ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (Н И У « Б е л Г У »)

Тарасова О.А.

Основы математического анализа

Учебное пособие

Белгород

НИУ «БелГУ»

2018

Тарасова О.А.

Основы математического анализа : учебное пособие. – Белгород : НИУ БелГУ, 2018. – 33 с.

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения и основные формулы по следующим темам: введение в математический анализ, исследование функций и построения их графиков, дифференциальное исчисление функций одной переменной, интегральное исчисление функций одной переменной, комплексные числа.

В каждом пункте рассматривается большое количество примеров с подробным решением.

Предназначено для преподавателей и самостоятельной работы студентов по программе курса «Основы математического анализа».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ — часть математики, в которой функции и их обобщения изучают методами дифференциального и интегрального исчисления. Это раздел математики, изучающий функции и их обобщения методом пределов. Методы широко используются в других разделах математики, в естественных и некоторых гуманитарных науках, а также в технике.

В классическом математическом анализе объектом изучения (анализа) являются функции. Способы их изучения базируются на понятии предела.

Математический анализ охватывает достаточно большую часть математики. В него входят:

дифференциальное исчисление;

интегральное исчисление;

теория функций действительного переменного;

теория функций комплексного переменного;

приближение функций;

теория дифференциальных уравнений;

теория интегральных уравнений;

вариационное исчисление;

функциональный анализ и некоторые другие математические дисциплины.

В данном курсе лекций, рассматриваются только несколько из перечисленных выше разделов математического анализа, которые наиболее востребованы для специалистов.

Тема 1. Введение в математический анализ

Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки а или в некоторых точках этой окрестности. Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b $(y \to b)$ при x, стремящемся к а $(x \to a)$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать такое положительное число δ, что для всех x, отличных от а и удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$. Если b есть предел функции $f(x)$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.
Из основных теорем теории пределов [1] следует, что вычисление предела любой функции $f(x)$ надо начинать с подстановки вместо x его предельного значения. Если при этом получается определенное число, то оно и является искомым пределом.
Пример Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{2x^2-x+1}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{2x^2-x+1} = \frac{2^2-1}{2\cdot 2^2-2+1} = \frac{4-1}{8-2+1} = \frac{3}{7}.$$

Однако во многих случаях в результате такой подстановки получаются неопределенные выражения или неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$. Для нахождения пределов в этих случаях необходимы дополнительные преобразования, которые называются раскрытием неопределенностей.
Все указанные неопределенности раскрываются алгебраическими или тригонометрическими преобразованиями, или с помощью эквивалентных бесконечно малых или бесконечно больших величин. Эквивалентными бесконечно малыми или бесконечно большими величинами называются такие, предел отношения которых равен единице, что позволяет при вычислении пределов вместо одной величины использовать ей эквивалентную.
Эквивалентность указывается знаком $\sqcup$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых величин

$$\sin\alpha \sim \alpha;\ tg\alpha \sim \alpha;\ arctg\alpha \sim \alpha;\ \log_b(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln b};\ \ln(1+\alpha) \sim \alpha;$$

$$b^{\alpha}-1 \sim \alpha\ln b;\ e^{\alpha}-1 \sim \alpha;\ (1+\alpha)^n-1 \sim n\alpha;\ 1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}.$$

Для случая бесконечно больших величин, т.е. при $u \to \infty$

$$a_0u^n + a_1u^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u + a_n \sim a_0u^n.$$

С помощью бесконечно малых раскрывается непосредственно неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, а с помощью эквивалентных бесконечно больших неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. При этом используется теорема о замене бесконечно малых или бесконечно больших величин эквивалентными к ним: предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин не изменится, если их заменить эквивалентными величинами. При раскрытии неопределенностей других видов их сначала сводят алгебраическими или тригонометрическими преобразованиями к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а потом используют упомянутую теорему.

Непрерывность функции

Понятие непрерывности функции является одним из важнейших понятий математического анализа. Особое внимание здесь надо обратить на конструктивное определение непрерывности функции в точке и классификацию точек разрыва.
Согласно конструктивному определению непрерывности функции в точке функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если выполняются такие условия:

1) существует $f(x_0)$;
2) существует левый предел функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$;
3) существует правый предел функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$;
4) выполняется равенство $f(x_0-0) = f(x_0+0) = a$;
5) выполняется равенство $a = f(x_0)$.

Если хотя бы одна из этих условий не выполняется, то функция $f(x)$ разрывная в точке x_0.
Точки, в которых функция не является непрерывной, носят название точек разрыва функции.
Все точки разрывов можно распределить на две группы: разрывы первого рода и разрывы второго рода.

Точка x_0 является точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если не выполняется хотя бы одна из условий 1, 4, 5, т.е., если или $f(x_0)$ не существует, или $f(x_0)$ существует, но не равняется пределам слева и справа в точке x_0, или предела слева и справа не равные между собой.

Точка x_0 точка разрыва второго рода, если не существует, или является бесконечным хотя бы один из пределов функции слева или справа в этой точке.
В точке разрыва первого рода чаще всего функция имеет скачок, который равняется разности $|\, f(x_0+0) - f(x_0-0)\, |$.

Если скачок равняется нулю, то иногда такой разрыв называют устранимым разрывом, если $f(x_0)$ не существует, и изолированной точкой, если $f(x_0)$ существует.
Из свойств непрерывных функций вытекает, что все элементарные функции непрерывны во всех внутренних точках их областей определения. Разрывными они могут быть лишь на концах отрезков, из которых состоит их область определения.

Пример . Исследовать непрерывность функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ и в случае наличия точек разрыва установить их род.
Решение. Это элементарная функция. Следовательно, она непрерывна во всех внутренних точках области определения $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ и может иметь разрыв в точке $x=1$. Проверим все условия непрерывности функции в этой точке:

1) $f(1)$ не существует;
2) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$;
3) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$;
4) предел справа равняется пределу слева;
5) предела дело и слева не равняют $f(1)$ ($f(1)$ не существует!).

Таким образом, не выполненные первое и пятое условия непрерывности функции в точке $x=1$. Итак, в точке $x=1$ данная функция имеет разрыв первого рода. Поскольку левый предел равен правому, то в точке $x=1$ функция имеет устранимый разрыв. Для того чтобы функция стала непрерывной в точке $x=1$, достаточно положить $f(1)=2$. Если же положить, например, $f(1)=1$, то точка $x=1$ будет изолированной точкой функции.

Пример . Исследовать непрерывность функции $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.
Решение. Это элементарная функция с областью определения $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. Итак, она может быть разрывной в точке $x=0$. Проверим условия непрерывности функции в этой точке:

1) $f(0)$ не существует;
2) $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{0}}=e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$;
3) $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}}=e^{+\frac{1}{0}}=e^{+\infty}=+\infty$;

Поскольку правый предел функции в точке $x=0$ бесконечен, то в этой точке функция имеет разрыв второго рода.

Тема 2. Исследование функций и построения их графиков

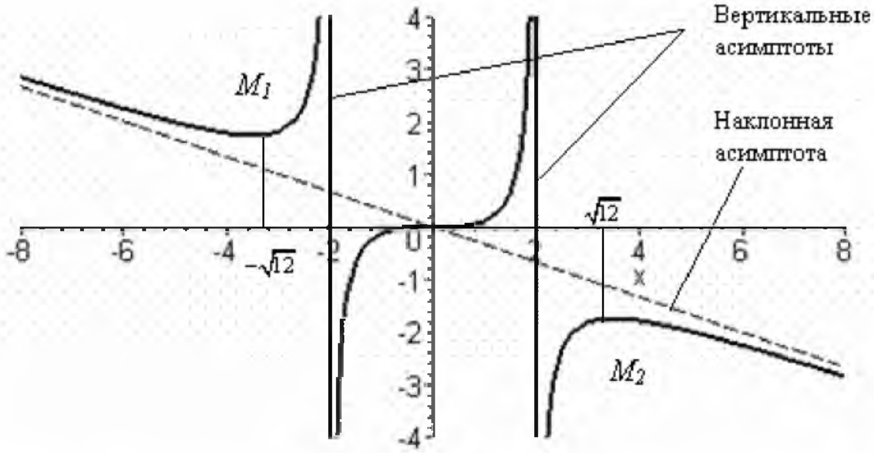


Рис. 4.1

На рис. 4.1 изображен график функции $y = \dfrac{x^3}{12 - 3x^2}$, содержащий ряд типовых элементов: интервалы монотонности, точки экстремума M1($-\sqrt{12}$; $\sqrt{3}$) , M2($\sqrt{12}$;$-\sqrt{3}$) , точку перегиба (0; 0) , асимптоты. Для исследования функций и построения их графиков используются ряд теорем дифференциального исчисления.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема (Вейерштрасса). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], то на этом отрезке она ограничена и достигает своих наименьшего (m) и наибольшего (M) значений.

Точка x_0 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой экстремума, а значение функции в этих точках – значением экстремума.

Определение экстремума носит локальный характер, то есть функция может иметь несколько локальных минимумов и максимумов.

Теорема (необходимый признак существования экстремума). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то ее производная при $x = x_0$ обращается в 0 $(f'(x_0) = 0)$ или не существует.

Точка x_0 в которой $f'(x_0) = 0$ называется стационарной точкой; точка x_0 в которой $f'(x_0) = 0$ или не существует, называется или критической точкой.

Вопрос о существовании стационарных точек решается с помощью теоремы Ролля.

Теоремы (Ролля). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$, то внутри отрезка существует по крайней мере одна точка с, производная в которой равна нулю $(f'(c) = 0)$.

Геометрический смысл теоремы: найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс; в этой точке производная и будет равна нулю.

Теорема (Лагранжа). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то внутри отрезка существует по крайней мере одна точка с, такая, что $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Геометрический смысл теоремы: найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ и секущая параллельны.

С помощью теоремы Лагранжа устанавливаются признаки постоянства, возрастания и убывания функции.

Теорема (достаточный признак постоянства функции). Если во всех точках некоторого промежутка X производная равна нулю, то функция $y = f(x)$ сохраняет на этом промежутке постоянные значения.

Теорема (достаточный признак возрастания функции). Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка $[a,b]$, то она возрастает на этом промежутке.

Теорема (достаточный признак убывания функции). Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка $[a,b]$, то она убывает на этом промежутке.

Первое достаточное условие экстремума. Теорема 4.9. Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $y = f(x)$, а если с минуса на плюс – то точка минимума.

Правило нахождения точек экстремума и промежутков монотонности

1) Найти область определения функции f(x).
2) Найти все критические точки функции f(x). Для этого найти производную, решить уравнение $f'(x) = 0$ и найти точки x из области определения, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
3) Разбить область определения критическими точками на промежутки и в них найти знаки производной.
4) В промежутках, где производная положительна, функция возрастает, а в промежутках, где производная отрицательна, функция убывает.
5) Найти экстремумы функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$ на экстремум.
Решение. 1) Область определения – множество всех действительных чисел R.

2) $y' = \left(\left(x^2 - 4x\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^2 - 4x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2 - 4x\right)' = \frac{2x-4}{3\sqrt[3]{\left(x^2 - 4x\right)^2}}$.

Найдем критические точки. Решим уравнение $y' = 0$: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ □ стационарная.

Производная у не существует при $\sqrt[3]{x^2 - 4x} = 0 \Rightarrow$ x (x – 4) = 0 $\Rightarrow$ x = 0 или $x = 4$. Эти точки входят в область определения функции, следовательно, являются критическими.

3) Разобьем область определения R критическими точками 0, 2, 4 на интервалы (– ∞, 0), (0, 2), (2, 4), (4, +∞), в каждой из которых производная сохраняет знак. Найдем знаки производной в этих интервалах. Для этого выберем по одной точке из этих интервалов (например, –1 ∈ (– ∞, 0), 1 ∈ (0, 2), 3 ∈ (2, 4), 5 ∈ (4, +∞)) и определим знаки производной у в этих точках: у(□1) < 0, у(1) < 0, у(3) > 0, у(5) > 0. Следовательно, у < 0 в интервалах (– ∞, 0), (0, 2) и у > 0 в интервалах (2, 4), (4, +∞).

4) Функция убывает в интервалах (– ∞, 0) и (0, 2), возрастает в интервалах (2, 4) и (4, +∞).

5) Критическая точка х = 2 является точкой минимума.

График этой функции изображен на рис. 4.2.

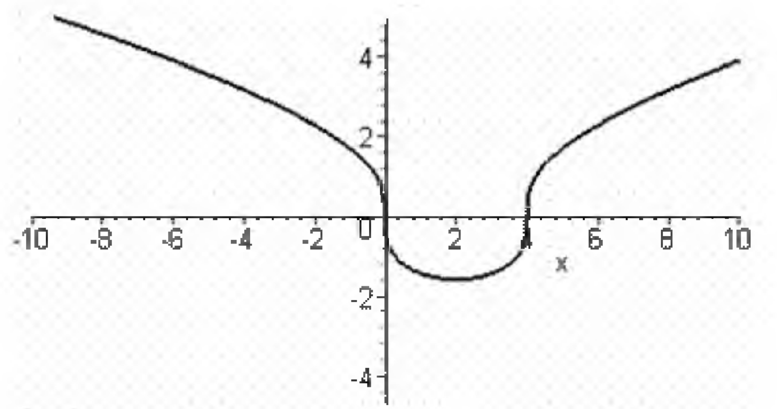


Рис.4.2

Второе достаточное условие экстремума. Теорема 4.10. Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0, а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то точка x_0 есть точка минимума функции $y = f(x)$; если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 – точка максимума.

Выпуклость функции. Точки перегиба

График функции $y = f(x)$ называется выпуклым в некотором интервале, если в этом интервале он расположен ниже любой своей касательной.

График функции $y = f(x)$ называется вогнутым в некотором интервале, если в этом интервале он расположен выше любой своей касательной.

Достаточный признак выпуклости и вогнутости графика функции. Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка $[a, b]$, то функция вогнута (выпукла) на этом промежутке.

Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, в которой изменяется направление выпуклости и вогнутости.

Достаточный признак существования точки перегиба. Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет первую производную, а вторая производная равна нулю или не существует и кроме того при переходе через x_0 меняет свой знак, то x_0 – точка перегиба.

Правило нахождения точек перегиба

1) Найти область определения функции f(x).

2) Найти $f''(x)$, решить уравнение $f''(x) = 0$ и найти точки x из области определения, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.

3) Разбить область определения найденными в предыдущем пункте точками на промежутки, в которых вторая производная имеет один и тот же знак. и в них найти знаки второй производной.

4) В промежутках, где вторая производная положительна, функция вогнутая, а в промежутках, где вторая производная отрицательна, функция выпуклая.

5) Найти точки перегиба.

Асимптоты графика функции

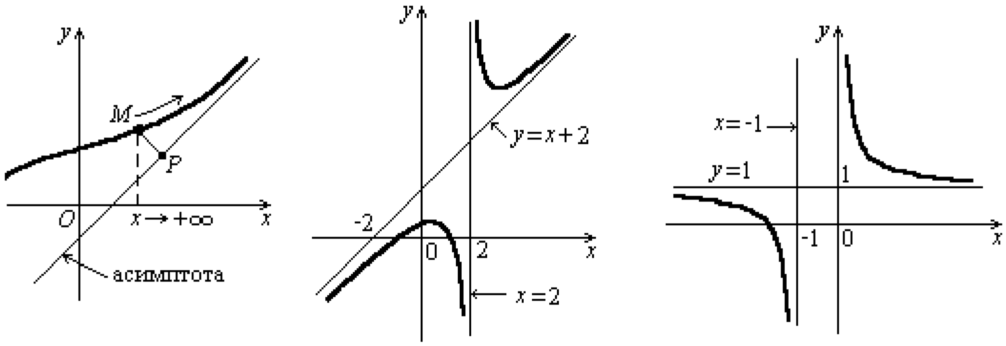
Прямая, к которой неограниченно приближается график функции при стремлении аргумента к определенному пределу или бесконечности называется асимптотаой (рис. 4.4). Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой к графику функции $y = f(x)$, если предел функции в этой точке равен бесконечности $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Вывод: вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции $y = f(x)$ или на концах ее области определения.

Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой к графику функции $y = f(x)$, если существует конечный предел функции при $x \to \infty$ равный b $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b\right)$.

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$, если существуют конечные пределы при $x \to \infty$: $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\quad b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$



а) асимптота $\lim\limits_{x\to+\infty} MP = 0$ б) асимптоты функции $y=\frac{x^2+1}{x-2}$ в) асимптоты функции $y=\ln(1+\frac{1}{x})+1$

прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой, на рис. 4.4в прямые $x = -1$ и $x = 0$ являются вертикальными асимптотами, прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой.

Схема построение графика функции

График можно строить в следующей последовательности.
Найти область определения функции.
Исследовать функцию на четность – нечетность, периодичность.
Найти асимптоты графика.
Найти точки пересечения с осями координат.
Найти интервалы монотонности и экстремумы.
Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
Построить график.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Понятие функции - одно из основных понятий математического анализа, поэтому надо обратить на него особое внимание. В дальнейшем в этом разделе будет идти речь о функциональных зависимостях между двумя переменными величинами, т.е. о функциях одной переменной.

Пусть даны две переменных величины x и y с областями изменения X и Y. Предположим, что переменной x может быть придано произвольное значение из области X без каких-либо ограничений. Тогда переменная y является функцией переменной x, если по некоторому правилу или закону каждому значению x из X соответствует одно определенное значение y из Y.

В этом случае переменная x есть независимая переменная или аргумент функции, а переменная y зависимая переменная или функция. Область изменения аргумента x это

область определения функции, а область изменения переменной y область изменения функции.
Существенным в определении функции является условие, что каждому значению x соответствует одно определенное значение y. Это значит, то рассматриваются лишь однозначные функции.

Функциональную зависимость между переменными x и y обозначают так: $y = f(x)$, или любой другой латинской или греческой буквой, например $y = \varphi(x)$ и т.п. Здесь буквы f, φ характеризуют именно то правило, по которому получается значение y, соответствующее заданному значению x. Поэтому, если одновременно рассматривают разные функции от одного и того же аргумента, связанные с разными законами соответствия, то их надо обозначать разными буквами.
Как следует из определение функции, задать функцию - это значит задать область ее определения, область ее изменения, закон или правило, по которому по данному значению аргумента находят соответствующее значение функции. Функцию можно задать аналитическим, табличным и графическим способами.
Аналитический способ наиболее удобный и распространенный способ задания функции. При этом способе функция задается формулой (или несколькими формулами), в которой указано, какие действия и в какой последовательности надо выполнить над значениями аргумента, чтобы получить соответствующие значения функции. Например, $y = \sin\sqrt{x}$, $y = \ln x - 3$, $y = 2x^3 + 5x - 1$.

Если y является функцией от u, а u в свою очередь зависит от переменной x, то y также зависит от x. Пусть $y = F(u)$ и $u = \varphi(x)$. Получаем функцию y от x: $y = F[\varphi(x)]$, которая называется сложной функцией. Например $y = \sin(x^2)$.
Если значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением $F(x, y) = 0$, то функция $y = f(x)$ есть неявная функция, определяемая этим уравнением. В ряде случаев y можно явно выразить через x, но не всякую неявно заданную функцию можно выразить через элементарные функции. Неявно заданные функции часто получаются как результат решения дифференциальных уравнений (см. раздел 8).

Пусть дана возрастающая или убывающая функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a,b) $(a < b)$. Тогда между x и y устанавливается взаимно-однозначное соответствие и можно рассматривать x как функцию y: $x = \varphi(y)$. Эта функция называется обратной для функции $y = f(x)$. Иногда её изображают как $x = f^{-1}(y)$. Можно вернуться к естественному обозначению переменных: $y = f^{-1}(x)$. Графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла. Некоторые обратные функции имеют специальное обозначение. Так для функции $y = \sin x$ обратной будет функция $y = \arcsin x$.
В ряде случаев связь между x и y выражается через третью переменную t, называемую параметром, посредством уравнений $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$. Такой способ задания функции называется параметрическим, например $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \pi$.

В ряде случаев область определения функции задается вместе с функцией $f(x)$, например $y=\begin{cases}2x, & 0<x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ Если функция имеет прикладной характер, на ее переменные могут накладываться дополнительные ограничения. Так объем производства не может быть отрицательным.

Необходимо иметь в виду, что в области действительных чисел невыполнимыми являются следующие действия: деление на нуль, извлечение корней четных степеней из отрицательных чисел, логарифмирование нуля и отрицательных чисел, нахождение тангенса для аргументов $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, нахождение котангенса для аргументов $k\pi$ (k целое число), нахождение арксинуса и арккосинуса для аргументов по модулю больших единицы.

Функция $y=f(x)$ называется четной, если для любых значений аргумента из области ее определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, например $y=x^2$. График таких функций симметричен относительно оси 0y.

Функция $y=f(x)$ называется нечетной, если для любых значений аргумента из области ее определения выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$, например $y=x^3$. График таких функций симметричен относительно точки (0; 0).

Функция $y=f(x)$ называется периодической, если выполняется равенство $f(x+t)=f(x)$, где t определенное число. Минимальное значение t называется периодом, обозначается обычно через T, например $y=\sin x,\ T=2\pi$.

Особое внимание надо обратить на основные элементарные функции: степенную $y=x^n$, показательную $y=a^x$, логарифмическую $y=\log_a x$, синус $y=\sin x$, косинус $y=\cos x$, тангенс $y=\mathrm{tg}x$, котангенс $y=\mathrm{ctg}x$, арксинус $y=\arcsin x$, арккосинус $y=\arccos x$, арктангенс $y=\mathrm{arctg}x$, арккотангенс $y=\mathrm{arc\,ctg}x$. Они составляют основу математического анализа.

Производная функций одной переменной

Пусть функция у $=f(x)$ определена в окрестности точки х, Δx приращение аргумента х, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ приращение функции.

Производной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к соответствующему ему приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю. Для обозначения производной функции $y=f(x)$ используются символы y', y'_x, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{df(x)}{dx}$. Таким образом, по определению:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{4.1}$$

В общем случае для каждого значения х производная $f'(x)$ имеет определенное значение, то есть производная является также функцией от х. Конкретное значение производной при $x=a$ обозначается $f'(a)$ или $y'|_{x=a}$.

Операция нахождения производной от функции $y = f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Геометрически производная $f'(x)$ при данном значении аргумента x представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику функции у = $f(x)$ в точке (x,y). В этом заключается геометрический смысл производной. Используя его, можно записать уравнение касательной к графику функции у = $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (4.2)$$

а также уравнение нормали (прямой, перпендикулярной к касательной в той же точке $(x_0, f(x_0))$):

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (4.3)$$

Механический смысл производной заключается в том, что производную функции y=$f(x)$ можно трактовать как мгновенную скорость изменения переменной у при данном значении переменной x.

Пример Дана функция $y = 2x^2$; найти по определению ее производную y': 1) в произвольной точке x, 2) при $x = 3$.

Решение.

1) $$y' = \left(2x^2\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + \Delta x^2 - 2x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4x + \Delta x = 4x.$$

2) $y'|_{x=3} = 4 \cdot 3 = 12$.

Используя аналогичный подход можно составить таблицу производных основных элементарных функций (С – константа, u(x) – какая-то элементарная функция, в простейшем случае u = x).

Таблица производных

1. $C' = 0$; **2.** $(x^a)' = ax^{a-1}$; $(kx)' = k$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\frac{1}{x^a}\right) = -\frac{a}{x^{a+1}}$;

$[(u(x))^a]' = a[u(x)]^{a-1}u'(x)$; .

3. $(e^x)' = e^x$; $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$; $\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x), a > 0$; $\left(x^x\right)' = x^x(\ln x + 1)$.

4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; $[\log_a u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln a}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$; $(\sin kx)' = k \cos kx$; $[\sin u(x)]' = \cos u(x) \cdot u'(x)$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$; $(\cos kx)' = -k \sin kx$; $[\cos u(x)]' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$.

7. $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cdot ctg\, x$; $[\operatorname{cosec} u(x)]' = -\operatorname{cosec} u(x) \cdot ctg\, u(x) \cdot u'(x)$.

8. $(\sec x)' = \sec x \cdot tg\, x$; $[\sec u(x)]' = \sec u(x) \cdot tg\, u(x) \cdot u'(x)$ $\left(\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}, \sec u = \frac{1}{\cos u}\right)$.

9. $(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $[tg\,u(x)]' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$. 10. $(ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; $[ctg\,u(x)]' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$;.

11.$(sh\,x)' = ch\,x$; $[sh\,u(x)]' = ch\,u(x)\cdot u'(x)$ .12. $(ch\,x)' = sh\,x$; $[ch\,u(x)]' = sh\,u(x)\cdot u'(x)$.

13.$[th\,u(x)]' = \frac{u'(x)}{ch^2 u(x)}$;$(th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$.14.$[cth\,u(x)]' = -\frac{u'(x)}{sh^2 u(x)}$;$(cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$,

где $sh\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$; $ch\,u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, соответственно, гиперболический синус и гиперболический косинус,

$th\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$; $cth\,u = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$ - гиперболический тангенс и гиперболический котангенс.

15.$(\arcsin x)' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-x^2}}$; $[\arcsin u(x)]' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$.

16.$(\arccos x)' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-x^2}}$; $[\arccos u(x)]' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$.

17.$(arctg\,x) = \frac{1}{1+x^2}$; $[arctg\,u(x)]' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$.

18.$(arcctg\,x) = -\frac{1}{1+x^2}$; $[arcctg\,u(x)]' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$.;

Для вычисления производных от произвольных функций необходимо использовать свойства производных:

1) Постоянный множитель можно вынести за знак производной: $(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$.

2) Производная от алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных от этих функций: $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$.

3) Производная от произведения двух функций вычисляется по формуле

$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$. (4.4)

4) Производная от частного двух функций вычисляется по формуле

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x)\neq 0$. (4.5)

5) Производная от сложной функции $y = F(\varphi(x))$ вычисляется по формуле

$(F(\varphi(x)))' = F'_\varphi(\varphi(x))\cdot\varphi'_x(x)$. Например, $(\sin(\cos(x))' = (\cos(\cos(x)))\cdot(-(\sin(x))$ и вообще

$\left(F\left(G\left(W\left(\varphi(x)\right)\right)\right)\right)' = F'_G\left(G\left(W\left(\varphi(x)\right)\right)\right)\cdot G'_w\left(W\left(\varphi(x)\right)\right)\cdot W'_\varphi\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)$.

6) Производная от неявно заданной функции находится путем почленного дифференцирования уравнения, задающего неявную функцию и выделения производной.

Пример 4.2. Найти производную по x от функции y , заданной уравнением: $y^6 - y - x^2 = 0$.

Решение. Дифференцируем по x это уравнение: $6y^5y' - y' - 2x = 0$, откуда
$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$. Из этого примера видно, что для нахождения значения производной при данном значении аргумента x нужно знать и значение функции y при данном значении x.

7). Производная от параметрически заданной функции, описываемой уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, находится по формуле $y'_x = {y'_t}/{x'_t}$.

8). Производная от обратной функции $x = f^{-1}(y)$ функции $y = f(x)$ вычисляется по формуле $\left(f^{-1}(y)\right)' = {1}/{f'(x)}$.

9). Если $F'(x) = f(x)$, то $F'(kx + a) = kf(kx + a)$. Это свойство значительно расширяет возможности использования таблицы производных.

Дифференциал функций одной переменной

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x \in [a, b]$, т.е. в этой точке имеет производную. Тогда из определения производной приращение функции $f(x)$ в этой точке

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \qquad (4.6)$$

Первое из слагаемых (4.6) является линейным относительно Δx и при $\Delta x \to 0$ и $f'(x) \neq 0$ есть величиной бесконечно малой одного порядка малости с Δx. Второе слагаемое - бесконечно малая величина высшего порядка малости, чем Δx. Таким образом, первое слагаемое в формуле (4.6) является главной частью приращения функции, линейной относительно приращения аргумента.

Дифференциалом dy функции $y = f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции $y = f(x)$ в этой точке:

$$dy = y'\Delta x. \qquad (4.7)$$

Термин «дифференциал» (от латинского слова differentia - разность) ввел в математику выдающийся ученый Лейбниц.

Дифференциал dy называют также дифференциалом первого порядка. Если $y = x$, то $y' = x' = 1$, поэтому $dx = \Delta x$, т.е. дифференциал dy независимой переменной x совпадает с ее приращением Δx. Поэтому формулу (4.7) можно записать следующим образом:
$dy = y'dx$, (4.8) откуда вытекает широко используемое обозначение для производной
$y' = \frac{dy}{dx}$, как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Дифференциал приближенно равняется приращению функции и пропорционален приращению аргумента. Откуда $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx dy = y'dx = y'\Delta x$ и

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + y'\Delta x. \qquad (4.9)$$

Пример . . Найти dy, d2y и d3y функции y = ln x.

$$y' = \frac{1}{x},\ y'' = -\frac{1}{x^2},\ y''' = \frac{2}{x^3}.$$

Решение. Находим первую, вторую и третью производные от функции y = ln x.

Тогда: $dy=\frac{dx}{x},\ d^2y=-\frac{dx^2}{x^2},\ d^3y=\frac{2dx^3}{x^3}.$

Правило Лопиталя

Это правило раскрытия неопределенностей некоторых пределов функций при помощи производных. Правило Лопиталя выражается следующей теоремой.

Теорема Пусть функции f (x) и g(x) дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ (или □). Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и верно равенство $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Правило Лопиталя можно применять неоднократно.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(x)-x}{x-\sin(x)}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-x}{x-\sin(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(tg(x)-x)'}{(x-\sin(x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}-1}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{(1-\cos(x))\cos^2(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))\cos^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos(x)}{\cos^2(x)}=\frac{2}{1}=2.$$

Для раскрытия с помощью этого правила неопределенностей вида $0\cdot\infty, \infty-\infty$ сначала необходимо свести их к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Тема 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Определение и свойства неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ на данном отрезке $[a;b]$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ или, просто, первообразной функции $f(x)$, если на всем отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Например функция $0,25x^4+3$ является первообразной для функции x^3, так как $\left(0,25x^4+3\right)'=x^3$.

Любая первообразная для функции $f(x)$ может быть представлена суммой $F(x)+C$, где C произвольная постоянная (константа).

Совокупность всех первообразных функций $f(x)$ на данном отрезке $[a;b]$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \qquad (7.1)$$

При этом функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, $\int$ – знаком интеграла. Из определения следует, что определенный интеграл представляет множество функций $y=F(x)+C$.

Операция нахождения первообразной для данной функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$ или взятием интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для этой функции существует первообразная, а значит и неопределенный интеграл.

В отличие от производной, для неопределенного интеграла нет формального правила его вычисления. Однако, воспользовавшись таблицей производных, можно составить таблицу неопределенных интегралов для основных элементарных функций, которая представлена ниже.

Таблица неопределенных интегралов

$$1.\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1;\quad 1.b.\int A(kx+b)^n dx = A\frac{(kx+b)^{n+1}}{k(n+1)}+C;\quad 1.c.\int A dx = Ax+C.$$

$$2.\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C;\quad 2.b.\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{\ln|kx+b|}{k}+C.$$

$$3.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ a>0,\ a\neq 0;\quad 3.b.\int a^{(kx+b)}dx = \frac{a^{(kx+b)}}{k\ln a}+C;\quad 3.c.\int e^x dx = e^x+C;$$

$$3d.\int e^{(kx+b)}dx = \frac{e^{(kx+b)}}{k}+C.\qquad 4.\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C,\ a\neq 0.$$

$$5.\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\ a\neq 0.\quad 6.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C,\ a\neq 0.$$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$. 8. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C$.

9. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

10. $\int \sin xdx = -\cos x + C$; 10.*b*. $\int A\sin(kx+b)dx = -A\frac{\cos(kx+b)}{k} + C$.

11. $\int \cos xdx = \sin x + C$; 11.*b*. $\int A\cos(kx+b)dx = A\frac{\sin(kx+b)}{k} + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$, 12.*b*. $\int \frac{dx}{\sin^2(kx+b)} = -\frac{1}{k}ctg(kx+b) + C$.

13. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, 13.*b*. $\int \frac{dx}{\cos^2(kx+b)} = \frac{1}{k}tg(kx+b) + C$.

14. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$, 14.*b*. $\int tg(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\ln|\cos(kx+b)| + C$.

15. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$, 15.*b*. $\int ctg(kx+b)dx = \frac{1}{k}\ln|\sin(kx+b)| + C$.

16. $\int shxdx = chx + C$; 16.*b*. $\int sh(kx+b)dx = \frac{1}{k}ch(kx+b)$, $\left(shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$.

17. $\int chxdx = shx + C$; 17.*b*. $\int ch(kx+b)dx = \frac{1}{k}sh(kx+b)$.

Неопределенный интеграл имеет ряд свойств, которые используются при интегрировании.

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов:

$\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$

3. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$. На практике часто приходится использовать это свойство, записанное наоборот $f(x)dx = d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C)$.

4. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная: $\int dF(x) = F(x) + C$.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ - функция, которая имеет непрерывную производную, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Последние два свойства являются особо важными, так как значительно увеличивают количество функций, интегрируемых непосредственно без дополнительных преобразований.

Примеры $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d\left(\int \cos x dx\right) = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{5}\sin^5 x + C;$$

$$\int 2^{-3x+12} dx = \frac{2^{-3x+12}}{-3\ln 2} + C$$

Нахождение значения неопределенного интеграла основано на его преобразовании к табличному виду и нахождении первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены общие основные методы нахождения неопределенных интегралов и особенности интегрирования отдельных классов функций.

Интегрирование методом подстановки (замены переменных) путем введения функции под знак дифференциала

При этом методе подынтегральное выражение $f(x)dx$ пытаются представить в виде

$$f(x)dx = g(x) \cdot q(x)dx = g(x)d\left(\int q(x)dx\right) = g(x)dQ(x) = G(Q(x)dQ(x) =$$

$$|Q(x) = u| = G(u)du,$$

то есть в результате преобразований исходный интеграл преобразуется к виду: $\int f(x)dx = \int G(u)du$. Интеграл $\int G(u)du$ должен быть проще исходного (в прямых скобках записаны все промежуточные замены и преобразования).

Пример

$$\int \left(x^3+5\right)^4 x^2 dx = \int \left(x^3+5\right)^4 d\left(\int x^2 dx\right) = \int \left(x^3+5\right)^4 \frac{dx^3}{3} = \begin{vmatrix} x^3+5 = u \\ d(x^3+5) = du = dx^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\int u^4 du = \frac{u^5}{3 \cdot 5} + C = \frac{\left(x^3+5\right)^5}{3 \cdot 5} + C = \frac{\left(x^3+5\right)^5}{15} + C.$$

Интегрирование методом подстановки (замены переменных) путем выведения функции из под знак дифференциала

При этом методе переменную x выражают через специально подобранную функцию от новой переменной t: $x = \varphi(t)$, которая имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, при этом $dx = \varphi'(t)dt$. Исходный интеграл $\int f(x)dx$ преобразуется следующим образом: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. После преобразования подынтегральной функции последний интеграл должен быть проще исходного. После его интегрирования возвращаются к исходной переменной x, подставляя вместо переменной t значение $t = \varphi^{-1}(x)$.

Пример Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$. Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{matrix} x = 2arctg\, t, \quad -\pi < x < \pi, \quad t = tg\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

В этом примере использована так называемая универсальная тригонометрическая подстановка, позволяющая свести интеграл вида $\int R(\cos x, \sin x)dx$, где R – рациональная функция от $\cos x$ и $\sin x$, к интегралу от рациональной функции по переменной t .

Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции от x . Тогда
$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + v(x)du(x)$ (см. раздел 4.2). Проинтегрировав, получаем:
$\int d(u(x)v(x)) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x)$, а после преобразований:
$u(x)v(x) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x)$ или

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \qquad (7.2)$$

Полученная формула называется формулой интегрирования частям. Эта формула применяется к интегрированию выражений, которые можно представить в виде произведения двух сомножителей $u(x)$ и $dv(x)$ так, чтобы после применения формулы интегрирования по частям (7.2) интеграл $\int v(x)u'(x)dx$ был проще исходного.
Технология интегрирование по частям следующая:

$$\int f(x)dx = \int u(x)q(x)dx = \int u(x)d\left(\int q(x)dx\right) = \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx = \ldots.$$

На первом этапе производится разбиение исходной функции на произведение двух функций $u(x)q(x)$; на втором этапе одна из функций подводится под знак дифференциала; на третьем этапе используется формула интегрирования по частям. Многоточие означает, что преобразования могут выполняться многократно.

Пример

$$\int x^2 \sin 3x dx = \int x^2 d\left(\int \sin 3x dx\right) = \int x^2 d(-\frac{1}{3}\cos 3x) = -\frac{1}{3}\int x^2 d(\cos 3x) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2\cos 3x - \int \cos 3x dx^2\right) = -\frac{1}{3}\left(x^2\cos 3x - 2\int x\cos 3x dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2\cos 3x - 2\int x d\left(\int \cos 3x dx\right)\right) = -\frac{1}{3}\left(x^2\cos 3x - \frac{2}{3}\int x d\sin 3x\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2\cos 3x - \frac{2}{3}x\sin 3x + \frac{2}{3}\int \sin 3x dx\right) = -\frac{1}{3}\left(x^2\cos 3x - \frac{2}{3}x\sin 3x - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos 3x + C\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C.$$

Методом интегрирования по частям целесообразно вычислять интегралы следующих видов:

1. $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$, где $P(x)$ - многочлен, а a - действительное число. В интегралах этого вида за функцию $u(x)$ необходимо взять многочлен $P(x)$, за $dv(x)$ - выражение, что осталось.

2. $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$. В интегралах этого вида за функцию $u(x)$ необходимо взять, соответственно, $\ln x$, $\arcsin x$ и т.д.; $P(x)$ подвести под знак дифференциала и сформировать $dv(x)$.

Интегрирование элементарных дробей

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{A}{x+a}$; II. $\frac{A}{(x+a)^m}, m \geq 2$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$,

где m, n – натуральные числа и p2 – 4q <0.

Интегралы от первых двух элементарных дробей относятся к табличным:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C. \quad \int \frac{dx}{(x+a)^m} = \int (x+a)^{-m}dx = -\frac{1}{(m-1)(x+a)^{m-1}} + C.$$

Интегрирование рациональных функций

К рациональным функциям относятся целые рациональные функции или многочлены

$$P_n(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad (7.3)$$

и дробные рациональные функции, являющиеся отношением двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}. \qquad (7.4)$$

Если $n > m$, то дробно-рациональная функция называется правильной, в противном случае – неправильной. Она может быть преобразована в правильную, выделением целой рациональной функцией путем деления числителя на знаменатель.

Неопределенный интеграл от многочлена сводится к сумме неопределенных интегралов от степенных функций.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема . Если x_1 - корень многочлена (7.3) действительный или комплексный кратности n_1, x_2 - корень многочлена (7.3) кратности n_2, , x_k - корень многочлена (7.3) кратности n_k, то многочлен (7.3) может быть представлен в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = (x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_k)^{n_k},\quad n_1+n_2+\ldots+n_k = n. \quad (7.5)$$

Если $x_j = \alpha + \beta i$ комплексный корень многочлена (7.3), то комплексно-сопряженное число $x_{j+1} = \alpha - \beta i$ также является корнем многочлена (7.3). Произведение двучленов $(x-x_j)(x-x_{j+1})$, входящих в разложение (7.5) будет равно:

$$(x-x_j)(x-x_{j+1}) = (x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Обозначив $-2\alpha = p_j,\ \alpha^2+\beta^2 = q_j$, разложение многочлена (7.3) на сомножители может быть окончательно представлено в следующем виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = (x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{n_r}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}. \quad (7.6)$$

Теорема . Если $R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель $P_n(x)$ которой представлен в виде разложения (7.6), то эта дробь может быть разложена на элементарные дроби по следующей схеме:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2n_2}}{(x-x_2)^{n_2}} + \ldots$$
$$+ \frac{M_{r1}x+N_{r1}}{(x^2+p_rx+q_r)} + \ldots + \frac{M_{rn_r}x+N_{rn_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{n_r}} + \ldots + \frac{M_{s1}x+N_{s1}}{(x^2+p_sx+q_s)} + \ldots + \frac{M_{sn_s}x+N_{sn_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}}. \quad (7.7)$$

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные по формуле (7.7). Для нахождения коэффициентов $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n_1}, A_{21}, A_{22}, \ldots, M_{r1}, N_{r1}, \ldots M_{sn_s}, N_{sn_s}$ применяют так называемый метод неопределенных коэффициентов, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Самым сложным в этом методе является нахождение корней многочлена знаменателя $a, b, \ldots$. Помочь в их нахождении может следующая теорема.

Теорема . Если свободный член многочлена целое число и он имеет целый корень, то этот корень будет делителем нацело свободного члена.

Применение этого метода рассмотрим на конкретных примерах.

Пример . Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$.

Решение. Так как ($x^2-6x+8)(x^2+4) = (x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-6x+8) = 9x^3-30x^2+28x-88$$

$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$
$=9x^3-30x^2+28x-88.$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

В итоге:

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx=\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=$$

$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\,\frac{x}{2}+C.$$

Чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов при раскрытии скобок и группировки решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый метод произвольных значений. Суть метода состоит в том, что в полученное после приведения к общему знаменателю выражение подставляются поочередно (по числу неопределенных коэффициентов) произвольные значения x. Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю.

Определенный интеграл

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).

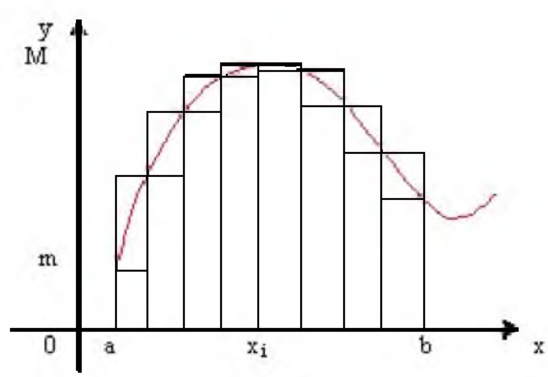


Рис. 7.1

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]
Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.
x0 < x1 < x2 < … < xn
Тогда x1 – x0 = x1, x2 – x1 = x2, … ,xn – xn-1 = xn;
На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.
[x0, x1] m1, M1; [x1, x2] m2, M2; … [xn-1, xn] mn, Mn.
Составим суммы:

$\underline{S}$n = m1x1 + m2x2 + … +mnxn = $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

$\overline{S}$n = M1x1 + M2x2 + … + Mnxn = $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

Сумма $\underline{S}$ называется нижней интегральной суммой, а сумма $\overline{S}$ – верхней интегральной суммой.

Т.к. mi Mi, то $\underline{S}$n $\overline{S}$n, a m(b – a) $\underline{S}$n $\overline{S}$n M(b – a)
Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку.
x0 < x1, x1 < x2, … , xn-1 < xn.
Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется интегральной суммой для функции f(x) на отрезке [a, b].

Sn = fx1 + fx2 + … + fxn = $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$

Тогда можно записать: mixi fxi Mixi

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.
Обозначим max xi – наибольший отрезок разбиения, а min xi – наименьший. Если max xi 0, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то предел интегральной суммы $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Определение. Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что max xi и произвольном выборе точек интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, то этот предел называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b] и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

a – нижний предел интеграла, b – верхний предел интеграла, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.
Основные свойства определенного интеграла
1). Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\psi)d\psi$$

2). Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

3). $$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

4). $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

5). $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

6). Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Вычисление определенного интеграла

Теорема (Ньютона – Лейбница). Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (7.8)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница. Запись $F(x)\Big|_a^b$ означает, что в функцию вначале подставляется верхнее значение, а из получившегося выражения вычитается выражение функции при нижнем значении.

Пример

$$\int_{-2}^{4} \cos 2x = \frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{-2}^{4} = 0,5(\sin 8 - \sin(-4) = 0,5(\sin 8 + \sin 4) = 0,5(0,989 - 0,756) = 0,116$$

Приложения определенного интеграла

Определенный интеграл широко используется для геометрических расчетов, в частности для вычисление площадей плоских фигур. Если на отрезке $[a,b]$ $f(x) > 0$, то на этом отрезке определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x) (см. рис.7.1.

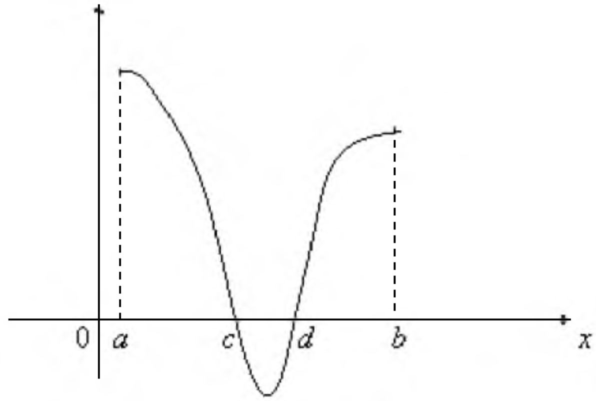


Рис. 7.2

Если график функции f(x) расположен выше и ниже оси 0x, как показано на рис. 7.2, то для нахождения площади, ограниченной графиком функции f(x) и осью 0x, можно использовать формулу

(7.9)

или вычислять ее как сумму интегралов по участкам с одинаковым знаком функции f(x), меняя знак на противоположный, если f(x)<0. При таком подходе площадь, ограниченная графиком функции f(x) и осью 0x на рис. 7.2 будет рассчитываться по формуле

.

Пример Найти площадь фигуры, ограниченной линиями y = x, y = x2, x = 2 (см. рис. 7.3).

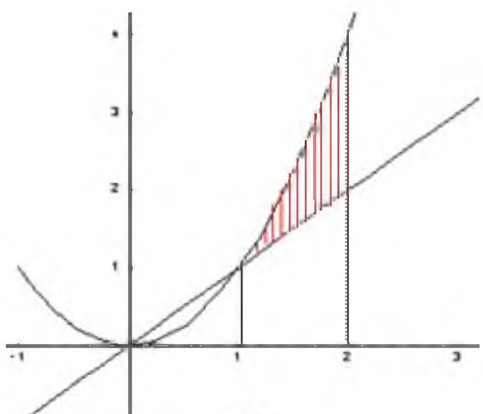


Рис. 7.3¶

Решение. Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

Тема 5. Комплексные чисела

Потребности практики, в частности необходимость использовать решения квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ с отрицательным дискриминантом ($b^2-4ac<0$), которое не имеет решений в области действительных чисел, привели к необходимости расширения понятия числа, отличного от действительного. Возникла необходимость в новых числах, отличных от действительных и включающих в себя множество действительных чисел.

Каждая точка координатной прямой соответствует одному действительному числу. Координатная прямая сплошь заполнена образами действительных чисел, т. е., выражаясь фигурально, «на ней нет места для новых чисел». Возникает предположение о том, что геометрические образы новых чисел надо искать уже не на прямой, а на плоскости. Каждую точку М координатной плоскости x0y можно отождествить с координатами этой точки. Поэтому естественно в качестве новых чисел - их называют комплексными - ввести упорядоченные пары действительных чисел (упорядоченные в том смысле, что (a; b) и (b; a) - разные точки, а значит и разные числа).

Комплексным числом называется всякая упорядоченная пара (a; b) действительных чисел a и b. Два комплексных числа (a; b) и (c; d) называются равными тогда и только тогда, когда a = c и b = d. Запись (a; b) называется общей формой комплексного числа. Кроме нее различают алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы комплексных чисел, которые вытекают из общей.

Комплексным нулем считают пару (0; 0). Числом, противоположным числу z = (a; b), считают число (- a; -b); обозначают его – z .

Алгебраической суммой комплексных чисел z=(a; b) и w=(c; d) называется комплексное число $(a \mp c;\ b \mp d)$. Например, (2; 7)+(3; -4) = (2 + 3; 7-4)=(5; 3); (-1; 0) + (4; 7) = (-1 + 4; 0 + 7) = (3; 7); . (2; 7)-(3; -4)= (2 - 3; 7-(-4))=(-1; 11).

Произведением комплексных чисел z = (a; b) и w=(c; d) называется комплексное число (ac - bd; ad + bc). Например, если z=(2; 5), w=(3, 1), то z·w = (2·3 - 5·1; 2·1 + 5·3) = (1; 17).

Арифметические операции над комплексными числами обладают теми же свойствами, что и арифметические операции над действительными числами.

Пусть z=(a; b), w=(c; d)≠(0; 0). Существует, и только одно, комплексное число u=(x; y), такое, что z = u·w. Это число и называют, как обычно, частным от деления z на w.

Имеем u·w = (x; y)(c; d)=(xc - yd; xd + yc), z = (a; b). Так как z = u·w, то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} cx-dy=a, \\ dx+cy=b. \end{cases}$$

Из этой системы двух уравнений с двумя переменными находим $x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

Итак: $u=(x;y)=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2};\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$.

Получили следующее правило деления комплексных чисел в общем виде: если $(c;d)\neq(0;0)$, то

$$\frac{(a;b)}{(c;d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Например,

$$\frac{(2;3)}{(1;4)}=\left(\frac{2\cdot1+3\cdot4}{1^2+4^2};\frac{3\cdot1-2\cdot4}{1^2+4^2}\right)=\left(\frac{14}{17};-\frac{5}{17}\right)$$

Алгебраическая форма комплексного числа

Получим следующие равенства:

$(0;1)\cdot(0;1) = (-1;0)$, (6.1)

$(a; b) = (a; 0) + (b; 0)\cdot(0; 1)$, (6.2)

$(a; 0) + (b; 0) = (a + b ; 0)$, (6.3)

$(a; 0)\cdot(b; 0) = (ab; 0)$. (6.4)

Условимся вместо (a; 0) писать просто a, а комплексное число (0; 1) обозначать буквой i и называть мнимой единицей. Тогда равенство (6.1) принимает вид $i\cdot i= - 1$, т. е.

$i^2=-1$, (6.5)

а равенство (6.2) - вид

$(a; b) = a + bi$. (6.6)

Запись a + bi называется алгебраической формой комплексного числа z = (a; b); при этом число a называется действительной частью комплексного числа z, а b - его мнимой частью. Например, (2; - 4) = 2 - 4i; (3; 2) = 3 + 2i.

Алгебраическая форма является основной формой представления комплексных чисел.

Если действительная часть комплексного числа равна нулю, а мнимая часть отлична от нуля, то такое число называется чисто мнимым; если у комплексного числа a + bi мнимая часть равна нулю, то получается действительное число a.

Алгебраическая форма существенно облегчает выполнение арифметических операций над комплексными числами. При этом складывают, вычитают и умножают комплексные числа в алгебраической форме как многочлены, учитывая что $i^2=-1$.

Пример Найти $z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2$, если $z_1=2+3i,\ z_2=5-4i$.

Решение.

$$z_1+z_2=2+3i+5-4i=7-i;\ z_1-z_2=2+3i-5+4i=-3+7i;$$
$$z_1\cdot z_2=(2+3i)\cdot(5-4i)=10-8i+15i-12i^2=22+7i.$$

Комплексное число a – bi называется комплексно-сопряженным к числу z = a + bi и обозначается $\bar z$, то есть $\bar z=a-bi$. Числа a – bi и a + bi называются комплексно сопряженными. Найдем их произведение: (a – bi)(a + bi) = a2 – (bi)2 = a2 + b2 .

С помощью комплексно-сопряженных чисел легко выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме, для чего необходимо до множить делимое и делитель на число, комплексно-сопряженное делителю и выделить действительную и мнимую части частного.

Пример . Найти z_1/z_2 ,если $z_1=2+3i,\ z_2=5-4i$.

Решение. $$\frac{2+3i}{5-4i}=\frac{(2+3i)\cdot(5+4i)}{(5-4i)\cdot(5+4i)}=\frac{10+8i+15i+12i^2}{5^2+4^2}=\frac{10+23i-12}{41}=-\frac{2}{41}+\frac{23}{41}i.$$

Преимуществом алгебраической формы представления комплексных чисел является то, что нет необходимости помнить формулы умножения и деления.

Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел

Как уже отмечалось в п. 6.1, каждой точке координатной плоскости x0y соответствует определенное комплексное число и наоборот, каждой точке плоскости M (a, b) соответствует комплексное число z = (a, b) = a + bi. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется плоскостью комплексной переменной z (рис. 6.1). Точкам плоскости комплексной переменной z, лежащим на оси 0x, соответствуют действительные числа (b = 0). Точки, лежащие на оси Oy, изображают чисто мнимые числа, так как в этом случае a = 0. Поэтому при изображении комплексных чисел на плоскости комплексной переменной z ось 0y называют осью мнимых чисел или мнимой осью, а ось 0x—действительной осью.

Соединив точку M (a, b) с началом координат, получим вектор $\overline{0M}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа z = a + ib вектор $\overline{0M}$. Обозначим через φ и r (r ≥ 0) полярные координаты точки M (a, b), считая начало координат полюсом, а положительное направление оси 0x - полярной осью. Тогда (рис. 6.1) имеют место следующие равенства: a = r cos φ , b = r sin φ , а следовательно, комплексное число z можно представить в форме a + ib = r cos φ + ir sin φ или

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) . \qquad (6.7)$$

Выражение, стоящее справа, называется тригонометрической формой записи комплексного числа z; r называется модулем комплексного числа z, φ - аргументом комплексного числа z; они обозначаются так:

$$r = |z|, \ \ \varphi = Ar\,g\,z \ . \qquad (6.8)$$

Из рис. 6.1 следует, что величины r и φ выражаются через a и b следующим образом:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = arctg\,\dfrac{b}{a}$. Итак

$$|z| = |a + bi| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad (6.9)$$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(a + bi) = arctg\,\frac{b}{a} . \qquad (6.10)$$

Аргумент комплексного числа считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси 0x против часовой стрелки, и отрицательным при противоположном направлении отсчета. Очевидно, что аргумент φ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого 2πk, где k—любое целое число. В качестве главного значения Arg z обычно выбирают значение, определяемое неравенством $0 \le Arg\,z < 2\pi$. Главное значение аргумента z обозначают через arg z , так что $0 \le arg\,z < 2\pi$.

При переходе от алгебраической к тригонометрической форме аргумент комплексного числа находят из формулы (6.10). Следует заметить, что даже при принятой выше договоренности об области изменения аргумента, arg z определяется не однозначно;

$\varphi = arctg\,\dfrac{b}{a} + k\pi$, k – целое число, которое следует выбрать таким, чтобы знак $\sin\varphi$ совпадал со знаком b и чтобы выполнялись неравенства $0 \le \varphi < 2\pi$.

При нахождении аргумента комплексного числа удобно пользоваться следующим правилом: обозначим $\alpha = arctg\left|\dfrac{b}{a}\right|$, тогда для комплексного числа, находящегося в первой четверти, $\varphi = \alpha$, во второй - $\varphi = \pi - \alpha$, в третьей - $\varphi = \pi + \alpha$, в четвертой -

$\varphi = 2\pi - \alpha$ (рис.6.2).

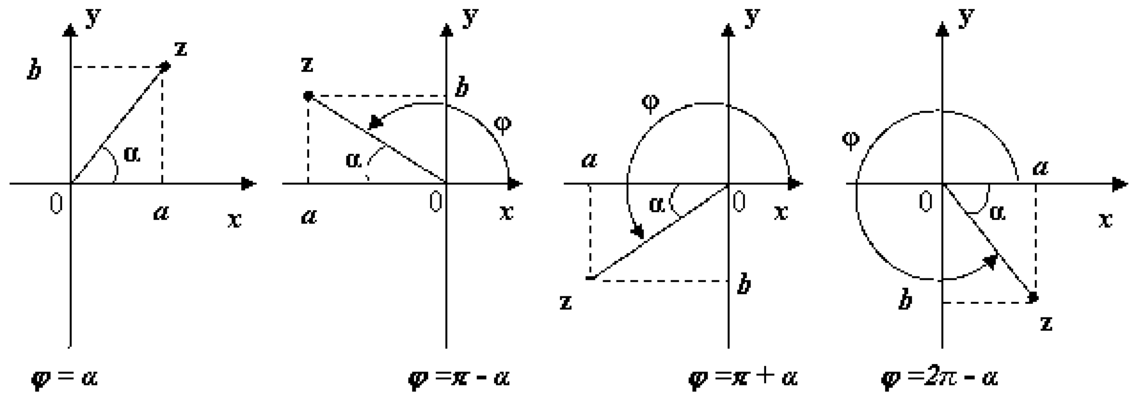


Рис. 6.2

Необходимо помнить, что $arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, $arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$, $arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

Пример. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = 2 - 2i$.

Решение:В тригонометрической форме комплексное число имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. По формуле (6.9) найдем:

$r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$. Так как заданное комплексное число находится в четвертой четверти, то где

Следовательно, $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$ и

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$.

Замечание. Сопряженные комплексные числа z = a + ib и $\bar{z} = a - ib$ имеют равные модули $|z| = |\bar{z}|$, а их аргументы равны по абсолютной величине, но отличаются знаком: arg z = $-\arg\bar{z}$.

Отметим, что действительное число A также может быть записано в форме (6.7), а именно: $A = |A|\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$ при $A > 0$, $A = |A|\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$ при $A < 0$.

Пусть комплексные числа z1 и z2 даны в тригонометрической форме:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Найдем произведение этих чисел:

$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$= r_1\cdot r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2] =$

$= r_1\cdot r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$. Таким образом,

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \qquad (6.11)$$

т.е. произведение двух комплексных чисел есть такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей.

Найдем число $-z$ в тригонометрической форме, для чего умножим z на -1 в тригонометрической форме: $-z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\cdot 1\left(\cos\pi + i\sin\varphi\right) = r\left(\cos(\varphi+\pi) + i\sin(\varphi+\pi)\right)$.

Таким образом, чтобы найти число противоположное числу z в тригонометрической форме необходимо к аргументу z прибавить π .

Для операции деления справедлива следующая формула:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \qquad (6.12)$$

Для её проверки достаточно умножить делитель на частное. Таким образом, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя; аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

если n – положительное число, то

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (6.13)$$

Эта формула называется формулой Муавра. Она показывает, что при возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.