение для плотности энергии излучения в частице, трансформируемой в тепло, можно записать в виде [5,7]:

$$q_i = \frac{4\pi n_1 k_1}{n_s} I_0 B,$$

где  $n_s$  – показатель преломления среды.

На поверхности аэрозольной частицы (1.6) – (1.9) учтено: непроницаемость поверхности частицы для нормальной компоненты и тепловое скольжение для касательной компоненты массовой скорости  $V_e$ ; непрерывность радиального потока тепла. Вдали от частицы ( $r \rightarrow \infty$ ) справедливы граничные

условия (1.10) – (1.13) и конечность физических величин, характеризующих аэрозольную частицу при  $r \rightarrow 0$  учтено в (1.14). Коэффициент  $K_{TS}$  определяются методами кинетической теории газов (из решения уравнения Больцмана в слое Кнудсена [8]). При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса и энергии, равных единице газокINETические коэффициенты (в случае плоской поверхности) равен соответственно:  $K_{TS} = 1.152$  [8].

Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты  $\rho_e, \mu_e, \lambda_e$  и сохраняющиеся в процессе движения цилиндрической частицы величины –  $R, T_\infty, (\nabla T)_\infty$ . Из этих параметров можно составить три безразмерные комбинации:  $\varepsilon = R(\nabla T)_\infty / T_\infty \ll 1$  – параметр, характеризующий перепад температуры на размере частицы, числа Рейнольдса  $Re = (\rho_e U_\infty R) / \eta_e \ll 1$  и Пекле  $Pe = (c_{pe} U_\infty R \rho_e) / \lambda_e \ll 1$ ,  $c_{pe}$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Обезразмерим уравнения и граничные условия следующим образом:

$$U_e = V_e / U_\infty, t_k = T_k / T_\infty \quad (k = e, i), p_e = P_e / P_\infty.$$

При  $\varepsilon \ll 1$  набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений газовой динамики можно использовать метод теории возмущения, т.е.

$$U_e = U_e^{(0)} + \varepsilon U_e^{(1)} + \dots, p_e = p_e^{(0)} + \varepsilon p_e^{(1)} + \dots, t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \dots \quad (1.15)$$

При нахождении силы и скорости термофореза мы ограничимся поправками первого порядка малости по  $\varepsilon$ .

Общая сила, действующая на единицу длины аэрозольной цилиндрической частицы, определяется интегрированием тензора вязких напряжений по поверхности частицы и имеет следующий вид [3,4]

$$F = R \int_0^{2\pi} (p_{rr} \cos \theta - p_{r\phi} \sin \phi) d\phi, \quad (1.16)$$

где  $p_{rr}, p_{r\theta}$  – компоненты тензора вязких напряжений и в цилиндрической си-

стеме координат равны:  $p_{rr} = -P_e + 2\mu_e \frac{\partial V_r}{\partial r}$ ,  $p_{r\phi} = \mu_e \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\phi}{r} \right)$ .

## Глава II. Решение уравнения теплопроводности

Чтобы найти силу и скорость термофореза необходимо знать поле температуры в окрестности аэрозольной частицы. Для этого необходимо решить уравнения (1.3) – (1.4). В общем случае уравнение теплопереноса имеет следующий вид [4]:

$$\chi \Delta T_e = (V_e \cdot \nabla) T_e, \quad (2.1)$$

где  $\chi$  – коэффициент температуропроводности [4].

Скорость аэрозольной частицы в поле градиента температуры по порядку величины равна

$$\frac{\mu_e}{\rho_e T_e} \frac{\Delta T}{L_0} = \frac{\mu_e}{\rho_e T_e} |\nabla T|_\infty. \quad (2.2)$$

Здесь  $\frac{\Delta T}{L_0}$  – средний градиент температуры вдали от частицы.

Этот градиент равен отношению перепада температуры  $\Delta T$  на конечном отрезке  $L_0$  к величине этого отрезка. Скорость термофореза равна взятой с обратным знаком скорости центра инерции среды на большом расстоянии от частицы, поэтому

$$|U_{th}| \sim \frac{\mu_e}{\rho_e T_e} |\nabla T|_\infty \quad (2.3)$$

Отношение правой части уравнения (2.1) к его левой части равно

$$\frac{|U_{th} \nabla T_e|}{\chi \Delta T_e} \sim \frac{\mu R}{\rho \chi T_e} |\nabla T|_\infty \sim \frac{R}{T_e} |\nabla T|_\infty = \varepsilon. \quad (2.4)$$

В (2.4) учтено, что для большинства газов  $\frac{\mu_e}{\rho_e \chi} \sim 1$ .

Покажем, что для реальных условий величина  $\varepsilon = \frac{R |\nabla T|_\infty}{T_e} \ll 1$ .

Найдем, при каких значениях  $|\nabla T|_\infty$  нарушается последнее соотношение. Для этого запишем:



$$\frac{|\nabla T|_{\infty}}{T_e} = \frac{1}{R}. \quad (2.5)$$

Верхняя граница твердых гидрозольных частиц порядка 300 микрон. Отсюда для  $|\nabla T|_{\infty}$  следует:

$$|\nabla T|_{\infty} = \frac{T_e}{R} = \frac{3 \cdot 10^2 \text{ K}}{3 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 10^4 \frac{\text{K}}{\text{см}}. \quad (2.6)$$

Такой градиент температуры никогда не реализуется в промышленных и природных условиях. Не наблюдается даже градиенты температуры порядка  $3000 \frac{\text{K}}{\text{см}}$ .

Следовательно, в уравнении (2.1) можно пренебречь правой нелинейной частью, и мы получаем следующие уравнения, описывающие распределения полей температур внутри и вне крупной аэрозольной частицы цилиндрической формы:

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}, \quad \Delta T_e = 0. \quad (2.7)$$

Найдем сначала общее решение уравнения

$$\Delta t = 0 \quad (2.8)$$

в полярной системе координат  $(y, \phi)$ .

Уравнение (2.8) решаем методом разделения переменных, т.е.

$$t(y, \phi) = R(y)F(\phi),$$

или в развернутом виде

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial t(y, \phi)}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 t(y, \phi)}{\partial \phi^2} = 0$$

Подставляя сюда  $t(y, \phi) = R(y)F(\phi)$ , разделяя переменные (разделим затем все на  $\frac{y^2}{R F}$ ) и, обозначив константу разделения через  $n^2$ , получаем систему из двух уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\phi^2} = n^2; \\ \frac{y}{R} \frac{d}{dy} \left( y \frac{dR}{dy} \right) = n^2; \end{array} \right.$$

Решая уравнение :

$$\frac{d^2 F}{d\phi^2} + F n^2 = 0.$$

методом Эйлера, получаем следующее решение:

$$F(\phi) = A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi), \text{ где } n=0,1,2,3\dots$$

Найдем решение уравнения

$$\frac{y}{R} \frac{d}{dy} \left( y \frac{dR}{dy} \right) = n^2;$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая.

а). при  $n=0$  оно принимает следующий вид:

$$y \frac{d}{dy} \left( y \frac{dR}{dy} \right) = 0;$$

его решением является функция:

$$R(y) = N_0 \ln(y) + D.$$

б). при  $n>1$  имеем:

$$y^2 \frac{d^2 R}{dy^2} + y \frac{dR}{dy} - n^2 R = 0$$

Решая это уравнение методом Эйлера, получаем:

$$R(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( N_n y^n + \frac{D_n}{y^n} \right).$$

Таким образом, общее решение уравнения Лапласа в полярных системах координат  $\Delta t = 0$  имеет вид:

$$t(y, \phi) = N_0 \ln(y) + D_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (N_n y^n + \frac{D_n}{y^n}) (A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi))$$

Константы интегрирования  $N_0, D_0, N_n, D_n, A_n, B_n$  – определяются из граничных условий. В частности, мы рассматриваем термофорез цилиндрической частицы с радиусом  $R$  и для граничного условия вдали от частицы

$$T_e|_{\rho \rightarrow \infty} = |\nabla T_\infty| \rho \cos(\phi)$$

получаем:

$$t_e = 1 + \cos(\phi) \left( \frac{|\nabla T_e| R}{T_\infty} + \frac{D_1}{y} \right) \quad (2.9)$$

где  $N_1 = \frac{|\nabla T_e| R}{T_\infty}$ ;  $N_n = 0, (n \geq 2), N_0=0; D_0=1; A_n=0, n \geq 2; B_n=0, n \geq 1.$

Найдем температуру внутри частицы, для этого необходимо решить следующее уравнение:

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i} \quad (2.10)$$

или в развернутом виде:

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial t_i}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 t_i}{\partial \phi^2} = -\frac{q_i}{\lambda_i} \frac{R^2}{T_\infty}. \quad (2.11)$$

Это есть неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка и его решение будем искать методом разделения переменных. Для этого сначала правую часть уравнения (2.11) представим в виде:

$$-\frac{q_i}{\lambda_i} \frac{R^2}{T_\infty} = q_0(y) + q_1(y) \cos(\phi). \quad (2.12)$$

а). найдем сначала  $q_0$ . Для этого умножим (2.12) на  $d\phi$  и проинтегрируем от нуля  $0$  до  $2\pi$ , получаем:

$$\int_0^{2\pi} \left( -\frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty} \right) d\phi = q_0(y) 2\pi,$$

и, следовательно,

$$q_0(y) = \left( -\frac{R^2}{2\pi\lambda_i T_i} \right) \int_0^{2\pi} q_i(y) d\phi$$

б). найдем  $q_1(y)$ . Поступая аналогичным образом, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty} \right) \cos(\phi) d\phi &= \int_0^{2\pi} q_0(y) \cos(\phi) d\phi + \\ &+ \int_0^{2\pi} q_1(y) \cos^2(\phi) d\phi, \\ -\frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty} \int_0^{2\pi} q_i(y) \cos(\phi) d\phi &= q_1(y) \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi = \\ &= \frac{q_1}{2} (2\pi) = \pi q_1, \end{aligned}$$

$$q_1(y) = -\frac{R^2}{\pi\lambda_i T_\infty} \int_0^{2\pi} q_i(y) \cos(\phi) d\phi. \quad (2.13)$$

Поскольку функции  $q_0(y)$  и  $q_1(y)$  нами получены, то мы можем уже и решить само уравнение (2.11):

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial t_i}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 t_i}{\partial \phi^2} = q_0(y) + q_1(y) \cos(\phi).$$

Подставляем сюда выражение

$$t_i(y, \phi) = t_{i_0}(y) + t_{i_1}(y) \cos(\phi). \quad (2.14)$$

и после сокращения на  $\cos(\phi)$  получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left[ y \left( \frac{dt_{i_0}}{dy} \right) \right] = q_0; \\ \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left[ y \left( \frac{dt_{i_1}}{dy} \right) \right] - \frac{t_{i_1}}{y^2} = q_1; \end{cases}$$

Таким образом, мы получили два неоднородных уравнения, которые мы будем решать в виде:

$$t_n(y) = t_n^{одн} + t_n^{част}. \quad (2.15)$$

Заметим, что общим решением обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка [10,11]

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

является функция

$$y = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \varphi_2 \int_{x_0}^x \frac{\varphi_1 f}{W} dx - \varphi_1 \int_{x_0}^x \frac{\varphi_2 f}{W} dx,$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – функции, являющиеся решением однородного уравнения, а  $W$  – определитель Вронского.

С учетом выше сказанного, получаем:

$$t_{i_0}(y) = M_0 \ln(y) + M_1 + \ln(y) \int_1^0 \Psi_0 y dy - \int_1^0 \Psi_0(y) \ln(y) dy, \quad (2.16)$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий. Таким образом, мы нашли общие решения уравнений теплопроводности вне и внутри частицы:

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_1}, \quad \Delta T_e = 0,$$

которые удовлетворяют граничным условиям конечности температуры внутри частицы и вдали от частицы (1.12), (1.14):

$$t_e(y, \phi) = 1 + \cos(\phi) \left( \frac{|\nabla T_\infty|}{T_\infty} y + \frac{D_1}{y} \right), \quad (2.18)$$

$$t_i(y, \phi) = t_{i_0}(y) + t_{i_1}(y) \cos(\phi), \quad (2.19)$$

где

$$t_{i_0}(y) = M_0 + N_0 \ln(y) + \ln(y) \int_1^0 \Psi_0(y) dy - \int_1^0 \Psi_0 \ln(y) dy,$$

$$t_{i_1}(y) = \Gamma y + \frac{K}{y} + \frac{1}{2} \left[ y \int_1^y \frac{\Psi_1}{y} dy - \frac{1}{y} \int_1^y \Psi_1 y dy \right],$$

$$\psi_0 = y q_i, \psi_1 = y q_1, N_0 = - \int_1^0 \psi_0 dy, K = \int_1^0 \psi_1 y dy,$$

$$q_0(y) = - \frac{R^2}{2\pi \lambda_i T_\infty} \int_0^{2\pi} q_i \cos(\phi) d\phi,$$

$$q_1(y) = - \frac{R^2}{\pi \lambda_i T_\infty} \int_0^{2\pi} q_i \cos(\phi) d\phi.$$

Оставшиеся постоянные интегрирования определяем из граничных условий на поверхности частицы и они имеют следующий вид:

$$D_1 = \frac{|\nabla T|_\infty \cdot R}{T_\infty} \cdot \frac{\left( \frac{\lambda_e}{\lambda_i} - 1 \right)}{1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_i}} + K \frac{2}{1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_i}}, M_0 = 1, N_0 = 0,$$

$$\Gamma = 2 \frac{|\nabla T|_\infty \cdot R}{T_\infty} \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_i}} + K \frac{1 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i}}{1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_i}}$$

### **Глава III. Решение уравнений гидродинамики.**

#### **Нахождение полей скорости и давления**

Наибольшую трудность представляет решение уравнения гидродинамики – уравнение Навье-Стокса.

$$\rho_e (V_e \cdot \nabla) V_e = -\nabla P_e + \eta_e \Delta V_e \quad (3.1)$$

В это уравнение входит нелинейный (конвективный) член  $(V_e \cdot \nabla) V_e$ . Если число Рейнольдса много меньше единицы, то этот член квадратичен по скорости и Стокс пренебрег им при решении задачи обтекания твердой частицы сферической формы [12,13,14]. В литературе такой способ решения уравнения Навье-Стокса получил название «метод Стокса».

Однако особенностью обтекания цилиндрической частицы в гидродинамике заключается в том, что обычный метод решения уравнений гидродинамики (разложение полей скорости и давления в ряды по малому параметру как это сделал Стокс) не проходит. В литературе это получило название «парадокс Стокса» [12,13,14]. Специально для случая обтекания цилиндрической частицы в 1910 году Озееном был разработан новый метод решения уравнений гидродинамики, который в последствии в литературе был назван «метод Озеена» [12,13,14].

Исследования показали, что если в задаче об обтекании кругового цилиндра плоскопараллельным потоком вязкой жидкостью в основных уравнениях отбросить полностью инерционные члены, то задача не имеет решения. Форма цилиндра при этом не имеет никакого значения. Высказанное утверждение, справедливо для цилиндра произвольной формы.

Озеен показал на примере движения сферы в вязкой жидкости, что мы получим гораздо лучшие результаты, если в уравнениях движения оставим только важнейшие из инерционных членов, отбросив остальные инерционные члены.

Рассмотрим задачу об обтекании цилиндром потоком, имеющим на бесконечности скорость, параллельную оси  $Ox$  и равную  $U_\infty$ . Озеен предложил заменить скорость  $V$  на  $U_\infty$ , т.е. в далеких от цилиндра точках имеем

$$V_x = U_\infty + V'_x, V_y = U_\infty + V'_y,$$

где  $V'_x, V'_y$  – малые величины.

Рассматривая теперь инерционные члены, стоящие в левой части уравнения (3.1) мы увидим, что они отличаются от

$$U_\infty \frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad U_\infty \frac{\partial V_y}{\partial y}, \quad (3.2)$$

малыми членами второго порядка, если считать  $V'_x, V'_y$  и инерционные члены за малые члены первого порядка. Поэтому мы получим гораздо лучшее приближение в далеких от цилиндра областях, если заменим уравнения (3.1) следующими обобщенными уравнениями Стокса: (уравнения Озеена)

$$\left. \begin{aligned} U_\infty \frac{\partial V_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial P_e}{\partial x} + \nu_e \Delta V_x, \\ U_\infty \frac{\partial V_y}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial P_e}{\partial y} + \nu_e \Delta V_y, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} (3.3)$$

где  $\nu_e = \eta_e / \rho_e$  – кинематическая вязкость газовой среды.

Уравнения (3.3) имеют очень простой вид, если их записать в векторной форме:

$$U_\infty \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_e} \text{grad } P_e + \nu_e \Delta V_e, \quad \text{div } V_e = 0 \quad (3.3)$$

Нужно отметить, что для области газа, непосредственно примыкающей к цилиндру, замена инерционных членов величинами (3.2) ничуть не лучше за-



мены этих членов нулями, так как в этой области  $V_x, V_y$  малы (на самой поверхности  $V_x, V_y$  обращаются в нуль), и мы не можем использовать факт малости  $V_x'$  по сравнению с  $U_\infty$ . Однако, поскольку мы рассматриваем движения с малыми числами Рейнольдса, то, как полные инерционные члены, так и заменяющие их в наших уравнениях выражения (3.2) будут малы по сравнению с членами, происходящими от сил вязкости. Следовательно, в области, примыкающей к цилиндру, уравнения (3.3) и уравнения Стокса являются в одинаковой мере хорошими приближениями к полной системе дифференциальных уравнений (3.1).

Граничные условия, которыми должно удовлетворять решение системы (3.2):

$$\left. \begin{array}{l} V_x = V_y = 0 \quad \text{при } r = R \\ V_x \rightarrow U_\infty, V_y \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

Для решения этой задачи мы применим метод Ламба[12,13,14]. Образует, расхождение и вихрь от обеих частей первого из уравнений (3.3), принимая во внимание второе из этих уравнений, придем к формулам:

$$\Delta P_e = 0, \quad (3.5)$$

$$U_\infty \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \nu \Delta \Omega, \quad (3.6)$$

где  $\Omega = \text{rot} \cdot V$ .

Используем теперь симметрию движения относительно оси  $Ox$ .

$$\Omega_x = 0. \quad (3.7)$$

тогда условие

$$\text{div} \Omega = \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = 0$$

приводит к равенству

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = 0,$$

откуда следует, что

$$\Omega_y = -\frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \Omega_z = \frac{\partial \chi}{\partial y}. \quad (3.8)$$

И так мы имеем формулы:

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Сразу видно, что частным решением этой системы является

$$V_x = -\chi, \quad V_y = 0,$$

и общим же решением будет

$$V_x = -\chi + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}, \quad V_y = 0. \quad (3.9)$$

Подстановка значений (3.8) в уравнение (3.6) приводит к равенствам, которые будут удовлетворены, если

$$U_\infty \frac{\partial \chi}{\partial x} = v_e \Delta \chi.$$

С другой стороны, подставляя значения (3.9) в уравнение неразрывности, находим:

$$\Delta \mathcal{G} = \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

и, на основании предыдущего равенства,

$$\Delta \mathcal{G} = \frac{v_e}{U_\infty} \Delta \chi,$$

откуда видно, что следует принять

$$\mathcal{G} = \frac{v_e}{U_\infty} \chi + \varphi,$$

где  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3.10)$$

Введем для краткости обозначение  $k = U_\infty / 2v_e$ , тогда выражения для составляющих скорости примут следующий окончательный вид:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi; \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y}. \quad (3.11)$$

причем функция  $\chi$  соответствует уравнению

$$\Delta \chi - 2k \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0. \quad (3.12)$$

Подставляя значения (3.11) в уравнения (3.2), можем решить эти уравнения относительно  $P_e$ , в результате получим:

$$P_e = P_\infty - \rho_e U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3.13)$$

Уравнению (3.10) удовлетворяет функция  $\ln r$ , а также  $\frac{\partial \ln r}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}$  и т.д.

Поэтому мы принимаем

$$\varphi = A_0 \ln r + A_1 \frac{\partial \ln r}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \dots \quad (3.14)$$

В уравнении (3.12) делаем стандартную подстановку

$$\chi = e^{kx} \psi, \quad (3.15)$$

тогда получаем для определения  $\psi$  уравнение типа Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k^2 \psi = 0$$

имеющее в полярных координатах  $(r, \theta)$  вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - k^2 \psi = 0 \quad (3.16)$$

Отыскиваем те решение этого уравнения, которое зависит только от  $r$  и, следовательно, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - k^2 \psi = 0 \quad (3.17)$$

Решениями этого последнего уравнения являются функции Бесселя с чисто мнимым аргументом[10,11]:

$$I_0(kr) = J_0(ikr) \text{ и } K_0(kr) = \frac{\pi i}{2} H_0^1(ikr).$$

Однако  $I_0(kr)$  безгранично возрастает вместе с  $r$ , в то время как  $K_0(kr)$  стремится к 0 при  $r \rightarrow \infty$ ; поэтому единственным приемлемым для нас решением уравнения (3.17) является функция  $K_0(kr)$ . Функции  $\frac{\partial K_0(kr)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 K_0(kr)}{\partial x^2}$

,...также будут решениями уравнения (3.15).

Мы можем по этому принять:

$$\chi = -U + e^{kx} \left\{ C_0 K_0(kr) + C_1 \frac{\partial K_0(kr)}{\partial x} + C_2 \frac{\partial^2 K_0(kr)}{\partial x^2} + \dots \right\}. \quad (3.18)$$

Так как

$$\frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \phi}{r}, \quad \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} = -\frac{\cos 2\phi}{r^2}, \dots,$$

то для  $\phi$  находим следующее разложение:

$$\phi = A_0 \ln r + A_1 \frac{\cos \phi}{r} - A_2 \frac{\cos 2\phi}{r^2} + \dots \quad (3.19)$$

С другой стороны, мы имеем при малых  $kr$  разложения:

$$I_0(kr) = 1 + \frac{1}{2^2} (kr)^2 + \frac{(kr)^4}{(2 \cdot 4)^2} + \dots$$

$$K_0(kr) = -I_0(kr) \ln \left( \frac{1}{2} \gamma kr \right) + \frac{k^2 r^2}{2^2} + \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{k^4 r^4}{(2 \cdot 4)^2} + \dots,$$

где  $\gamma$  - постоянная Маскарони ( $\gamma = 1,7811$ ;  $\ln \gamma = 0,57722$ ). Ограничиваясь самым первым приближением, мы можем принять, что

$$K_0(kr) \approx -\ln \left( \frac{1}{2} \gamma kr \right),$$

$$\frac{\partial K_0(kr)}{\partial x} \approx -\frac{1}{r} \frac{x}{r} = -\frac{\cos \phi}{r};$$

поэтому вблизи цилиндра считая  $kr$  малым, будем иметь приближенно

$$\chi = -U - C_0 \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) + k r \cos \phi \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) \right] - C_1 \frac{\cos \phi}{r}. \quad (3.20)$$

Теперь мы можем вычислить по формулам

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi \cos \phi \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} + \frac{1}{2kr} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} + \chi \sin \phi \end{cases} \quad (3.21)$$

Найдем частные производные от функций  $\chi$  и  $\varphi$  по  $\partial r$  и по  $\partial \theta$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A_0}{r} - \frac{A_1}{r} \cdot \cos \phi + 2 \cdot \frac{A_2}{r^3} \cdot \cos 2\phi - \dots \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{A_1}{r} \cdot \sin \phi + 2 \cdot \frac{A_2}{r^2} \cdot \sin 2\phi - \dots \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ -U - C_0 \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) + k r \cos \phi \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) \right] - \frac{C_1}{r} \cdot \cos \phi \right\} = -\frac{C_0}{r} - \\ - C_0 k \cdot \cos \phi \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) - \frac{C_1}{r^2} \cdot \cos \phi \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ -U - C_0 \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) + k r \cdot \cos \phi \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) \right] - \frac{C_1}{r} \cdot \cos \phi \right\} = \frac{C_1}{r} \cdot \sin \phi + \\ + C_0 k r \sin \phi \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Подставляя (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) в систему уравнений (3.21), полу-

чим:

$$\begin{aligned} V_r = \frac{A_0}{r} - \frac{A_1}{r^2} \cdot \cos \phi + 2 \cdot \frac{A_2}{r^3} \cdot \cos \phi - \frac{C_0}{2kr} - \frac{C_0}{2} \cos \phi \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) - \frac{C_0}{2} \cos \phi + \frac{C_1}{2kr^2} + \\ + U_\infty \cos \phi + C_0 \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) + k r \cos \phi \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k r \right) \right] \cdot \cos \phi + \frac{C_1}{r} \cdot \cos^2 \phi \end{aligned}$$

$$V_\phi = -\frac{A_1}{r} \cdot \sin \phi + 2 \cdot \frac{A_2}{r^3} \cdot \sin 2\phi + \frac{C_0}{2kr} \cdot kr \sin \phi \ln \left( \frac{1}{2} \gamma kr \right) + \frac{C_1}{r^2} \cdot \sin \phi - U_\infty \sin \phi -$$

$$- C_0 \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \gamma kr \right) + kr \cos \phi \ln \left( \frac{1}{2\gamma kr} \right) \right] \cdot \sin \phi - \frac{C_1}{r} \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi$$

при вычислениях мы отбрасываем некоторые члены, малые в сравнении с оставляемыми, а именно, вычисляя  $\chi \cos \phi$  и  $\chi \sin \phi$ , мы пользуемся более упрощенным выражением для  $\chi$ :

$$\chi = -U - C_0 \ln \left( \frac{1}{2} \gamma kr \right);$$

кроме того, в выражении для  $\phi$  берутся только два первых члена, тогда получаем окончательные выражения для  $V_r$  и  $V_\theta$ :

$$\begin{cases} V_r = \frac{A_0}{r} - \frac{C_0}{2kr} + \left[ U_\infty + \frac{C_0}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \gamma kr \right) - \frac{A_1}{r^2} - \frac{C_0}{2} + \frac{C_1}{2kr^2} \right] \cdot \cos \phi \\ V_\theta = \left[ -\frac{A_1}{r^2} - \frac{C_0}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \gamma kr \right) + \frac{C_1}{2kr^2} - U_\infty \right] \cdot \sin \phi \end{cases} \quad (3.26)$$

Полагая в полученных формулах  $r = R$ , составляя равенства  $V_r(R, \phi) = V_\theta(R, \phi) = 0$  и приравнявая 0 коэффициенты при 1,  $\cos \phi$  и  $\sin \theta$  приходим к трем уравнениям для определения четырех коэффициентов:  $A_0$ ,  $A_1, C_0, C_1$ :

$$\begin{cases} \frac{A_0}{R} - \frac{C_0}{2kR} = 0 \\ \frac{A_0}{R^2} + U_\infty - \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \ln \left( \frac{1}{k} \gamma kR \right) \right] + \frac{C_1}{2kR^2} = 0 \\ -\frac{A_1}{R^2} - U_\infty - \frac{C_0}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \gamma kR \right) + \frac{C_1}{2kR^2} = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений:

$$\frac{A_0}{R^2} + U_\infty - \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \ln \left( \frac{1}{k} \gamma kR \right) \right] + \frac{C_1}{2kR^2} + \frac{A_1}{R^2} + U_\infty + \frac{C_0}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \gamma kR \right) - \frac{C_1}{2kR^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
2U_\infty + \frac{C_0}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right) + \frac{C_0}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right) - \frac{C_0}{2} &= 0 \\
C_0 \left[ 1 - 2 \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right) \right] &= 4U_\infty, \\
C_0 &= \frac{4U_\infty}{1 - 2 \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right)}, \\
A_0 &= \frac{2U_\infty}{k \left[ 1 - 2 \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right) \right]} = \frac{4v_e}{1 - 2 \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right)}, \\
A_1 - \frac{C_1}{2k} &= - \frac{U_\infty R^2}{1 - 2 \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right)}
\end{aligned}$$

При принятой степени приближения коэффициенты  $A_1$  и  $C_1$  по отдельности определены быть не могут. Подставляя найденные значения коэффициентов в формулы (3.26), находим выражения для проекции скоростей, пригодные в области вблизи цилиндра:

$$\begin{aligned}
V_r &= \frac{U_\infty \cos \phi}{1 - 2 \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right)} \left[ -1 + \frac{R^3}{r^2} + 2 \ln \frac{r}{R} \right] \\
V_\theta &= - \frac{U_\infty \sin \phi}{1 - 2 \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right)} \left[ 1 - \frac{R^2}{r^2} + 2 \ln \frac{r}{R} \right]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

На больших расстояниях от цилиндра, беря только члены, содержащие  $A_0$  и  $C_0$ , и рассматривая абсолютное движение цилиндра в газе, покоящейся на бесконечности, будем иметь:

$$\begin{aligned}
V_r &= \frac{A_0}{r} + \frac{1}{2} C_0 e^{kr \cos \phi} \left[ K_0'(kr) - \cos \phi K_0(kr) \right], \\
V_\phi &= \frac{1}{2} C_0 e^{kr \cos \phi} K_0(kr) \sin \phi.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Приведем теперь формулу для давления; вследствие (3.5) и (3.6) имеем:

$$P_e = P_\infty - \rho_e U_\infty A_0 \frac{\cos \phi}{r} + \rho_e U_\infty A_1 \frac{\cos 2\phi}{r^2} + \dots$$

и, ограничиваясь необходимым приближением, получаем

$$P_e = P_\infty - \rho_e U_\infty A_0 \frac{\cos \phi}{r} \quad (3.29)$$

Вычислим силу, действующую на цилиндр; общая формула [4]

$$F = \int_S (p_{rr} \cos \phi - p_{r\theta} \sin \phi) ds$$

в данном случае упрощается;

$$F = R \int_0^{2\pi} (p_{rr} \cos \phi - p_{r\theta} \sin \phi) d\phi, \quad (3.30)$$

где  $p_{rr}$  и  $p_{r\theta}$  – компоненты тензора вязких напряжений [4].

Подставляя (3.30) полученные выше выражения и после интегрирования, получаем

$$F = 2\pi \rho_e A_0 \quad (3.31)$$

Подставляя найденное выше значение  $A_0$ , получаем формулу Ламба для величины сопротивления, испытываемого цилиндром при его движении в газе, причем эта сила, отнесенная к единице длины цилиндра равна

$$F = \frac{8\pi\eta_e U_\infty}{1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma k R\right)} \quad (3.32)$$

Таким образом, используя метод Ламба, нами получены выражения для полей скорости и давления в окрестности цилиндрической частицы, и они имеют следующий вид:



$$\left\{ \begin{array}{l} V_r = \frac{A_0}{r} - \frac{C_0}{2kr} + \left[ U_\infty + \frac{C_0}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\gamma kr\right) - \frac{A_1}{r^2} - \frac{C_0}{2} + \frac{C_1}{2kr^2} \right] \cdot \cos\phi \\ V_\phi = \left[ -\frac{A_1}{r^2} - \frac{C_0}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\gamma kr\right) + \frac{C_1}{2kr^2} - U_\infty \right] \cdot \sin\phi \\ P_e = P_\infty - \rho_e U_\infty A_0 \frac{\cos\phi}{r} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

где  $A_0, C_0, A_1, C_1$  – постоянные интегрирования,  $k = U_\infty \rho_e / 2\mu_e$ ,  $\ln \chi = 0.5772$ .

#### Глава IV. Вывод выражения для силы и скорости термофореза.

В главе 3 используя метод Ламба, нами были получены выражения для полей скорости и давления в окрестности цилиндрической частицы, и они имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_r = \frac{A_0}{r} - \frac{C_0}{2kr} + \left[ U_\infty + \frac{C_0}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\chi kr\right) - \frac{A_1}{r^2} - \frac{C_0}{2} + \frac{C_1}{2kr^2} \right] \cdot \cos\phi \\ V_\phi = \left[ -\frac{A_1}{r^2} - \frac{C_0}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\chi kr\right) + \frac{C_1}{2kr^2} - U_\infty \right] \cdot \sin\phi \\ P_e = P_\infty - \rho_e U_\infty A_0 \frac{\cos\phi}{r} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

где  $A_0, C_0, A_1, C_1$  – постоянные интегрирования,  $k = U_\infty \rho_e / 2\mu_e$ ,  $\ln \chi = 0.5772$ .

Учитывая (4.1) можно найти полную силу, действующую на аэрозольную умеренно крупную частицу цилиндрической формы. Полная сила, как мы отмечали в главе 1, определяется интегрированием тензора вязких напряжений по поверхности частицы и имеет следующий вид [4]

$$F = R \int_0^{2\pi} (p_{rr} \cos\phi - p_{r\theta} \sin\phi) d\phi, \quad (4.2)$$

где  $p_{rr}, p_{r\phi}$  – компоненты тензора вязких напряжений и в цилиндрической системе координат равны:

$$p_{rr} = -P_e + 2\eta_e \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad p_{r\phi} = \eta_e \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\phi}{r} \right).$$

Вычисляя компоненты тензора вязких напряжений с использованием (4.1) и после интегрирования, получаем

$$F = 2\pi \rho_e A_0 \quad (4.3)$$

Постоянная интегрирования  $A_0$  определяется из граничных условий на поверхности твердой крупной аэрозольной частицы цилиндрической формы и равна

$$A_0 = 2 \frac{U_\infty - \frac{K_{TS}\mu_e}{T_\infty\rho_e} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_1}\right)}{1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_1}} \cdot |\nabla T|_\infty}{\left\{ \left[ 1 - \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right) \right] - \frac{1}{2} \right\}} \quad (4.4)$$

Подставляя  $A_0$  в (4.3) получаем выражение для полной силы, действующей на единицу длины крупной аэрозольной цилиндрической частицы

$$F = \frac{4\pi\mu_e}{\left\{ \left[ 1 - \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right) \right] - \frac{1}{2} \right\}} \times \left\{ U_\infty - \frac{K_{TS}\mu_e}{T_\infty\rho_e} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_1}\right)}{1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_1}} \cdot |\nabla T|_\infty \right\}$$

Из этой формулы видим, что полученная сила, действующая на единицу цилиндра, аддитивно складывается из термофоретической силы  $F_{th}$  и силы сопротивления среды  $F_c$

$$F = F_{th} + F_c, \quad (4.5)$$

где

$$F_{th} = -4\pi \frac{K_{TS}\mu_e^2}{T_\infty\rho_e} \frac{\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_1}\right)}{\left\{ \left[ 1 - \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right) \right] - \frac{1}{2} \right\} \left( 1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_1} \right)} |\nabla T|_\infty \quad (4.6)$$

$$F_c = 4\pi\mu_e \frac{U_\infty}{\left\{ \left[ 1 - \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right) \right] - \frac{1}{2} \right\}}, \quad (4.7)$$

Как мы выше отмечали, поскольку частица движется равномерно, то это означает, что полная сила, действующая на нее равна нулю и скорость термофореза равна с обратным знаком величине скорости  $U_\infty$ . Приравнивая выражение (4.5) к нулю получаем выражение для скорости термофореза умеренно крупной аэрозольной частицы цилиндрической формы

$$U_{\text{th}} = -\frac{K_{\text{TS}}\mu_e}{T_\infty\rho_e} \frac{\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)}{\left(1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)} |\nabla T|_\infty \quad (4.8)$$

## Глава 5. Анализ полученных результатов

Используя метод Ламба для гидродинамической части и уравнения Лапласа для теплопереноса (уравнение теплопроводности) в дипломной работе получены выражения для термофоретической силы и скорости твердой умеренно крупной аэрозольной частицы цилиндрической формы, которые имеют следующий вид:

$$F_{th} = -4\pi \frac{K_{TS} \mu_e^2}{T_\infty \rho_e} \frac{\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)}{\left\{ \left[ 1 - \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k R\right) \right] - \frac{1}{2} \right\} \left( 1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right)} |\nabla T|_\infty, \quad (5.1)$$

$$U_{th} = -\frac{K_{TS} \mu_e}{T_\infty \rho_e} \frac{\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)}{\left( 1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right)} |\nabla T|_\infty \quad (5.2)$$

При получении аналитических выражений для силы и скорости термофореза мы учли, что внутри крупной аэрозольной частицы цилиндрической формы действуют неоднородно распределенные источники тепла.

Сравним скорости термофореза твердой крупной цилиндрической и сферической частиц. Скорость термофореза сферической частицы равна[12]:

$$U_{сф} = -2 \frac{K_{TS} \mu_e}{T_\infty \rho_e} \frac{\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)}{\left( 1 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right)} |\nabla T|_\infty \quad (5.3)$$

При сопоставлении формул (5.2) и (5.3) видно, что при предельном переходе скорость термофореза крупной цилиндрической частицы будет переходить в скорость термофореза крупной сферической частицы. Коэффициент перехода будет равен:

$$\frac{U_{\text{сф}}}{U_{\text{th}}} = \frac{-2 \frac{K_{\text{TS}} \mu_e}{T_{\infty} \rho_e} \left( \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) |\nabla T|_{\infty}}{-\frac{K_{\text{TS}} \mu_e}{T_{\infty} \rho_e} \left( \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) |\nabla T|_{\infty}} = 1 + \frac{1}{\left( 1 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right)}$$

В частном случае, когда  $\lambda_i \gg \lambda_e$  и  $\frac{\lambda}{R} \rightarrow 0$ , скорость термофореза сферической частицы почти в два раза больше скорости частицы цилиндрической формы. Скорости термофореза для сферической и цилиндрической частиц почти совпадают, если  $\lambda_e \gg \lambda_i$ .

## *Заключение*

Рассмотрен термофорез крупной твердой аэрозольной частицы цилиндрической формы, внутри которой действуют неоднородно распределенные по ее объему тепловые источники. Получены аналитические выражения для полей температуры вне и внутри аэрозольной частицы, а также выражения для силы и скорости термофореза цилиндрической частицы.

## Список использованной литературы

1. Страус В. Промышленная очистка газов. М.: Химия. 1981. 616 с.
2. Вальдберг А.Ю., Исянов Л.М., Яламов Ю.И. Теоретические основы охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями. Санкт-Петербург: НИИОГАЗ-ФИЛЬТР. 1993. 235 с.
3. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса М.: Мир. 1976. 630 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
5. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами М.: Мир. 1986. 660 с.
6. Волковицкий О.А., Седунов Ю.С., Семенов Л.П. Распространение интенсивного лазерного излучения в облаках. Ленинград: Гидрометеоиздат. 1982. 312 с.
7. Береснев С.А., Кочнева Л.Б. Фактор асимметрии поглощения излучения и фотофорез аэрозолей// Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 16. № 2. С.134-141 с.
8. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц //ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 11. С. 2253-2261
9. С. Чепмен, Т. Каулинг Математическая теория неоднородных газов М.: Иностран. литература. 1960. 510 с.
10. А.Н. Тихонов, А.А. Смарский Уравнения математической физики М.: Наука. 1972. 735 с.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физ.-мат. лит-ра. 1961. 703 с.
12. Ю.И. Яламов, В.С. Галоян Динамика капель в неоднородных вязких средах Ереван: Луйс. 1985. 89 с.



13. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе Теоретическая гидромеханика. М.: Наука. 1963. Ч. II. С. 727 с.
14. Г. Ламб Гидродинамика. М.: ОГИЗ. 1947. 928 с.