

УДК 666.1.037

А. В. МАМАТОВ, инж., В. Г. РУБАНОВ, д-р техн. наук (БГТАСМ, г. Белгород)

Оптимизация процесса термической обработки листового стекла при закалке

Динамика нагрева при термической обработке оказывает существенное влияние на качество продукции. Особенно жесткие требования предъявляются к динамическим режимам процесса термообработки при производстве листового закаленного стекла [1]. Медленный нагрев позволяет существенно снизить температурные gradients в объеме материала, однако при этом значительно увеличивается время нагрева стекла до закалочной температуры, что снижает производительность теплотехнологической установки. Кроме того, увеличение продолжительности нагрева влечет за собой пластическую деформацию стеклоизделий под действием собственного веса при температуре, близкой к закалочной, что ухудшает оптические свойства стекла. Максимальную производительность теплотехнологической установки при сохранении заданного качества продукции можно обеспечить, решив двудлиную задачу: с одной стороны, время нагрева стекла до температуры закалки должно быть минимально, с другой — максимальное абсолютное значение градиента температуры материала не должно превышать заданного значения.

Основным средством при решении этой задачи являются аналитические методы расчета нестационарного температурного поля в стеклянной пластине [2—4].

Математическая модель, используемая в данных расчетах, построена на основе интегро-дифференциального уравнения переноса энергии в селективной среде и учитывает три составляющие теплообмена: радиационную, конвективную и кондуктивную. Такая модель отражает физическую сущность сложного процесса теплообмена и позволяет с высокой точностью производить расчет нестационарного температурного поля в стеклянной пластине при нагреве и охлаждении. Однако ввиду сложности модели радиационно-конвективно-кондуктивного теплообмена ее использование при решении задачи оптимизации динамических режимов нагрева наталкивается на серьезные трудности. В связи с этим целесообразно первоначальное решение задачи оптимизации динамических режимов процесса термообработки стекла при закалке осуществить для случая конвективно-кондуктивного нагрева.

Рассмотрим несимметричный конвективно-кондуктивный нагрев плоской пластины толщиной l от двух источников тепла. Процесс конвективно-кондуктивного теплообмена описывается уравнением Лапласа:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + q,$$

где c — теплоемкость материала; ρ — плотность материала; λ — теплопроводность материала; T — температура материала; t — время; q — удельная мощность источника тепла; ∇ — оператор Гамильтона.

В случае, когда температура материала изменяется лишь вдоль одной координаты, уравнение можно упростить:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q. \quad (1)$$

Разделим нагреваемую пластину на n слоев толщиной $\Delta l = \frac{l}{n}$ и обозначим температуру i -го слоя x_i . При малом значении Δl дифференциальное уравнение в частных производных (1) можно заменить системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которую запишем в векторной форме:

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU, \quad (2)$$

$$A = -\frac{\lambda}{c\rho\Delta l^2} \begin{bmatrix} -1 - \frac{h_1\Delta l}{\lambda} & 1 & & & & 0 \\ & & -2 & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 - \frac{h_n\Delta l}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{c\rho\Delta l} \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & h_n \end{bmatrix}$$

где h_1, h_n — коэффициенты теплоотдачи наружных слоев; u_1, u_2 — температура источника тепла у 1-го и i -го слоев соответственно; A — матрица состояния; B — матрица управления; $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ — вектор состояния; $U = [u_1, u_2]^T$ — вектор управления.

В полученной модели несимметричного конвективно-кондуктивного нагрева плоской пластины матрицы состояния и управления имеют особую структуру, обусловленную характером описываемого процесса и свойствами среды. Равенство нулю всех элементов матрицы состояния, не принадлежащих главной диагонали и первым наддиагонали и поддиагонали, а также всех элементов матрицы управления, кроме двух условных элементов, отражает тот факт, что конвективно-кондуктивный теплообмен осуществляется лишь между соседними слоями. Симметричность матрицы состояния является следствием свойства изотропности среды. Такая структура матриц состояния и управления существенно упрощает исследование динамики нестационарного температурного поля в пластине и решение задачи оптимизации динамических режимов нагрева.

В соответствии с указанными выше требованиями и ограничениями задачу оптимизации динамических режимов нагрева целесообразно сформулировать следующим образом: при заданных ограничениях на температуру источников тепла и на градиент температуры по толщине

стекла необходимо найти закон изменения температуры источников тепла, при котором срединный слой стеклян-ной пластины, имеющей температуру окружающей среды, нагревается до закалочной температуры за минимальное время.

Согласно постановке задачи в пространстве управле-ний системы (2) задана область допустимых управлений

$$R: \begin{cases} r_1(U) = u_1 - u_{\max} \leq 0, & i = \overline{1, 2}; \\ r_2(U) = -u_1 - 2 + u_{\min} \leq 0, & i = \overline{3, 4} \end{cases} \quad (3)$$

где u_{\max} — максимальное допустимое значение температуры источников тепла, u_{\min} — минимальное значение температу-ры источников тепла.

В пространстве состояний заданы область допустимых состояний

$$S: \begin{cases} s_1(X) = x_i - x_{i+1} + 1 - \Delta_{\max} \Delta L \leq 0, & i = \overline{1, n-1}; \\ s_2(X) = -x_i - n + 2 - x_{i-n+1} - \Delta_{\max} \Delta L \leq 0, & i = n, 2n-2 \end{cases} \quad (4)$$

где Δ_{\max} — максимальное допустимое значение градиента температуры по толщине пластины; начальное состояние

$$X(t_0) = X_0 = [x_0, \dots, x_0]^T,$$

где x_0 — температура окружающей среды, t_0 — время начала нагрева; поверхность конечных состояний

$$M(X(t_k)) = x_0(t_k) - x_k = 0,$$

где x_k — температура закалки, t_k — время окончания нагрева, $\epsilon = \frac{(n+1)}{2}$ — индекс срединного слоя.

Необходимо найти такой закон управления $U_{opt}(t) \in R$, при котором система (2) по траектории $X(t) \in S$ переводится из состояния X_0 в одно из состояний, лежащих на поверхности M , за минимальное время $Q = t_k - t_0 + \min$.

Для синтеза оптимального закона изменения температу-ры источников тепла воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Составим функцию Понтрягина:

$$H(P, X, U) = P^T (AX + BU) = P^T AX + P^T BU,$$

где P — вектор вспомогательных переменных, являющийся реше-нием сопряженной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \left[\frac{\partial H}{\partial X} \right]^T = - A^T P.$$

В соответствии с принципом максимума, оптимальным в смысле критерия Q будет следующий закон управления:

$$\begin{aligned} U_{opt}(t) &= \operatorname{argmax}_{U \in \Omega(t)} H(P(t), X(t), U) = \\ &= \operatorname{argmax}_{U \in \Omega(t)} P^T(t) B U = \\ &= \operatorname{argmax}_{U \in \Omega(t)} (p_1(t) \psi_{11} u_1 + p_2(t) \psi_{22} u_2) \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Omega(t)$ — множество управлений, не приводящих к нару-шению условий (3), (4).

Определим множество $\Omega(t)$ при выполнении условий $s_j(X(t)) \leq 0$, $i = \overline{1, 2n-2}$, когда состояние системы находится внутри области допустимых состояний $\Omega(t) = R$. В другом случае, когда состояние системы находится на границе области допустимых состояний,

т. е. $s_i(X(t)) = 0$, $i = \overline{1, 2n-2}$, множество $\Omega(t)$ опре-деляется на основе неравенств

$$\frac{\partial s_i(X(t))}{\partial X} (AX(t) + BU) \leq 0, \quad i = \overline{1, 2n-2}.$$

Так как при конвективно-кондуктивном нагреве пла-стины температуры источников тепла непосредственно влияют лишь на скорости нагрева ее наружных слоев и градиент температуры направлен внутрь пластины, то для определения множества $\Omega(t)$ в данном случае достаточно лишь двух указанных неравенств ($i = 1, 2n-2$), на основе которых получаем:

$$\Omega(t) : \begin{cases} u_1 \leq \frac{\lambda}{h_1 \Delta L} \left(\left(2 + \frac{h_2 \Delta L}{\lambda} \right) x_1(t) - 3x_2(t) + x_3(t) \right); \\ u_2 \leq \frac{\lambda}{h_n \Delta L} \left(\left(2 + \frac{h_n \Delta L}{\lambda} \right) x_n(t) - 3x_{n-1}(t) + x_{n-2}(t) \right). \end{cases}$$

Упростим выражение (5). Из условия трансверсальности находим конечное состояние сопряженной системы

$$P(t_k) = \mu \left[\frac{\partial M(X(t_k))}{\partial X} \right]^T,$$

где $\mu < 0$ — произвольная константа; отсюда $P(t_k) > 0$.

Таким образом, решение сопряженной системы

$$P(t) = P(t_k) e^{-A^T(t-t_k)} > 0.$$

Коэффициенты при управляющих переменных в выражении (5) положительны, поэтому его можно заменить более простым

$$U_{opt}(t) = \max_{U \in \Omega(t)} U \quad (6)$$

Таким образом, оптимальным будет следующий закон изменения температуры источников тепла:

$$U_{opt}(t) = [u_{1opt}(t), u_{2opt}(t)]^T,$$

где

$$u_{1opt}(t) = \begin{cases} u_{\max}, & s_1(X(t)) < 0; \\ \frac{\lambda}{h_1 \Delta L} \left(\left(2 + \frac{h_2 \Delta L}{\lambda} \right) x_1(t) - 3x_2(t) - x_3(t) \right), & s_1(X(t)) = 0; \end{cases}$$

$$u_{2opt}(t) = \begin{cases} u_{\max}, & s_{2n-2}(X(t)) < 0; \\ \frac{\lambda}{h_n \Delta L} \left(\left(2 + \frac{h_n \Delta L}{\lambda} \right) x_n(t) - 3x_{n-1}(t) + x_{n-2}(t) \right), & s_{2n-2}(X(t)) = 0 \end{cases}$$

Полученное решение задачи оптимизации динамиче-ских режимов несимметричного конвективно-кондуктив-ного нагрева стеклянйной пластины позволяет синтези-ровать законы изменения температуры во времени отдельно для каждого из источников тепла, при которых температура закалки достигается за минимальное время при заданных ограничениях на градиент температуры по толщине стекла и на температуру источников тепла. В общем случае решением задачи оптимизации является асимметричный нагрев стекла (рис. 1). Симметричный нагрев, рассмотренный в работах [2—4], является опти-мальным при равных значениях коэффициентов конвек-тивной теплоотдачи наружных слоев (рис. 2).

Проанализировав приведенное решение, можно сде-лать вывод о необходимости изменения температуры каждого из двух источников в соответствии со следу-ющим алгоритмом:

1) поддержание максимально допустимой температу-ры источника тепла до достижения температурным

градиентом у смежной поверхности максимально допустимого значения;

- 2) стабилизация температурного градиента у смежной поверхности на максимально допустимом уровне до достижения соответствующим источником тепла максимально допустимой температуры;
- 3) поддержание максимально допустимой температуры источника тепла до достижения средним слоем закалочной температуры.

Данный алгоритм представляет собой оптимальную стратегию управления процессом конвективно-кондуктивного нагрева стеклянной пластины. В соответствии с тем в каждый момент времени температуры источников тепла выбираются максимально возможными при заданных ограничениях, чем обеспечивается максимальная плотность потока тепла, передаваемого материалу.

Использование при решении оптимизационной задачи математическая модель не учитывает радиационной составляющей теплообмена, которая оказывает существенное влияние на протекание процесса нагрева стеклянной пластины. Поэтому для расчета количественных характеристик оптимального управления реальным технологическим процессом необходимо использовать более сложную модель радиационно-конвективно-кондуктивного теплообмена. Тем не менее, учитывая сходство динамических свойств процессов теплообмена различных типов, следует ожидать, что полученная оптимальная стратегия управления может быть успешно использована при оптимизации динамических режимов радиационно-конвективно-кондуктивного нагрева.

На основе полученного решения задачи оптимизации динамических режимов нагрева листового стекла произведем оптимизацию рабочих режимов многосекционной закалочной печи, заключающуюся в выборе распределения температур и скорости транспортирования стеклоизделия по секциям печи, при которых время пребывания изделия в печи минимально, а температура среднего слоя листа на выходе из последней секции достигает закалочного значения. Разумеется, в процессе нагрева должны выполняться все рассмотренные выше ограничения, определяемые свойствами стекла и характеристиками оборудования. Решить данную задачу можно, выбрав скорость транспортирования стеклоизделия:

$$V_{opt} = \frac{V_m}{I_x}$$

где V_m — расстояние от начала печи до выхода из m -й секции, m — число секций в печи, I_x — время окончания оптимального процесса нагрева.

Решившая по данной печи следующее распределение температур источников тепла:

$$u_1, opt(x) = u_1, opt(t), \quad t = \frac{y}{V_{opt}}$$

$$u_2, opt(x) = u_2, opt(t), \quad t = \frac{y}{V_{opt}}$$

где x — расстояние от начала печи до произвольной точки печного пространства, $u_1, opt(t)$, $u_2, opt(t)$ — синтезированные оптимальные законы изменения температуры источников тепла у верхней и нижней поверхностей листа соответственно.

При перемещении изделия с выбранной скоростью по печи, в которой поддерживается указанное пространственное распределение температур источников тепла, будут реализованы оптимальные динамические режимы нагрева стеклянной пластины и обеспечена максимальная при заданных ограничениях производительность технологической установки. Однако полученное решение не может быть реализовано в современных промышленных закалочных печах, так как в силу особенностей конструкции нагревательных секций, направленных на снижение теплового взаимодействия

секций с окружающей средой и друг с другом, в установившемся режиме поле температур в объеме секции характеризуется малыми значениями температурного градиента. В связи с этим возникает необходимость учета дополнительных ограничений на пространственное распределение температур источников тепла, обусловленных характеристиками закалочной печи:

$$u_1(y) = u_2(y)$$

$$u_i(y) = u_j(y), \quad y_{j-1} < y \leq y_j, \quad i = \overline{1, 2}, \quad j = \overline{1, m}$$

Решим задачу оптимизации рабочих режимов закалочной печи с учетом дополнительных ограничений. Пусть задан рабочий диапазон скоростей транспортирования изделий по печи:

$$V_{min} \leq V \leq V_{max}$$

где V_{min} , V_{max} — минимальная и максимальная скорости транспортирования соответственно, и известны длины секций A_{y_j} , $j = \overline{1, m}$. Найдем пространственное распределение температур источников тепла $u_1, opt(y)$, $u_2, opt(y)$, удовлетворяющее дополнительным ограничениям, при котором средний слой стеклянной пластины нагревается до закалочной температуры за минимальное время при соблюдении условий (3), (4).

Для того, чтобы при определении оптимального пространственного распределения температур источников тепла можно было воспользоваться результатами решения задачи оптимизации динамических режимов процесса нагрева, осуществим переход во временную область, произведя пространственно-временную инверсию температурного поля. С этой целью выразим текущее время процесса нагрева через продольную координату печи и скорость транспортирования изделий $t = \frac{y}{V}$.

Ограничения на пространственное распределение температур источников тепла определяют следующие дополнительные ограничения на элементы вектора управления и задаче оптимизации динамических режимов нагрева:

$$u_1(t) = u_2(t) \quad (7)$$

$$u_i(t) = u_j(t), \quad t_{j-1} < t \leq t_j, \quad i = \overline{1, 2}, \quad j = \overline{1, m} \quad (8)$$

где $t_j = \frac{y_j}{V}$ — время перемещения изделия от начала печи до выхода из j -й секции.

Выполнение условия (8) приводит к тому, что элементы вектора управления меняют свое значение только в дискретные моменты времени и остаются неизменными в течение всего периода дискретизации. Следует отметить, что в случае неравенства длин секций закалочной печи шаг дискретизации управления по времени будет неравномерным. С учетом введенных дополнительных ограничений выражение (6) примет следующий вид:

$$U_{opt}(t) = \max U, \quad t_{j-1} < t \leq t_j, \quad j = \overline{1, m} \quad (9)$$

$$U \in \Omega(t)$$

где $\Omega(t)$ — множество управлений, не приводящих к нарушению условий (3), (4), (7), (8) в интервале времени $t_{j-1} < t \leq t_j$.

Оптимальные значения температуры источников тепла на m интервалах управления найдем, последовательно произведя вычисления оптимальных управлений $U(t_j)$, $j = \overline{1, m}$ в соответствии со следующим рекуррентным алгоритмом:

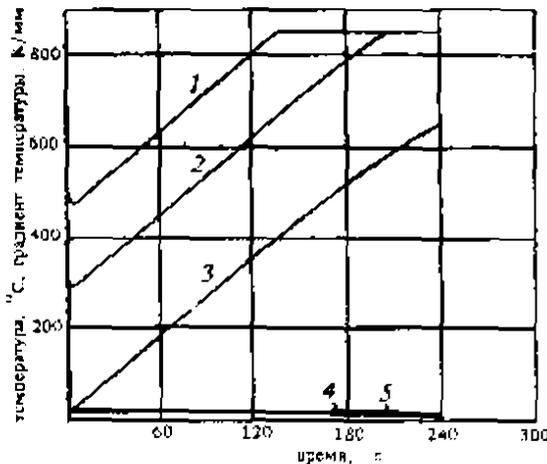


Рис. 1. Рассчитанный оптимальный процесс нагрева стеклянной пластины ($h_k = 80 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$): 1, 2—температура источника тепла у 1-го и n-го слоев соответственно; 3—температура срединного слоя; 4, 5—температурный градиент у 1-го и n-го слоев соответственно.

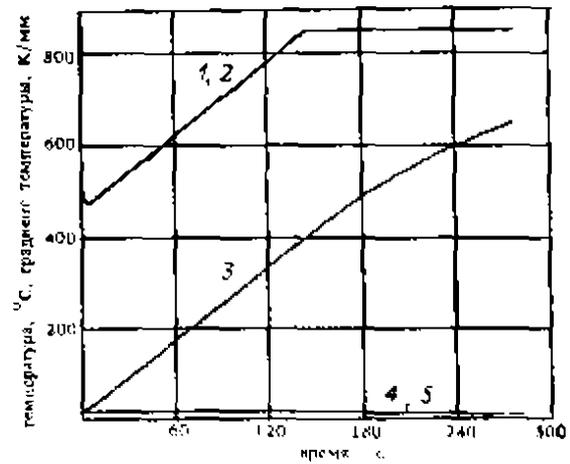


Рис. 2. Рассчитанный оптимальный процесс нагрева стеклянной пластины ($h_k = 40 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$): 1, 2—температура источника тепла у 1-го и n-го слоев соответственно; 3—температура срединного слоя; 4, 5—температурный градиент у 1-го и n-го слоев соответственно.

Шаг 1. Зная состояние системы (2) в момент времени t_{j-1} , определяем множество $\Omega(t_j)$ управлений, не приводящих к нарушению заданных ограничений в интервале времени $t_{j-1} < t \leq t_j$.

Шаг 2. С помощью выражения (9) определяем оптимальное управление $U_{opt}(t_j)$ на данном интервале.

Шаг 3. Зная состояние системы (2) в момент времени t_{j-1} и определив оптимальное управление $U_{opt}(t_j)$ в интервале $t_{j-1} < t \leq t_j$, находим состояние системы в момент времени t_j .

Осуществив обратный переход из области времени в область пространственных координат и определив оптимальное распределение температур по секциям печи. Для этого выразим продольную координату печи через текущее время процесса нагрева и скорость транспортирования изделий $y = \frac{t}{v}$.

Таким образом определяем оптимальное распределение температур по секциям печи при выбранной скорости транспортирования стеклоизделий:

$$U_{opt}(y_j) = U_{opt}(t_j)$$

Так как выбор скорости транспортирования стеклоизделий осуществляется произвольным образом, то в результате реализации оптимального распределения температур по секциям при перемещении изделий по печи с данной скоростью возможно возникновение следующих ситуаций:

1. Время нагрева срединного слоя до закалочной температуры меньше времени пребывания изделия в печи $t_k < t_m$. В данном случае производительность теплотехнологической установки не является максимально возможной и на выходе из печи наблюдается перегрев стекла. Для исправления ситуации необходимо увеличить скорость транспортирования изделий по печи.
2. Время нагрева срединного слоя до закалочной температуры равно времени пребывания изделия в печи $t_k = t_m$ или, что то же самое, температура срединного слоя на выходе из печи равна закалочной $x_0(t_k) = x_k$. В этом случае обеспечивается максимально возможная при заданных ограничениях производительность теплотехнологической установки, выбранная скорость транспортирования изделий является оптимальной, задачу оптимизации рабочих режимов закалочной печи следует считать полностью решенной.
3. Температура срединного слоя на выходе из печи ниже закалочной. В этом случае имеет место недогрев

стекла, который может привести к разрушению изделия при заданной интенсивности охлаждения. Для исправления ситуации необходимо уменьшить скорость транспортирования изделий по печи.

Для решения задачи оптимизации рабочих режимов закалочной печи можно воспользоваться следующим двухуровневым циклическим алгоритмом:

Уровень 1. Определение возможности решения задачи оптимизации рабочих режимов закалочной печи при заданных ограничениях и организация цикла поиска оптимальной скорости транспортирования изделий в рабочем диапазоне скоростей.

Уровень 2. Оптимизация температурных режимов при заданной скорости транспортирования изделий в соответствии с приведенным выше рекуррентным алгоритмом, анализ возникающей при этом ситуации.

Реализация температурных и скоростных режимов, полученных при решении задачи оптимизации рабочих режимов закалочной печи позволяет обеспечить ее максимальную производительность при соблюдении ограничений, обусловленных характеристиками оборудования и свойствами стекла, и уменьшить пластическую деформацию стеклоизделий за счет увеличения скорости транспортировки. Вместе с тем поддержание оптимальных рабочих режимов сопряжено с вынолом температуры в нагревательных секциях на максимальный допустимый уровень и приводит к притеснению процесса нагрева на границе области допустимых состояний. При этом даже незначительные отклонения рабочих режимов от оптимальных значений, вызванные внешними и внутренними возмущениями, могут привести к нарушениям заданных ограничений, к возникновению брака и к появлению неисправностей оборудования. Указанные причины и полученные результаты создают предпосылки для разработки автоматизированной системы управления закалочной печью, осуществляющей выбор и стабилизацию оптимальных рабочих режимов при термообработке заданного типа стеклоизделий.

Список литературы

1. Мазурин О.В., Белоусов О.В. Ожиг и закалка стекла. М., 1984. 114 с.
2. Gordon R. Calculations of Temperature Distributions in Glass Plates//J. Amer. Ceram. Soc. 1958. V.45. №6. Pp.200—209.
3. Фридкин Р.З., Мазурин О.В. Алгоритм расчета температурного поля в стеклянной пластине при ее нагреве и охлаждении//Физика и химия стекла. 1979. Т. 5. №6. С. 733—736.
4. Ускоренностабилизированный алгоритм расчета температурного поля, возникающего в стеклянной пластине при ее нагреве и охлаждении/Р.З. Фридкин, О.В.Мазурин, А.А. Шагинян и др.//Физика и химия стекла. 1982. Т. 8. №6. Стр. 747—749.