Ерина Татьяна Анатольевна,
доцент кафедры общей математики
Институт инженерных технологий и естественных наук НИУ «БелГУ»,
к. п.н., (Белгород, Россия)
Бандукова Карина Дмитриевна,
студентка первого курса направления подготовки Прикладная математика и информатика
Институт инженерных технологий и естественных наук НИУ «БелГУ»,
(Белгород, Россия)

Использование характеристик стохастических процессов для решения практических задач (на примере СМО)

Аннотация

На примере работы СМО показана возможность использования расчетных характеристик для решения реальных практических задач. Обосновывается вывод о применении характеристик стохастических процессов на практике.

Ключевые слова

Стохастический процесс, система массового обслуживания, поток событий, интенсивность

Достаточно часто при решении практических задач возникает необходимость описания процессов, носящих случайный характер. Такие процессы называют стохастическими (вероятностными), если при изменении во времени состояние какой-либо системы подчиняется вероятностным закономерностям.

Примером стохастического процесса является работа СМО (систем массового обслуживания), так как представляет собой процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Математические характеристики процессов, возникающих в СМО, гораздо легче описать, если считать процесс работы – марковским, т.е. случайным процессом без последствия.

Важнейшей характеристикой работы СМО является поток событий. Под потоком событий понимается последовательность однородных событий, следующих один за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток покупателей, поток отказов ЭВМ, поток клиентов банка и т.п.).

Поток характеризуется интенсивностью λ - частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени. Кроме того, поток событий может быть: регулярным, когда события протекают друг за другом через равные промежутки времени; стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени; потоком без последействия, если для любых двух непересекающихся участков времени t_1 и t_2 число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Чаще всего при решении практических задач исследуют простейший поток событий, т.е. такой поток, который обладает одновременно тремя свойствами: стационарностью, ординарностью и не имеет последействия. Интенсивность λ такого потока равна сумме интенсивностей входящих потоков, т.е. $\lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$. Задачи с простейшими потоками имеют наиболее простую математическую модель.

Доказано, что $\rho/n<1$ существуют предельные вероятности состояний системы, но при $\rho/n\geq1$ очередь в СМО растет до бесконечности. Известные формулы для процесса гибели и размножения дают возможность получить в свою очередь формулы для вычисления предельных вероятностей состояний n -канальной системы с неограниченной очередью

$$\rho_0 = \left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}, \quad (1)$$

$$\rho_1 = \frac{\rho}{1!}\rho_0\ldots,\ \rho_k=\frac{\rho^k}{k!}\rho_0\ldots,\ \rho_n=\frac{\rho^n}{n!}\rho_0\ldots, \quad (2)$$

$$\rho_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\rho_0\ldots,\ \rho_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}\rho_0\ldots \quad (3)$$

Формула вероятности ожидания заявки в очереди следующая:

$$P_{оч.} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-\rho)\cdot n!}\rho_0. \quad (4)$$

N-канальные СМО с неограниченной очередью могут быть охарактеризованы:

- средним числом занятых каналов

$$\bar{k}=\frac{\lambda}{\mu}=\rho, \quad (5)$$

- средним числом заявок в очереди

$$L_{оч..}=\frac{\rho^{n+1}\rho 0}{(1-\rho/n)^2 n\cdot n!}\rho_0, \quad (6)$$

- средним числом заявок в системе

$$L_{сист.}=\ell_{оч.}+\rho\ . \quad (7)$$

Формулы Литтла позволяют найти также среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в системе.

Рассмотрим практическое применение формул для расчетных характеристик стандартной модели СМО на примере исследования оптимальной работы торгового зала в современном торговом центре.

Пример: Статистическим исследованием установлено, что в торговом центре в среднем поток покупателей имеет интенсивность λ=80 человек в час. В среднем продолжительность обслуживания одного покупателя равна $\bar{t}_{об.}$=2 мин. Необходимо определить:

1) минимальное количество кассиров n_{min}, при котором очередь не будет расти до бесконечности, а также найти соответствующие характеристики обслуживания при $n=n_{min}$;
2) оптимальное количество $n_{опт}$ кассиров, при котором относительная величина затрат $R_{отн.}$ связанная с издержками на содержание пунктов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей, задаваемая формулой$R_{отн.}=\frac{1}{\lambda}n+3T_{оч}$. будет минимальна и сравнить характеристики обслуживания при $n=n_{min}$ и $n=n_{опт}$

3) вероятность того, что в очереди будет не более 3 покупателей.

Решение: 1) так как λ=80 (1/ч), то λ=80/60=1,35 (1/мин.).

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{об}$=1,35· 2=2,7.

Условие $\rho/n<1$ позволит найти n_{min}. Очередь не будет расти до бесконечности при $n>\rho$=2,7. То есть, минимальное количество кассиров в торговом центре должно быть n_{min} =3.

Вычислим характеристикиобслуживания при n=3:

- по формуле (1): $\rho_0=(1+2{,}7^2/2!+2{,}7^3/3!+2{,}7^4/(3!(3-2{,}7)))^{-1}$=0,025 найдем вероятность того, что у кассы отсутствуют покупатели. Эта вероятность показывает, что в среднем 2,5% времени кассиры будут отдыхать;
- формула (4) позволит найти вероятность того, что у кассы будет очередь: $P_{оч.}=2{,}7^4/3!(3-2{,}7)\ 0{,}025$ =0,735;
- используя формулу (6), найдем среднее число покупателей, находящихся в очереди: $L_{оч.}$=2,74/3· 3!(1-2,7/3)2= 7,35;
- среднее время ожидания в очереди будет равно $T_{оч.}$ =7,35/1,35 =5,44 (мин.);
- по формуле (7) вычислим среднее число покупателей в пункте обслуживания $L_{сист.}$ =7,35 +2,7= 10,05;
- среднее время нахождения покупателей в пункте обслуживания $T_{сист.}$ =10,05/1,35= 7,44 (мин);
- среднее число занятых каналов, т.е. число кассиров, занятых обслуживанием покупателей найдется по формуле (5):k = 2,7;
- (доля) занятых обслуживанием кассиров $k_з=\rho/n$=2,7/3 =0,9;
-рассчитанная абсолютная пропускная способность пункта обслуживания A=1,35(1/мин.) или 81 (1/ч), т.е. 81 покупатель в час.

Итак, проведя анализ расчетных характеристик обслуживания, мы приходим к выводу: при наличии 3 кассиров в торговом зале возникает значительная перегрузка пунктов расчета.

2) Найдем относительную величину затрат при n=3

$R_{отн.}=\frac{1}{\lambda}n+3T_{оч.}$=3/1.35+3·5,44=18,54.

Для анализа и сравнения характеристик обслуживания при различных n простроим таблицу, в которую внесем расчеты:

Таблица 1. Численные характеристики работы СМО

Характеристики обслуживания	число кассиров				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя кассиров P_0	0,025	0,057	0,065	0,065	0,067
Среднее число покупателей в очереди $T_{оч}$	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01
Относительная величина затрат $R_{отн.}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

Анализ и сравнения показывают: минимальные затраты возможны при наличии n= nопт.=5 кассиров в торговом зале.

Представим некоторые характеристики обслуживания пунктов расчета при наличии 5 кассиров: $P_{оч.}$=0,035; $L_{оч.}$=0,198; $T_{оч.}$=0,146 (мин.); $L_{сист}$=2,90; $T_{сист}$=2,15(мин.); k=2,7; k_3=0,54. Очевидно, что вероятность возникновения очереди $P_{оч}$ сильно уменьшились. Кроме того: длина очереди $L_{оч}$, среднее время пребывания в очереди $T_{оч.}$, среднее число покупателей $L_{сист}$, среднее время нахождения в пункте расчета $T_{сист}$, а так же доля занятых обслуживанием контролеров k_3 – существенно изменились в лучшую сторону.

4) По формуле: $P(r\leq3)= (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5)+ (\rho_{5+1} + \rho_{5+2} + \rho_{5+3}) = 1-P_{оч.} + \rho_{5+1} + \rho_{5+2} + \rho_{5+3}$ найдем вероятность того, что в очереди будет не более 3 покупателей, т.е.

$$P(r\leq3)=1-\frac{2.7^6}{5!(5-2.3)}0,065+\frac{2.7^6}{5!5}0,065+\frac{2.7^7}{5!5^2}0,065+\frac{2.7^8}{5!5^3}0,065=0,986.$$

Для сравнения заметим: в случае, когда n=3 кассирам та же вероятность на много меньше: $P(r\leq3)$= 0,464.

Таким образом, наши рассуждения о стохастических процессах, а в частности, о СМО и приведенный пример использования расчетных характеристик таких процессов приводят к выводу о том, что на практике при планировании и проектировании различных объектов, связанных с работой СМО и других систем, в основе которых лежат стохастические процессы, вполне возможно и эффективно использовать математически обоснованные выкладки оптимального функционирования реальных объектов.

Список использованных источников:

1. Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1-2, М.: 1971-73.
2. Исследование операций: Учебное пособие/ Под ред. М.А.Войтенко, Н.Ш. Кремера; ВЗФИ. М.: Экономическое образование, 1992. 144 с.
3. Кремер, Н.Ш. Математика для экономистов: Учебно-справочное пособие. М.: изд-во Юрайт, 2011. 646 с.
4. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. М.: ЮНИТИ, 1998. 251 с.