Научно-исследовательский электронный журнал «Экономические исследования и разработки», №7-2018, http://edrj.ru/article/03-07-2018

Московкин В. М., Казимиру Эринелту, Мишенин В. Ю. Кластеризация участников системы взаимной торговли на основе спектра симметричной матрицы финансовых потоков

Clustering of participants of the mutual trade system on the basis of the spectrum of symmetric matrix of financial flows

Московкин Владимир Михайлович, доктор географических наук, профессор кафедры мировой экономики Белгородского государственного национального исследовательского университета

Казимиру Эринелту, выпускник аспирантуры по кафедре экономики и моделирования производственных процессов Белгородского государственного национального исследовательского университета

Мишенин Владислав Юрьевич, ассистент кафедры информационных и робототехнических систем Белгородского государственного национального исследовательского университета

Moskovkin Vladimir Mikhailovich, Doctor of Geographical Sciences, Professor of the Department of World Economy, Belgorod State National Research University
Casimir Erineltu, graduate of the postgraduate course in the Department of Economics and Modeling of Production Processes, Belgorod State National Research University
Mishenin Vladislav, Assistant, Chair of Information and Robotic Systems, Belgorod State National Research University

Аннотация: предлагается проводить кластеризацию симметричных матриц взаимной торговли с помощью расчета спектра этих матриц. Собственные числа таких матриц являются вещественными, что позволило для их кластеризации использовать число обусловленности, равное отношению модуля максимального значения собственного числа к модулю минимального собственного числа. В случае симметричной матрицы взаимной торговли размерности $n \times n$, предложено поочередно выводить из системы взаимной торговли каждого участника, тогда возникает задача кластеризации n симметричных матриц взаимной торговли размерности $n-1 \times n-1$. Обращено внимание на проблему структурной устойчивости систем взаимной торговли, описываемых соответствующими симметричными матрицами.

Ключевые слова: симметричная матрица, спектр симметричной матрицы, собственные числа симметричной матрицы, число обусловленности, кластеризация матриц, взаимная торговля.

Abstract: the article proposes clustering of symmetric matrices of mutual trade through the spectrum matrix calculations. The eigenvalues of such matrices are real, which made it possible for the use of clustering condition number equal to the ratio of the absolute maximum eigenvalue to the absolute minimum eigenvalue . In the case of the symmetric matrix of mutual trade of dimension n x n, it is suggested that each participant be derived from the mutual trading system, then there is a problem of clustering n symmetric matrices of mutual trade of dimension n-1×n-1. Attention is drawn to the problem of structural stability of mutual trade systems described by the corresponding symmetric matrices.

Keywords: symmetric matrix, spectrum of symmetric matrix, eigenvalues of symmetric matrices, condition number, matrix clustering, mutual trade

Введение

Кластеризация участников системы взаимной торговли представляет собой распределение этих участников по группам. Рассматриваемой системе объективно присуща матрица перетекания материально-финансовых потоков. Спектр матрицы – это последовательность чисел (собственных значений). Возникает естественный вопрос – нельзя ли использовать спектр для соответствующей расстановки участников и, если можно, – как это сделать? Однако в какой мере спектр может характеризовать экономическую, в частности, систему? Ответам на поставленные вопросы посвящена предлагаемая статья.

1. Матрица взаимодействия участников взаимной торговли

Будем рассматривать группу территориально взаимосвязанных стран, регионов или предприятий в каком либо экономическом кластере (участников процесса), которые осуществляют между собой торговые операции. Здесь важна предметная сторона вопроса, поскольку сразу становится понятным, что мы не получим матрицу больших размеров, исследование которой может порождать известные осложнения вычислительного характера.

Для большей определенности, полагаем, что рассматривается взаимодействие участников за период одного года. При этом участники передают друг другу виды своей продукции, получая взамен денежные средства. Соответственно товары приобретают финансовый эквивалент.

В такой трактовке участники как бы переводят друг другу деньги. Полагаем, что используется одна единица измерения, а именно – доллар.

Пусть участник i получил за год от участника j сумму в размере a_{ij}, и наоборот, участник j получил от участника i сумму a_{ji}. При этом вследствие финансовой эквивалентности товаров, а также практического осуществления конкретных операций мы можем сделать очень важный вывод о том, что

$$a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1,\ 2,\ ...,\ n \tag{1}$$

(т. е., имеет место симметрия), где n – количество участников.

И нас не интересуют в данном контексте рыночные цены, мотивы, по которым кто-либо из участников пошел на объективно невыгодный для него вариант и т. п. Главное – факт совершения сделок, а значит, соответствующие участники согласились между собой считать их, в совокупности, «равноценными».

Экономической системе, о которой мы говорим, соответствует квадратная, что следует подчеркнуть, $n \times n$ матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad (2)$$

ее диагональные элементы

$$a_{ii} = 0, \; i = 1, 2, \dots, n, \qquad (3)$$

в самом деле, участник не может обмениваться сам с собой.

Очевидно, элементы матрицы (2) не могут быть отрицательными, поскольку в противном случае ситуация абсурдна. Участник передает партнеру товар, а вслед за этим еще и его денежный эквивалент. Вместе с тем, часть (и даже большая) элементов a_{ij} могут быть нулевыми. Иначе говоря, конкретные участники не взаимодействуют друг с другом непосредственно, что является характерным для экономических систем.

Впервые такие симметричные матрицы взаимной торговли между странами были предложены в работах [1, 2], в дальнейшем их построение значительно облегчилось после создания Международным торговым центром ВТО интернет-ресурса Trade Map.

Естественно, что такие матрицы являются неотрицательными. Как отметили М. Маркус и Х. Минк: «Некоторые очевидные свойства неотрицательных матриц могут быть установлены на основании того факта, что эти матрицы образуют выпуклое частично упорядоченное множество. Однако основной интерес представляют замечательные спектральные свойства неотрицательных матриц. Они были открыты Перроном для положительных матриц; Фробениус усилил результаты Перрона и распространил их на неотрицательные матрицы» [3, с.165].

Итак, появилось понятие «спектра» (из нашего названия), да еще и имеющего замечательные свойства. Конечно, мы изначально были ориентированы на их использование в целях эффективной кластеризации. Далее мы перейдем к раскрытию данного понятия и его практической реализации, однако вначале кратко коснемся существующих в рассматриваемой предметной области концепций.

2. Сложившееся видение проблемы кластеризации и спектр

Л. Е. Басовский привел определение: «Метод кластерного анализа позволяет строить классификацию n объектов посредством объединения их в группы или кластеры на основе критерия минимума расстояния в пространстве m переменных (признаков), описывающих объекты. Метод позволяет находить разбиение множества объектов на заданное число кластеров» [4, с.78].

К нашей задаче, сказанное, вообще говоря, неприменимо. В самом деле, понятие спектра для прямоугольной матрицы $m \times n$ полностью утрачивает смысл. При этом сказать, что пусть $n = m$ нелогично. Кроме того, за «признаками» кроется эвристика выбора, тогда как мы хотели бы опираться на формализацию.

Отметим, что спектр представляет собой совокупность собственных значений (чисел), которые объективно отображают упомянутые выше расстояния.

Тему признаков развивают М. С. Олдендерфер, Р. К. Блэшфилд (авторы раздела 3 [5, с. 153]): «Выбор переменных в кластерном анализе является одним из наиболее важных шагов в исследовательском процессе, но, к сожалению, и одним из наименее разработанных. Основная проблема состоит в том, чтобы найти ту совокупность переменных, которая наилучшим образом отражает понятие сходства. В идеале переменные должны выбираться в соответствии с ясно сформулированной теорией, которая лежит в основе классификации. На практике, однако, теория, обосновывающая классификационные исследования, часто не сформулирована, и поэтому бывает трудно оценить, насколько выбор переменных соответствует поставленной задаче».

Конечно, под переменными авторы подразумевают признаки. При этом, как можно понять, теорию они подразумевают в плане обоснования количества и существа признаков. Во всяком случае, на эвристическом уровне. Если речь идет о гуманитарной сфере, то, наверное, такой подход зачастую безальтернативен.

Однако, имея в качестве данных квадратную таблицу чисел, мы вправе ожидать целесообразности конструктивного использования ключевого звена матричного анализа, которым является спектр.

3. Спектр как определяющая характеристика системы

Вновь обратимся к матрице (2). Нам не важна размерность элементов a_{ij}, ее в дальнейшем можно не учитывать. Также путем масштабирования матрицу A можно представить в наиболее прозрачном виде, здесь не важны абсолютные значения элементов, главными являются соотношения между ними.

В отношении линейного оператора (матрица – частный случай) Ф. Рисс и Б. Сёкефальви-Надь высказались следующим образом: «Одна из простейших задач, возникающая в связи с изучением линейных операторов в гильбертовом или банаховом пространстве, состоит в отыскании инвариантных элементов или хотя бы элементов, сохраняющих под действием этих операторов свое направление, то есть элементов, удовлетворяющих уравнению вида

$$Ax = \lambda x, \tag{4}$$

где элемент x, отличный от нулевого, называется собственным элементом оператора A, а соответствующее значение λ – собственным значением оператора A» [6, с. 245].

Как представляется, название задачи, которая рассматривается простейшей, связано с неточностью перевода, лучше сказать о том, что спектральная задача является весьма содержательной, как это делают В. Хатсон и Дж. Пим: «Почти во всякой физической задаче, которая может быть сформулирована с помощью линейных операторов, объектом основного физического интереса служит спектр рассматриваемого оператора. Вполне достаточным подтверждением этого высказывания служит повсеместное использование термина «спектр» как в физическом, так и в математическом смысле. Например, в квантовой механике физический спектр энергетических состояний атома и спектр соответствующего дифференциального уравнения тесно связаны между собой» [7, с. 249].

Представляет интерес соображение К. Ланцоша: «Проблема собственных значений (4) играет весьма важную роль во всех явлениях неустойчивых колебаний и вибраций, так как частота упругих или электрических колебаний определяется собственными значениями некоторой матрицы, тогда как собственные векторы, или главные оси, этой матрицы указывают формы этих колебаний. Но даже исследования чисто статических явлений, таких как анализ устойчивости самолета или проблема изгибания, эквивалентны проблеме собственных значений. Анализ собственных значений матриц становится, таким образом, ведущей темой технических исследований наших дней» [8, с. 81].*

Г. Стренг резюмирует: «Собственные значения являются наиболее важной чертой практически любой динамической системы» [9, с. 215].

Следует подчеркнуть, что спектр не только очень важен для различного рода исследований, но и, по существу, олицетворяет собой рассматриваемую систему. С этой точки зрения, по нашему мнению, спектральный подход объективно незаменим в задачах кластеризации. Иначе говоря, спектр идеально подходит для установления степени сходства между объектами.

Подтверждением сказанного могут служить задачи, которые называют обратными. Так Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн, произвольно задав собственные частоты натянутой нити, определяют соответствующее им распределение плотности массы по длине, дополнение 2 [10]. То есть, зная свойства системы, авторы определяют ее структуру.

В более сложных задачах для дифференциальных уравнений один спектр может оказаться недостаточным. И, тем не менее, исследования производятся на основе спектрального подхода. Как отметил Б. М. Левитан: «Под обратными

* Конечно, здесь не следует ограничиваться задачами технического содержания. Просто на тот период (послевоенные годы) они были наиболее актуальными.

задачами спектрального анализа понимают задачи восстановления линейного оператора по тем или иным его спектральным характеристикам. Такими характеристиками могут быть спектры (при различных граничных условиях), спектральная функция, данные рассеяния и др.» [11, с. 9].

4. Вычисление собственных чисел симметричных матриц

Собственные значения (числа) симметричной матрицы A (2) с элементами (1) вещественны, что в целом существенно упрощает ситуацию. Эти числа являются корнями характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda I)=0, \tag{5}$$

где I – тождественный оператор. В левой части (5) находится полином от λ степени n. Поэтому рассматриваемая матрица, с учетом кратности, имеет n собственных чисел.

Исследовав малое возмущение матрицы A, А. Н. Малышев отмечает, что «собственные числа симметричных матриц определяются очень устойчиво, и вследствие этого должны быть «хорошо» вычислимы на ЭВМ» [12, с. 50].

Большой интерес представляют соображения Б. Парлетта: «Для того, кто впервые сталкивается с вычислением собственных значений, я хотел бы кратко обрисовать общую ситуацию. … Матрицы бывают либо малыми, либо большими … Для малых матриц в настоящее время в большинстве научных вычислительных центров имеются хорошие программы, по существу, способные удовлетворить любые запросы пользователя. Более того, достигнуто, в сущности, полное понимание методов, реализованных этими программами. Многократно переработанная теория упростилась настолько, что приобрела черты элегантности. … В последнее время внимание исследователей переключилось на большие матрицы. Задачи стали труднее, разработаны некоторые хорошие методы, но здесь до элегантности еще далеко» [13, с. 8].

Далее автор поясняет: «Будем говорить, что матрица большая, если лишь часть ее может храниться одновременно в быстродействующей памяти. Однако порядок матрицы – слишком грубая мера запросов к памяти. Симметричная матрица A порядка 400 с полушириной ленты 30 (т. е. $a_{ij}=0$ при $|i-j|>30$) – мала для многих вычислительных систем, в то время как симметричная матрица порядка 200 со случайным расположением нулевых элементов большая» [13, с. 33].

Конечно, в нашем случае расположение «нулей» является случайным и, тем не менее, из-за малой величины n даже вычислительный потенциал начала 80-х годов перекрывает наши запросы в порядковом выражении.

Как сообщает С. Писсанецки: «Та же тенденция к увеличению размеров наблюдается в спектральных расчетах, где «большой» называют матрицу 4900 или 12000». Указаны соответствующие ссылки [14, с.7].

При этом следует учесть, что за период после выхода в свет фундаментальных трудов [13, 14] потенциал матричного анализа значительно усилился, в первую очередь, за счет новых возможностей вычислительной техники.

Из приведенных соображений очевиден вывод о том, что какая-либо проблематичность с вычислением собственных значений матрицы (2) у нас отсутствует. Во всяком случае, когда элементы матриц не слишком сильно отличаются по величине.

5. Число обусловленности симметричной матрицы

На самом деле, нам нужны лишь два собственных значения – максимальное и минимальное. С их помощью находится число обусловленности матрицы [9, с. 325]

$$cond(A) = |\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}|, \tag{6}$$

которое является одним из главных инструментов нашей кластеризации.

Дж. Форсайт и соавторы трактуют $cond(A)$ в качестве множителя, увеличивающего относительную погрешность задания элементов a_{ij} при проведении вычислений [15, с. 56]. Они также заявляют: «Число обусловленности является также мерой близости к вырожденности. Хотя мы не имеем еще математических средств, необходимых для точной формулировки этого утверждения, можно рассматривать число обусловленности как величину, обратную к относительному расстоянию данной матрицы до множества вырожденных матриц» [15, с. 57].

Следует отметим важное обстоятельство. Если определитель матрицы, отображающей финансовые потоки, обращается в нуль, то экономическая система становится неработоспособной. При этом изначально участники могут быть ориентированы на вполне разумные цены своей продукции.

Однако поддержание баланса системы, являющееся принципиально необходимым, инициирует неконтролируемый рост цен, а соответственно и приостановление деятельности. Такой ход событий априори трудно идентифицировать, поскольку информация, которой располагает каждый из участников, ограничена. И механизмы рыночной конкуренции здесь не причем, всего лишь неудачно расположились числа. Однако кластеризация представляет собой апостериорную оценку, базирующуюся на результатах практической деятельности. В этой связи мы заведомо постулируем выполнение условия $\det(A) \neq 0$. Очевидно, здесь должен существовать некоторый запас прочности.

6. Разложимость и неразложимость неотрицательной матрицы

Однако неотрицательность рассматриваемой матрицы A также представляет собой инструмент (критерий) кластеризации. В отличие от числа обусловленности, это будет критерий качественного свойства. Охарактеризуем интересующие нас свойства указанного класса матриц, следуя руководству В. В. Воеводина и Ю. А. Кузнецова [16, п.18].

При изучении свойств неотрицательных матриц большую роль играют понятия разложимости и неразложимости. Если участников нашей системы представить точками на плоскости, соединив их стрелками, согласно тому, как идут платежи, то получится ориентированный граф матрицы A. В нашей постановке задачи упомянутые стрелки являются двусторонними.

Направленный граф сильно связен, если для любых двух точек существует связывающий их ориентированный путь. Матрица A неразложима тогда и только тогда, когда ее направленный граф сильно связен. Матрица A, все элементы которой отличны от нуля, неразложима.

Теорема Перрона – Фробениуса. Пусть A – неразложимая матрица. Тогда:

- A имеет положительное собственное число, равное ее спектральному радиусу $\rho(A)$;*
- $\rho(A)$ соответствует положительный собственный вектор;
- $\rho(A)$ имеет кратность 1.

Спектральным радиусом $\rho(A)$ квадратной матрицы A называется максимальный из модулей ее собственных значений.

Пусть неразложимая квадратная матрица A имеет k собственных чисел, равных по модулю $\rho(A)$. Тогда, если $k>1$, то матрица A называется циклической индекса k. В противном случае $(k=1)$ матрица A называется примитивной. Существует критерий цикличности, использующий, аналогично предыдущему, направленный граф [16, с. 131-132].

Если все элементы матрицы A положительны, то A – примитивная матрица.

Квадратная матрица примитивна тогда и только тогда, когда некоторая ее степень является положительной матрицей.

Пусть A – некоторая квадратная матрица. Тогда:

- A имеет неотрицательное собственное число, равное ее спектральному радиусу, причем $\rho(A)=0$ только в том случае, если ее нормальная форма является строго верхней треугольной матрицей);
- $\rho(A)$ соответствует неотрицательный собственный вектор;

---

* Поскольку суммы всех λ_i и a_{ii} (след матрицы) совпадают, то, как вытекает из (3), во всяком случае, одно из собственных чисел будет отрицательным

- $\rho(A)$ не убывает при возрастании любого из элементов матрицы A.

Матрица A называется нормальной, если она перестановочна со своей сопряженной матрицей A^*, т. е. $AA^* = A^*A$.

Конечно, в отличие от предыдущего, здесь подразумевается разложимая матрица.

В несколько ином аспекте охарактеризовал неразложимость П. Ланкастер. Путем перестановок такая матрица сводится к виду:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

после чего находятся собственные числа для матриц более низкого порядка A_{11} и A_{22}. Их совокупность составляет спектр матрицы A [17, с. 255-256].

Весьма ценным является соображение данного автора: «Интересно, что понятие разложимости (7) никак не связано с величиной матрицы, а зависит лишь от расположения нулевых и ненулевых элементов в этой матрице» [17, с. 256].

7. Предлагаемый алгоритм кластеризации

Итак, обратимся к матрице A, характеризующей рассматриваемую систему. Очевидно ее фундаментальные свойства, такие как разложимость – неразложимость и значение числа обусловленности, формируются участниками системы в совокупности. Однако участники в разной степени влияют на данный процесс. Исходя из этого будет производиться разделение участников.

Иначе говоря, предлагается очень простой подход, а именно – оценивание влияния каждого из участников на свойства рассматриваемой системы. Вернее – на изменение этих свойств из-за поочередного выхода участников из системы. Естественно, все остальные при этом, теоретически, сохраняют свои позиции. Вместо (2) мы получаем для исследования квадратную матрицу размером $n-1 \times n-1$, причем всего таких матриц, которые мы собираем кластеризировать, будет равно n.

Однако мы сказали «теоретически», поскольку вследствие взаимовлияния участников и другие из них могут оказаться за пределами исходной системы. Мы приходим к следующей дифференциации участников, вследствие их выхода из системы, качественного характера:

1. Разрушение системы.
2. Неразложимость получаемой матрицы, п. 6.
3. Разложимость получаемой матрицы, п. 6.

При этом разрушение подразумевает получение матрицы размером $n-s \times n-s$ и меньше, где величина $s = 2, 3, \ldots$ устанавливается из соображений предметного свойства. Конечно, она зависит от n, а также и того насколько действенной можно считать систему при малом количестве участников. Матрицы размером $n-s+1$ и выше относятся к категориям 2 и 3 согласно своей разложимости.

Такие матрицы очень естественно ранжируются в количественном выражении по числу обусловленности (6). Собственно говоря, все предшествовавшие пп. 1-5 были посвящены обсуждению соответствующего инструментария. Путем перенесения всех $cond(A_i)$ на график мы получаем весьма наглядную картину.

Здесь под A_i подразумевается матрица, получающаяся из A после выхода i -го участника из системы. Мы просто зачеркиваем соответствующую строку и столбец, изменив индексацию элементов a_{ij} на $i,\ j=1,2,\ldots,n-1$ (если не учитывать s). При этом, что важно отметить, свойства исходной матрицы (1) и (3) сохраняются.

Конечно, в процессе нашей кластеризации, которую можно назвать оценкой влияния участников на систему, не запрещается использовать единый подход. Иначе говоря, ограничиться дифференциацией по качественному признаку, или же, наоборот, – в количественном выражении $cond(A_i)$.

Может быть также использован критерий цикличности матрицы. В этой связи возникает интересная задача установления физического смысла цикличности, для чего требуется проработка дополнительной литературы, включая фундаментальные руководства Ф. Р. Гантмахера [18, п.12.5]; Р. Хорна и Ч. Джонсона [19, п. 8.5].

И еще одна задача, которую можно назвать выходящей за пределы кластеризации, а именно. Исследуя влияние участников на систему, мы можем идентифицировать малые по своей величине элементы матрицы, присутствие которых, вместо нуля, что следует подчеркнуть, дает позитивный результат. То есть, подразумевается проблематика структурной оптимизации систем.

Как уже отмечалось, очень важную мысль высказал П. Ланкастер, п. 6 [17]: «Малое возмущение матрицы может кардинально, на качественном уровне, изменить поведение системы». Заметим в этой связи, что аспектам возмущения матриц посвящена обширная литература, причем целый ряд источников указан в списке к настоящей статье.

В исходной постановке задачи участники продают друг другу товары, получая за них финансовый эквивалент. Мы сразу же «развернули» ее в привлекательную плоскость обмена денежных средств, п. 1. Но есть еще внешние структуры, без которых торговля между странами является невозможной, при этом учесть их вклад тяжело.

Что же, до настоящего момента изложения мы не имели малейших проблем, алгоритм кластеризации предельно прозрачен и легко реализуется. Однако не алгоритм практической реализации, а собственно получаемый результат потенциально неустойчив к данным задачи, а значит, в целом она может быть некорректной.

Другой вопрос, что еще в гораздо большей мере подобная некорректность касается традиционного подхода, когда кластеризация осуществляется с использованием эвристически выбираемого набора признаков. И, кроме того, – оцифрования гуманитарной информации.

На основании приведенных соображений мы можем сделать следующий вывод. О кластеризации можно говорить лишь применительно к выбранной системе учета, которая должна быть логичной.

У нас это годовые размеры финансовых потоков между странами, регионами или компаниями за получаемые товары. Аналогично могла бы рассматриваться группа товаров, например, продовольственных. Сюда также, идеально, подходят торги на бирже.

Но нельзя ли «вмонтировать» в систему дополнительного участника, который за небольшую плату будет оказывать остальным, в частности, информационные услуги? Цель такого действия может состоять в том, чтобы исходная матрица A стала неразложимой. Однако результат кластеризации в таком случае может очень резко измениться.

Другой вопрос, если подобный участник объективно присутствует. Например, это может быть кредитор, получающий от участников проценты. Без его участия схема товарообмена выглядит неполной. В общем, как практически везде, главной является объективная постановка задачи.

И здесь следует принять во внимание, что непосредственная цель кластеризации состоит совсем не в усовершенствовании экономических взаимоотношений (наш случай). Она гораздо прозаичнее, а именно. Дать общие представления о целостности рассматриваемой системы, особенностях распределения участников по кластерам и т. п.

8. Простейшие примеры матричной кластеризации

Обратимся к матрице (2) с учетом ее своеобразия (1), (3).

Система из двух участников:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix};$$

очевидно, выход одного из них разрушает тривиальную систему.

Система из трех участников:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix};$$

один из них, конкретно 1-й, выходит (исключаются первые строка и столбец). Соответственно

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $a_{23} = a_{32} \neq 0$ система тривиальна; в противном случае она разрушается.

Система из четырех участников:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix};$$

1-й выходит (исключаются первые строка и столбец):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix};$$

это уже в полном смысле система и появились варианты.

Если элементы $a_{23}, a_{24} \neq 0$, учитываем симметрию, то мы действуем по общей схеме:

- определение трех собственных чисел матрицы A_1;
- выбор из них $|\lambda_{\min}|$ и $|\lambda_{\max}|$;
- вычисление $cond\left(A_1\right)$.

При этом элемент a_{34} может быть нулевым.

Если $a_{23} \neq 0$; $a_{24} = 0$, то при $a_{34} \neq 0$ система аналогична предыдущей. В противном случае она тривиальна.

Если $a_{23} = a_{24} = 0$, то получаем тривиальную систему из двух участников (с элементом a_{34}), о которой говорилось выше.

Если еще и $a_{34} = 0$, то система разрушается.

Если мы абстрагируемся от тривиальных систем, состоящих из двух участников взаимного торгового обмена, и процесса их разрушения, то в практических целях вместо понятий разложимости и неразложимости симметричной матрицы важно понятие ее вырожденности, когда det (A)=0.

Как говорилось выше, в этом случае система взаимного торгового обмена перестает быть работоспособной. Так как число обусловленности является мерой близости к вырожденной матрицы и является обратной к относительному расстоянию данной матрицы до множества выраженных матриц [15, с. 57], то можно записать, что

$$cond\,(A) = |\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| = 1/d, \tag{8}$$

где d – относительное расстояние матрицы *A* до вырожденной матрицы, определенное с точностью до постоянной величины. Из условия вырожденности det (A)=0 имеем d=0, тогда

$$|\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| \to \infty \text{ } или \text{ } |\lambda_{\max}| \gg |\lambda_{\min}|.$$

При d=1 (максимальное расстояние) имеем

$$|\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| = 1 \text{ } или \text{ } |\lambda_{\max}| = |\lambda_{\min}|.$$

При практических расчетах целесообразно понять существует ли регрессионная зависимость между

$$d = |\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| \text{ } и \text{ } \det(A).$$

Выводы

1. Пожалуй, главное, что нам удалось сделать, состоит в сведении рассматриваемой задачи (путем несложных рассуждений) к исследованию симметричной матрицы, характеризующей систему. Соответственно открылась возможность использования весьма конструктивного аппарата вычисления собственных чисел симметричных матриц. Из общих соображений, эти числа могут быть задействованы для дифференциации участников на группы.
2. Конкретика практической реализации замысла приводит нас к предложению поочередного удаления каждого участника из системы (остальные остаются). Тогда появляются разные матрицы и собственные числа. Более того, имеется еще и уникальный, можно сказать, критерий, – число обусловленности. С его помощью мы можем сравнивать участников экономической системы для распределения по кластерам.
3. Собственные числа симметричных матриц являются вещественными, соответствующие алгоритмы численной реализации, даже для систем несопоставимо большего порядка устойчивы и, казалось бы, в этом смысле, нет проблем. Однако они могут появиться (причем серьезные) если мы введем в систему еще одного участника, платеж которого, на первый взгляд, пренебрежимо мал.
4. И не только из-за осложнений вычислительного свойства, которые присущи операциям с числами разного порядка, суть в том, что на качественном уровне может измениться собственно рассматриваемая система. Вообще, обеспечение структурной устойчивости системы – весьма тонкий момент.

Поэтому очень важна адекватная постановка задачи, хорошо проанализированная посредством соображений рационального характера.

5. В свете сказанного возникает вопрос, который заслуживает проведения вычислительного эксперимента. Имеем разложимую матрицу, спектр которой может быть идентифицирован с использованием двух систем более низкого порядка. Осуществляя минимальные вариации структуры исходной матрицы, сообщаем ей свойство неразложимости. Как при этом изменяется спектр?

Библиографический список

1. Московкин В., Монастырный В. Матричный анализ взаимной торговли группы стран // Бизнес Информ. – Харьков, 2000. - № 6. – С. 37-43.
2. Московкин В., Колесникова Н. Матричный анализ взаимной торговли стран ЕС // Бизнес Информ. – Харьков, 2002. - № 3-4. – С. 35-38.
3. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
4. Басовский Л. Е. Прогнозирование и планирование в условиях рынка. Учебное пособие. – М.: Инфра-М, 1999. – 260 с.
5. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ: Пер. с англ. / Под ред. И. С. Енюкова. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 216 с.
6. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
7. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983. – 431 с.
8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
9. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. – М.: Мир, 1980. – 454 с.
10. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 359 с.
11. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. – М.: Наука, 1984. – 240 с.
12. Малышев А. Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. – Новосибирск: Наука, 1991. – 229 с.
13. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
14. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988. – 411 с.
15. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
16. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 319 с.
17. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 257 с.
18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 547 с.
19. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.